PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2019

MAT1610 – CÁLCULO 1
Interrogación 3

1. Encuentre los puntos de la elipse con ecuación $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, en el primer cuadrante, para los cuales el producto de sus coordenadas sea máximo.

   Solución

   Sea P(x, y) en la elipse. Queremos maximizar xy cuando tanto x como y son positivos.

   Como P está en la elipse, $y = 2\sqrt{1-x^2}$, por lo tanto queremos maximizar $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$.

   $$f'(x) = 2\sqrt{1-x^2} - 2x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}x = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}(1-2x^2).$$

   Vemos que para $0 < x < 1$, $f'(x) = 0$ solo para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Además $f'(x) > 0$ si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $f'(x) < 0$ si $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 1$, por lo tanto se tiene un máximo sólo para $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

   Por lo tanto el punto buscado es $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}\right)$.

   PUNTAJE
   2 puntos expresa la función a maximizar como función de una variable.
   2 puntos encuentra el punto crítico en el intervalo adecuado.
   2 puntos justifica, por cualquier tipo de argumento correcto que en el punto crítico se obtiene un máximo.
   Bajar 0,5 si no responde la pregunta(o sea no indica cual es el punto)

2. *a*) Escriba

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$$

como integral y luego calcúlela.

b) Demuestre que

$$\frac{2}{5}<\arctan(2)+\frac{\pi}{4}<3$$

Solución

a)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{k}{n}}}\,\frac{1}{n}$$

Sea $x_k=1+\frac{k}{n}$, entonces $x_0<x_1<\cdots<x_n$ es una partición de $[1,\ 2]$. Entonces $\triangle x_k=\frac{1}{n}$ que tiende a 0 cuando n tiende a ∞. Tenemos que la función $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ es continua en $[1,2]$ por lo tanto es integrable en ese intervalo. Se cumple que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}=\int_1^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=2\sqrt{x}\,\Big|_1^2=2\sqrt{2}-2$$

b) Se tiene que $\arctan(2)+\frac{\pi}{4}>\arctan(2)=\int_0^2\frac{1}{1+x^2}\,dx$ pero

$$\int_0^2\frac{1}{1+x^2}\,dx>\int_0^2\frac{1}{5}\,dx=\frac{2}{5}$$

por lo tanto $\frac{2}{5}<\arctan(2)+\frac{\pi}{4}$.

Por otra parte, $\arctan(2)+\dfrac{\pi}{4}=\displaystyle\int_{-1}^2\frac{1}{1+x^2}\,dx<\int_{-1}^2\,dx=3$

PUNTAJE
a) Expresa la suma como una suma de Riemann, 1 punto
Indentifica el limite correctamente como una integral, 1 punto
Calcula la integral, 1 punto
b) 1,5 por cada acotación correcta.

3. Calcule las siguientes integrales

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{5} |4-x^2|\,dx.$

   b) $\displaystyle\int_{1}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx.$

   Solución

   a) $\displaystyle\int_{-2}^{5} |4-x^2|\,dx = \int_{-2}^{2} |4-x^2|\,dx + \int_{2}^{5} |4-x^2|\,dx$
   $\displaystyle= \int_{-2}^{2} (4-x^2)\,dx + \int_{2}^{5} (x^2-4)\,dx = (4x-\frac{x^3}{3})\,|_{-2}^{2} + (\frac{x^3}{3}-4x)\,|_{2}^{5} = 4+\frac{101}{3}$

   b) Sea $u = 2-x$, entonces $dx = -du$, se tiene que

   $$\int_{1}^{2} x\sqrt{2-x}\,dx = -\int_{1}^{0} (2-u)\sqrt{u}\,du = \left(\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}\right)\Big|_{0}^{1} = \frac{14}{15}$$

   PUNTAJE
   3 puntos cada una

4. *a*) Sin resolver la integral, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la funcion $f(x)$ dada por $f(x) = \int_{1-x}^{1+x} t^2\, dt$

   b) Demuestre que si f es una función continua y periódica con período T entonces la función $G(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)\, dt$ es constante.

Solución

a) Se tiene que $f(x) = \int_{1-x}^{1+x} t^2\, dt = \int_{0}^{1+x} t^2\, dt - \int_{0}^{1-x} t^2\, dt$. Como la función $g(t) = t^2$ es continua, la función $f(x)$ es derivable y su derivada está dada por

$$f'(t) = (1+x)^2 - (1-x)^2(-1) = (1+x)^2 + (1-x)^2 \geq 0$$

por lo tanto f es creciente en todos los reales.

b) Por hipótesis f es continua por lo tanto

$$G(x) = \int_{x}^{x+T} f(t)\, dt = \int_{a}^{x+T} f(t)\, dt - \int_{a}^{x} f(t)\, dt$$

es derivable y su derivada esta dada por

$$G'(x) = f(x+T) - f(x) = f(x) - f(x) = 0$$

por lo tanto G es costante.

PUNTAJE
La distribución de puntaje es la misma en ambas letras.
Indicar que la integral es derivable porque la función integrada es continua. 1 punto
Integrar correctamente. 1 punto
Concluir correctamente . 1punto