PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2013

MAT - 1610 * I3

1. Sean $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ y $G(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{dt}{1+t^2}$, para $0 < x < 1$.

   a) **[4 pts.]** Demuestre que $F'(x) + 2G'(x) = 0$

   b) **[2 pts.]** Demuestre que $F(x) + 2G(x) = \dfrac{\pi}{2}$.

DESARROLLO

a) Derivando con el teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}$$

(**1.5 pts**)
y

$$G'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

(**1.5 pts**)
entonces se cumple que

$$F'(x) + 2G'(x) = 0$$

(**1.0 pts**)

b) Esto significa que la funcion $F(x) + 2G(x)$ es constante en el intervalos de trabajo.Por lo tanto, el valor de esa función es el mismo, para todo $x \in (0,1)$. Por lo tanto evaluamos en $x = 1/2$ y nos queda:

$$\int_0^0 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + 2\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = 2\arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

(**2.0 pts**)

2. Calcule:

   a) **[3 pts.]** $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+5\cos(x)}$

   b) **[3 pts.]** $\displaystyle\int_0^1 x^3 \cos(1+x^2)\, dx$

DESARROLLO

a) Sea $\tan(x/2) = z$ entonces $dx = \dfrac{2dz}{1+z^2}$ y $\cos(x) = \dfrac{1-z^2}{1+z^2}$.
También cuando $x = 0 \Rightarrow z = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow z = 1$.
(**1.0 pts**)
Por lo tanto:

$I = \int_0^1 \dfrac{dz}{4-z^2}$
(**0.5 pts**)
y utilizando fraccciones parciales, nos queda

$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{dz}{2-z} + \int_0^1 \frac{dz}{2+z} = \frac{1}{4}(\ln|2+z| - \ln|2-z|)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln(3)$$

(**1.5 pts**)

b) Integramos por parte: Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2xdx$
y sea $dv = x\cos(1+x^2)\,dx \Rightarrow v = \dfrac{1}{2}\operatorname{sen}(1+x^2)$
(**1.5 pts**)
Por lo tanto

$$I = \frac{x^2}{2}\operatorname{sen}(1+x^2)\Big|_0^1 + \frac{cos(1+x^2)}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\operatorname{sen}(2) + \cos(2) - \cos(1))$$

(**1.5 pts**)

3. a) **[3 pts.]** Sean $a > 0$ y $b > 0$, se define la función f por:

$$f(x) = \int_a^b t^x\,dt$$

Calcule $f(-1)$ y determine si f es continua en $x = -1$.

Solución:

$$f(-1) = \int_a^b t^{-1}\,dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln(t)\Big|_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

(**0.5 pts**)

$\forall\, x \neq -1$:

$$f(x) = \int_a^b t^x\,dt = \frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_a^b = \frac{b^{x+1}}{x+1} - \frac{a^{x+1}}{x+1} = \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}$$

(**1.0 pts**)
Luego

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}$$

Como el límite es de la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicamos la regla de L'Hôpital y se tiene:

$$\lim_{x\to -1} f(x) \overset{L'H}{=} \lim_{x\to -1} b^{x+1}\,\ln(b) - a^{x+1}\,\ln(a) = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = f(-1)$$

Por lo tanto f es continua en $x = -1$.
(**1.5 pts**)

b) **[3 pts.]** Sea f función derivable, estrictamente creciente en $[0, a\,]$ con $f(a) = b$ y $f(0) = 0$. Demuestre que

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,dy \;= ab - \int_0^a f(x)\,dx$$

y aplique este resultado para calcular $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{arc\,sen}(x)dx$.

DESARROLLO

Es equivalente demostrar que:

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,dy \;+ \int_0^a f(x)\,dx = ab$$

Sea $y = f(x)$ entonces $dy = f'(x)dx$ y si $y = 0 \Rightarrow x = 0$ y $y = b \Rightarrow x = a$.
(**1.5 pts**)
Por lo tanto:

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,dy \;+ \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a xf'(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a (xf'(x) + f(x))\,dx$$
$$= \int_0^a (xf(x))'dx = af(a) = ab.$$

(**1.5 pts**)

4. Encuentre el área encerrada entre las curvas $y = x^2 - 6x + 10$ e $y = 6x - x^2$.

DESARROLLO

Los puntos de intersección de ambas parábolas para $x = 1$ y $x = 5$.
(**1.0 pts**)
En el intervalo $[1, 5]$ ambas son positivas y $6x - x^2 > x^2 - 6x + 10$ en $(1, 5)$
(**2.0 pts**)
lo que nos dice que el área es:

$$A = \int_1^5 (-2x^2 + 12x - 10)dx = -\frac{2}{3}x^3 + 6x^2 - 10x\Big|_1^5 = \frac{64}{3}.$$

(**3.0 pts**)