PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2018

Pauta Interrogación 3- MAT1610

1. Calcule:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2} \qquad \text{b)}\ \int_2^4 |x^2-5x+6|dx$$

Solución:

$$\text{a)}\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+(k/n)^2} = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(1)-\arctan(0) = \frac{\pi}{4}$$

Distribución de puntajes

- 2 puntos por determinar una integral que corresponda a la suma pedida.
- 1 punto por resolver dicha integral.

$$\text{b)}\ \int_2^4 |x^2-5x+6|dx = \int_2^3 -(x^2-5x+6)dx + \int_3^4 x^2-5x+6\,dx = 1$$

Distribución de puntajes

- 2 puntos por separar correctamente en dos integrales dependiendo del signo.
- 1 punto por calcular el valor de dicha integral.

2. Determine:

a) $\int \arctan(3x)dx$ b) $\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}}$

Solución:

a) Sea $u = \arctan(3x)$ y $dv = dx$, con esto tenemos que $du = \frac{3}{1+9x^2}dx$ y $v = x$. Haciendo integración por partes tenemos que:

$$\int \arctan(3x)dx = x\arctan(3x) - \int \frac{3x}{1+9x^2} = \arctan(3x) - \frac{1}{6}\ln(1+9x^2) + C$$

Distribución de puntajes

- 1 puntos por hacer las sustituciones adecuadas para integración por partes.
- 1 punto por plantear correctamente la nueva integral a calcular
- 1 punto por resolver la integral que queda usando sustitución, descontar 0,5 si olvida la constante C.

Sea $u = \ln(x)$, con eso $du = \frac{1}{x}dx$, haciendo esta sustitución tenemos que:

$$\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\ln(x)}} = \int_1^4 \frac{du}{\sqrt{u}} = 2$$

Distribución de puntajes

b)
- 1 puntos por determinar u y du.
- 1 punto por plantear la nueva integral.
- 1 punto por calcular correctamente la integral.

3. a) Calcule $\int_1^4 xf''(x)dx$ sabiendo que $f(1) = 2$, $f(4) = 7, f'(1) = 5, f'(4) = 3$ y que f'' es continua.

Solución:

Si hacemos integración por partes con $u = x$ y $dv = f''(x)dx$, tenemos que:

$$\int_1^4 xf''(x)dx = xf'(x)\Big|_1^4 - \int_1^4 f'(x)dx = (xf'(x) - f(x))\Big|_1^4 = 4f'(4) - f(4) - f'(1) + f(1) = 2$$

Distribución de puntajes

- 1 puntos por determinar u y dv.
- 1 punto por plantear la nueva integral.
- 1 punto por calcular correctamente la integral.

b) Determine $\int \text{sen}\left(\ln(x)\right) dx$

Solución:

Sea $t = \ln(x)$, entonces $dt = \dfrac{1}{x}dx$, lo que equivale a que $dx = e^t dt$, obteniendo que:

$$\int \text{sen}\left(\ln(x)\right) dx = \int e^t \text{sen}(t)dt$$

para resolver esta nueva integral hacemos integración por partes con $u = e^t$ y $dv = \text{sen}(t)dt$ obteniendo:

$$\int e^t \text{sen}(t)dt = -e^t \cos(t) + \int \cos(t)e^t dt$$

para resolver esta última integral hacemos integración por partes nuevamente con $u = e^t$ y $dv = \cos(t)dt$ obteniendo que

$$\int \cos(t)e^t dt = e^t \text{sen}(t) - \int e^t \text{sen}(t)dt$$

reordenando y despejando, obtenemos que:

$$\int e^t \text{sen}(t)dt = \frac{e^t(\text{sen}(t) - \cos(t))}{2} + C$$

volviendo a la variable original tenemos que:

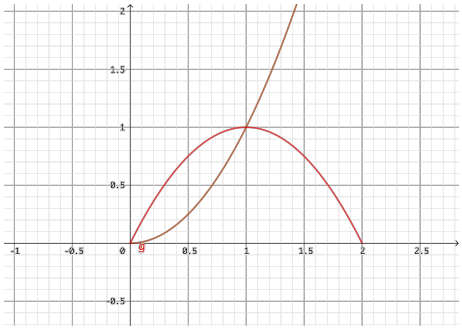
$$\int \text{sen}\left(\ln(x)\right) dx = \frac{x(\text{sen}(\ln(x)) - \cos(\ln(x)))}{2} + C$$

Distribución de puntajes

- 1 puntos por plantear las dos integraciones por partes.
- 1 punto por resolver despejando la integral.
- 1 punto por calcular correctamente la integral. Descontar 0,5 si olvida la constante C.

4. Sea $\mathcal{R}$ la región plana limitada por las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

   Solución:
   Observe que la región $\mathcal{R}$ corresponde a la de la siguiente figura:



   a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.
   Solución:

   El área de la región es:

$$\int_0^1 (2x - x^2) - x^2 dx = \frac{1}{3}$$

   Distribución de puntajes

   - 2 puntos por plantear correctamente laintegral
   - 1 punto por calcular correctamente la integral.

   b) Determine el volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x = -2$.
   Solución:

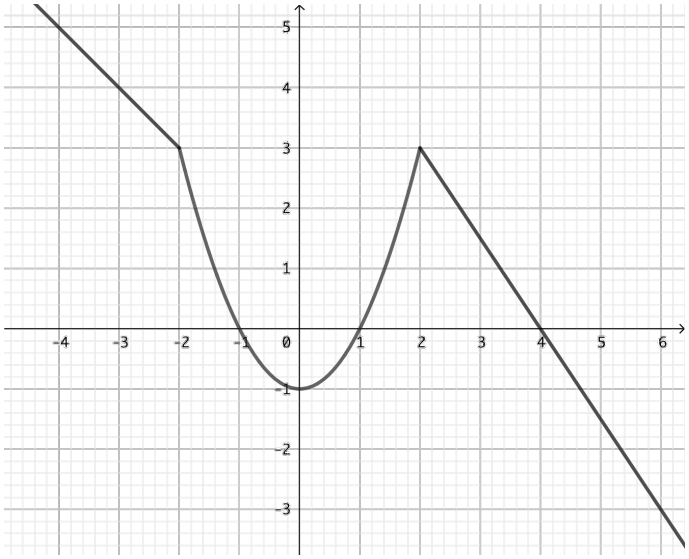
   El volumen del sólido es:

$$\int_0^1 2\pi(x+2)(2x - 2x^2)dx = \frac{5\pi}{3}$$

   Distribución de puntajes

   - 2 puntos por plantear correctamente laintegral
   - 1 punto por calcular correctamente la integral.

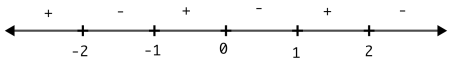
5. Sea $G(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} f(t)\,dt$ donde f es la función cuyo gráfico se muestra a continuación:



Determine los intervalos de crecimiento de G.

Solución:

$G'(x) = 2xf(x^2)$ por lo tanto $G'(x) = 0$ si y sólo si $x = 0, x = 1, x = -1, x = 2$ 0 $x = -2$. Si hacemos el estudio de signos de G' tendremos que:



y por lo tanto G es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (1, 2)$

Distribución de puntajes

- 2 puntos por derivar G correctamente
- 2 puntos por el estudio de signos
- 2 puntos por determinar intervalos.