PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2018

I3 - CALCULO I - MAT1610

1. Se debe construir un contenedor rectangular sin tapa de $10m^3$. La longitud de su base es dos veces el ancho. El material para la base cuesta \$10 por metro cuadrado y el material para los costados cuesta \$6 por metro cuadrado. Encuentre cuál es el menor costo que puede tener dicho contenedor.

   Solución:

   Observe que si x es el ancho de la base entonces el área basal es $2x^2$, si llamamos ya la altura del contendor, tenemos que sol volumen es $2x^2y$, como ésta debe ser de $10m^3$, obtenemos que $y = \dfrac{10}{2x^2}$.
   De esta forma tendremos que el costo de fabricar dicho contenedor, en función de la medida del ancho es:

$$C(x) = 20x^2 + \frac{180}{x} \text{ con } x \in (0, \infty)$$

   Ahora en busca de minimizar el costo tenemos que:

$$C'(x) = 40x - \frac{180}{x^2}$$

   de esa forma obtenemos que

$$C'(x) = 0 \Longleftrightarrow x = \sqrt[3]{\frac{9}{2}}$$

   Por otra parte $C''(x) = 40 + \dfrac{369}{x^3}$, así $C''\left(\sqrt[3]{\dfrac{9}{2}}\right) > 0$ lo que implica que

$$C\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right) = 20\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)^2 + 180\left(\sqrt[3]{\frac{9}{2}}\right)^{-1}$$

   es el costo mínimo en la fabricación de un contenedor con estas caracteristicas.

Distribución de puntaje

(2 puntos) Por encontrar la función $C(x)$.

(1 punto) Por encontrar el posible valor que minimiza el costo

(1 punto) Por chequear que dicho valuar corresponde a un mínimo

(2 punto) Por determinar el valor del costo mínimo.

2. a) Demuestre que

$$\frac{1}{14} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^3} dx \leq 1$$

Solución:

Observe que la función $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ es decreciente en $[1,3]$ por lo tanto

$$\frac{1}{28} = f(3) \leq f(x) \leq f(1) = \frac{1}{2}$$

para todo $x \in [1,3]$, luego por propiedades de la integral tenemos que

$$\frac{1}{14} = 2 \cdot \frac{1}{28} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^3} dx \leq 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Distribución de puntaje

(1 punto) Por acotar f en el intervalo $[1,3]$.

(2 punto) Por usar las propiedades de integral y acotar su valor multiplicando lo anterior por el largo del intervalo.

b) Use integrales para calcular el valor de

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \left(5 + \frac{2k}{n}\right)^{10}$$

Solución

Observe que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{n} \left(5 + \frac{2k}{n}\right)^{10} = \int_5^7 x^{10} dx = \frac{7^{11}}{11} - \frac{5^{11}}{11}$$

Distribución de puntaje

(1 punto) Por reconocer la función a integrar.

(1 punto) Por determinar correctamente el intervalo de integración.

(1 punto) Por calcular correctamente el valor de la integral.

3. a) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathbb{R}$ tal que

$$\int_0^{\pi/4} f(x)\,dx = \pi.$$

Encontrar el valor de

$$\int_0^{1/2} \frac{f(\arctan(2x))}{1+4x^2}\,dx.$$

Solución
La función $g(x) = \arctan(2x)$ es inyectiva en $\mathbb{R}$, tiene derivada

$$g'(x) = \frac{2}{1+4x^2}$$

y satisface $g(0) = 0$ y $g(1/2) = \pi/4$. Note que

$$\int_0^{1/2} \frac{f(\arctan(2x))}{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{1/2} f(g(x))g'(x)\,dx.$$

Luego, por el teorema de cambio de variable

$$\frac{1}{2}\int_0^{1/2} f(g(x))g'(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} f(u)\,du = \frac{\pi}{2}.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^{1/2} \frac{f(\arctan(2x))}{1+4x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por la inyectividad y la derivada de g, y por determinar los valores de $g(0)$ y $g(1/2)$.
(1 punto) Por usar el teorema de cambio de variable.
(1 punto) Por llegar correctamente al resultado.

b) Calcular el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_1^{x^2+1}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{x^2}.$$

Solución:
Note que

$$\lim_{x\to 0}\int_1^{x^2+1}\frac{e^{-t}}{t}\,dt=\lim_{x\to 0}x^2=0.$$

Adems

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\displaystyle\int_1^{x^2+1}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-(x^2+1)}}{x^2+1}=e^{-1}.$$

Por lo tanto, por la regla de L'hopital tenemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_1^{x^2+1}\frac{e^{-t}}{t}\,dt}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\displaystyle\int_1^{x^2+1}\frac{e^{-t}}{t}\,dt\right)'}{(x^2)'}=e^{-1}.$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por mostrar correctamente que el límite tiene la forma indeterminada $(\frac{0}{0})$.
(1 punto) Por calcular correctamente el límite del cuociente de las derivadas.
(1 punto) Por usar la regla de L'Hopital y llegar al resultado final.

4. a) Use la interpretación geométrica y las propiedades de la integral para calcular el valor de

$$\int_0^3 (\sqrt{9-x^2}+2x+1)\,dx.$$

Solución

Notar que las funciones $f(x)=\sqrt{9-x^2}$ y $g(x)=2x+1$ son continuas y positivas en $[0,3]$ y por lo tanto integrables en $[0,3]$. En este caso podemos escribir

$$\int_0^3 (\sqrt{9-x^2}+2x+1)\,dx = \int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx + \int_0^3 (2x+1)\,dx.$$

El gráfico de f corresponde al cuarto de circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 3 que se ubica en el primer cuadrante, y la integral $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ mide el área entre el eje x y el gráfico de f. Es decir

$$\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9\pi}{4}.$$

Por otra parte, la integral $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\,dx$ mide el área del cuadriltero de vértices $(0,0),(3,0),(3,7),(0,1)$. Es decir,

$$\int_0^3 (2x+1)\,dx = 12.$$

Por lo tanto,

$$\int_0^3 (\sqrt{9-x^2}+2x+1)\,dx = \frac{9\pi}{4}+12.$$

Distribución de puntaje:

(0.5 puntos) Por separar las integrales justificando adecuadamente.

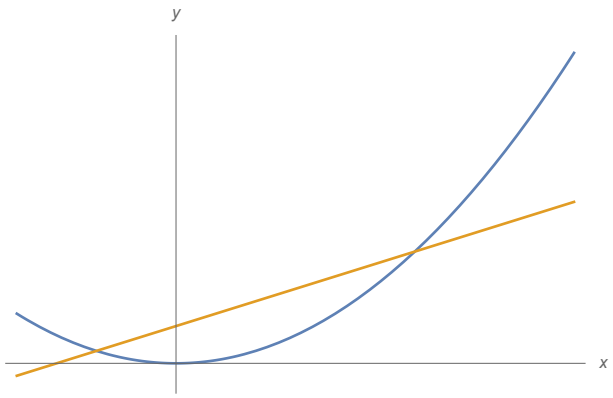
(1 punto) Por el valor de la integral $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{9-x^2}\,dx$ con la respectiva justificacin.

(1 punto) Por el valor de la integral $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)\,dx$ con la respectiva justificacin.

(0.5 puntos) Por el resultado final, justificando adecuadamente.

b) Calcular el área entre las curvas $y = x^2$ e $y = 2x + 3$, con $x \in [-2, 5]$.

Los gráficos de las funciones $y = x^2$ e $y = 2x + 3$, con $x \in [-2, 5]$ se muestran en la siguiente figura.



Los puntos de intersección de las curvas son $x = -1$ y $x = 3$. Por lo tanto, el área entre las curvas $y = x^2$ e $y = 2x + 3$, con $x \in [-2, 5]$ se calcula según

$$\begin{aligned} A &= \int_{-2}^{-1} (x^2 - (2x + 3))\, dx + \int_{-1}^{3} (2x + 3 - x^2)\, dx + \int_{3}^{5} (x^2 - (2x + 3))\, dx \\ &= \frac{7}{3} + \frac{32}{3} + \frac{32}{3} = \frac{71}{3}. \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por el gráfico y los puntos de intersección de las funciones.
(0.5 puntos) Por cada integral.
(0.5 puntos) Por el resultado final, justificando adecuadamente.