Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2017

MAT1610 ⋆ CÁLCULO I
INTERROGACIÓN 3

1. Escriba el siguiente límite como una suma de Riemann y calcule el valor de la respectiva integral definida.
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}.$$

2. Calcule

   a) $\displaystyle\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx.$ *b)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx.$

3. Sea f una función cuya derivada es continua en $\mathbb{R}$. Calcule $F'(x)$ si
$$F(x) = \int_0^x (x-t)f'(t)\,dt.$$

4. Sin calcular el valor de la integral, verifique que
$$\frac{3}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\,dx \leq \frac{3}{5}.$$

5. Calcule el área encerrada por:
$$y = 3x^2, \qquad y = 8x^2, \qquad 4x + y = 4, \qquad x \geq 0.$$

6. Calcule el volumen de una pirámide cuya base es un cuadrado de lado L y cuya altura es h.

7. Determine el volumen del sólido generado al hacer girar respecto de la recta $x = 3$ la región comprendida entre la parábola $x = y^2 + 1$ y la recta $x = 3$.

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   a) Si f es una función continua en $[a, b]$ entonces
   $$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x)\,dx\right) = f(b) - f(a).$$

   b) $\displaystyle\int_{-5}^{5} (ax^{10} + bx^9 + \cos^6(x))\,dx = 2\int_0^5 (ax^{10} + \cos^6(x))\,dx.$

   c) Para $x \in (0, \infty)$ la función
   $$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt,$$
   es siempre positiva y creciente.

UNA SOLUCIÓN

1. Para calcular el límite pedido, lo reescribiremos como una suma de Riemann,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2} &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{n^2}{k^2}}.\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= Arctg(1)-Arctg(0)=\frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

El límite pedido se puede escribir como una integral definida, ya que la función $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ es continua en el intervalo $[0,1]$.

Asignación de puntaje:

- Por reconocer la partición regular con $\triangle x=\frac{1}{n}$ asignar 1.5 puntos.
- Por reconocer la función correcta $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, asignar $1,5$ puntos.
- Por reconocer el intervalor $[0,1]$ asignar $1,5$ puntos.
- Por calcular de manera correcta el valor de la integral asignar $1,5$ puntos.

2. *a*)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x}{1+x^2}\,dx &= \int\left(\frac{1}{1+x^2}+\frac{x}{1+x^2}\right)dx\\ &= Arctg(x)+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+c.\end{aligned}$$

b) Para calcular la integral

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}\,dx$$

hacemos el cambio de variable

$$u=\frac{1}{x},\qquad \frac{du}{dx}=-\frac{1}{x^2},$$

con lo cual la integral dada se convierte en,

$$\int_1^{1/2} -e^u\,du=\int_{1/2}^1 e^u\,du=e-e^{1/2}.$$

Asignación de puntaje:

- (a). Por separar la integral y calcular de manera correcta cada una de las integrales resultantes asignar 3 puntos. Errores númericos en la sustitución o al separar descuentan $0,5$ puntos cada uno. No agregar la constante de integración descuenta 1 punto.

- (b) Por realizar una sustitución correcta asignar $1,5$ puntos.
- (b) Por calcular de manera correcta el valor asignar 1.5 puntos.

3. Para calcular la derivada de la función pedida, comenzamos separando de la siguiente forma,

$$F(x) = x\int_0^x f'(t)\,dt - \int_0^x tf'(t)\,dt$$

a continuación derivamos,

$$F'(x) = \int_0^x f'(t)\,dt + xf'(x) - xf'(x),$$

pero por el Teorema Fundamental del Cálculo,

$$F'(x) = f(x) - f(0).$$

Asignación de puntaje:

- Por separar de manera correcta en dos integrales asignar 1 punto.
- Por derivar de manera correcta cada una de las integrales, utilizando la regla del producto agregar 4 puntos (2 por cada integral)
- Por utilizar de manera correcta el TFC y obtener el valor de la derivada asignar 1 punto

4. Comenzamos notando que la función $f(x) = \dfrac{1}{x+5}$ es decreciente en el intervalo $[0,3]$, ya que $f'(x) = \dfrac{-1}{(5+x)^2} < 0$. Luego se tiene que

$$\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x+5} \leq \frac{1}{5},$$

y por lo tanto

$$(3-0)\frac{1}{8} \leq \int_0^3 \frac{1}{x+5}\,dx \leq \frac{1}{5}(3-0),$$

con lo cual se verifica lo pedido.
Asignación de puntaje:

- Por argumentar de manera correcta que la función es decreciente, obteniendo de manera correcta sus valores máximos y mínimos asignar 3 puntos.
- Por utlizar de manera correcta la información anterior y obtener lo pedido asignar 3 puntos.

5. El área pedida se puede representar mediante la siguiente suma de integrales,

$$A = \int_0^{1/2} (8x^2 - 3x^2)\,dx + \int_{1/2}^{2/3} ((4-4x) - 3x^2)\,dx$$

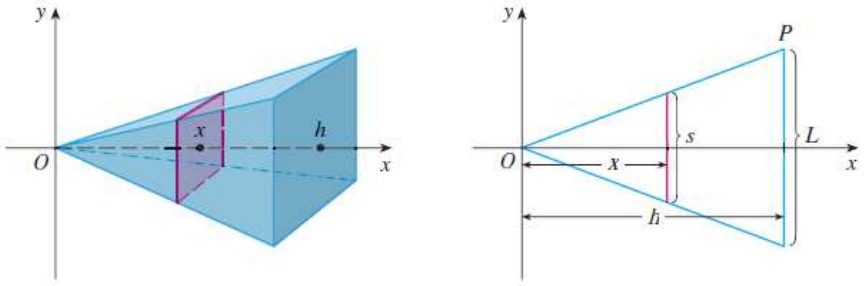
las cuales, una vez calculadas entregan,

$$A = \frac{5}{24} + \frac{23}{216}.$$

Asignación de puntaje:

- Por calcular de manera correcta las intersecciones de las curvas involucradas, asignar $1,5$ puntos.
- Por reconocer los intervalos en los cuales las respecitivas curvas determinan los limites superiores e inferiores (escribir las integrales correctas) asignar 2.5 puntos
- Calcular las integrales de manera correcta asignar 2 puntos (no es necesario calcular todas las sumas de fracciones involucradas)

6. Consideremos el siguiente esquema:



De donde se obtiene la siguiente relación

$$\frac{x}{h} = \frac{s}{L},$$

con lo cual, el área de una sección transversal es

$$A(x) = s^2 = \frac{L^2}{h^2}x^2,$$

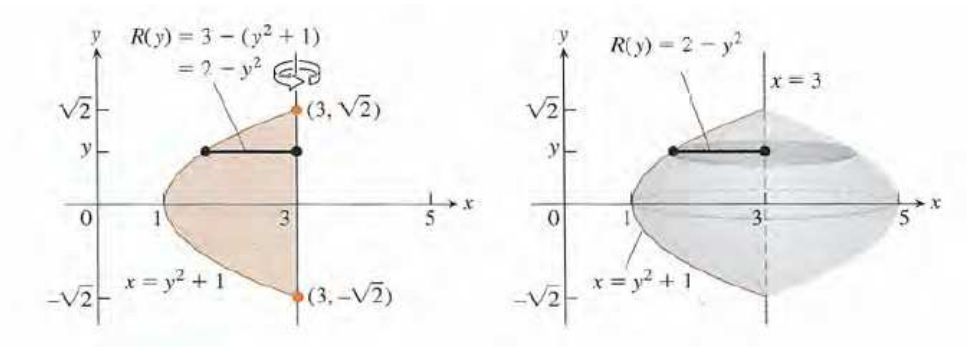
y el volumen pedido será

$$V = \int_0^h A(x)\,dx = \frac{L^2}{h^2}\int_0^h x^2\,dx = \frac{L^2 h}{3}.$$

Asignación de puntaje:

- Por obtener de manera correcta el área de una sección transversal generica asignar $2,5$ puntos.
- Por plantear la integral que determinar el volumen de manera correcta, asignar 2 puntos.
- Por calcular la integral de manera correcta asignar $1,5$ puntos

7. Utilizando el siguiente esquema como referencia,



tenemos que el volumen pedido se describe como:

$$V = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi (R(y))^2 \, dy = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \pi (2 - y^2)^2 \, dy = \frac{64\pi\sqrt{2}}{15}.$$

Asignación de puntaje:

- Por reconocer el radio respectivo de manera correcta asignar 2 puntos.
- Por obtener los bordes de integración de manera correcta asignar 1 punto
- Por plantear de manera correcta la integral asignar 1 punto.
- Por calcular el volumen de manera correcta asignar 2 puntos.

8. *a*) Falso, ya que la expresión a derivar es un valor constante, (una integral definida), luego la derivada es siempre igual a cero.

   b) Verdadero, ya que la función bx^9 es impar en un intervalo simétrico respecto al origen, luego su integral es cero. Además las otras dos funciones $x^{10}, \cos^6(x)$ son pares.

   c) Falso, basta tomar $x \in (0, 1)$ y el valor de $F(x) = \ln(x)$ es negativo. Aún cuando si es creciente en el intervalo $(0, \infty)$.

Asignación de puntaje:

- Cada pregunta, con su respectiva justificación entrega 2 puntos.