Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2013

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 1

1. a) Dadas las funciones f y g definidas por $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x^2 + x$, calcule

$$\lim_{x \to 2} \frac{(f \circ g)(x-1)}{(g \circ f)(x)}$$

b) Sea f una función continua en $[\,0,\,2\,]$ tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existe $x_1 \in [\,0,\,1\,]$ tal que $f(x_1) = f(x_1 + 1)$.
Ayuda: Considere la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$ en el intervalo $[\,0,\,1\,]$.

Solución

a) $\lim_{x\to 2} \dfrac{(f \circ g)(x-1)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{f(g(x-1))}{g(x-2)} = \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} =$
$\lim_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = 3.$
(**3.0 pts**)

b) Sea $g(x) = f(x+1) - f(x)$, entonces g es continua en $[0,1]$ y $g(0) = f(1) - f(0)$ y $g(1) = f(2) - f(1)$

Caso 1 Si $f(0) < f(1)$ entonces $g(0) > 0$ y $yg(1) < 0$ porque $f(0) = f(2)$. Luego por el teorema del Valor Intermedio se tiene que:

$$\exists x_1 \in [0,1](g(x_1) = 0)$$

Pero esto significa que

$$\exists x_1 \in [0,1](f(x_1) = f(x_1 + 1))$$

(**1.4 pts**)

caso 2 Si $f(0) > f(1)$ entonces $g(0) < 0$ y $g(1) > 0$ luego por teorema del Valor Intermedio se tiene que:

$$\exists x_1 \in [0,1](g(x_1) = 0)$$

Pero esto significa que

$$\exists x_1 \in [0,1](f(x_1) = f(x_1 + 1))$$

(**1.4 pts**)

Caso 3 Si $f(0) = f(1)$ se cumple trivialmente co $x_1 = 0$.
(**0.2pts**)

ALTERNATIVA : Basta demostrar que existe al menos un punto $x \in [0,1]$ tal que $g(x) = 0$.

Si escribimos $a = f(0) = f(2)$ tenemos que $g(0) = f(1) - f(0) = f(1) - a$ y que $g(1) = f(2) - f(1) = a - f(1)$ de modo que $g(1) = -g(0)$.
Si ambos son cero entonces hemos hallado dos puntos con la condicin requerida. Si no, $g(x)$ cambia de signo al pasar x de 0 a 1. La continuidad de g y el T.V.I. establecen que en tal caso existe $x \in (0,1)$ tal que $g(x) = 0$ y por tanto siempre existirá un punto como el buscado.

2. a) Sea f una función derivable en $x = 1$ tal que $f(1) = 0$ y $f'(1) = 3$. Calcule $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x^2)}{2x+2}$.

b) Para las siguientes preguntas f es una función continua en $x = 0$ tal que

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

i) Demuestre que $f(0) = 0$ y calcule $f'(0)$.

ii) Calcule el siguiente límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(f(x))}{x^2}$$

Solución

a) dado que $f'(1) = 3$ entonces

$$\lim_{x\to 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{f(x)}{x-1} = 3.$$

(**1.0 pts**)

Luego $\lim_{x\to -1} \dfrac{f(x^2)}{2x+2} = \dfrac{1}{2} \lim_{u\to 1} \dfrac{f(u^2)}{-u+1}$ haciendo la substitución $x = -u$
Por lo tanto

$$\lim_{x\to -1} \frac{f(x^2)}{2x+2} = -\frac{1}{2} \lim_{u\to 1} \frac{f(u^2)}{u^2-1}(1+u) = -3$$

(**2.0 pts**)

b) i) f es continua en $x = 0$, por lo tanto

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{f(x)}{x} = 2 * 0 = 0$$

(**0.5 pts**)

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 2$$

(**0.5 pts**)

ii) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(f(x))}{x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos^2(f(x))f^2(x)}{f^2(x)x^2(1+\cos(f(x))}$

$= \lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\text{sen}(f(x))}{f(x)}\right)^2 \left(\dfrac{f(x)}{x}\right)^2 \dfrac{1}{1+\cos(f(x)}$

(**1.0 pts**)

Como f es continua en $x = 0$ y $f(0) = 0$, entonces (**0.5 pts**)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(f(x))}{x^2} = 2$$

(**0.5 pts**)

3. Encuentre todos los puntos de la curva $y = \dfrac{1}{x+1}$ en los cuales la tangente a la curva en dichos puntos pasa por $(0, -1)$.
Solución

La pendiente de la tangente es $f'(x_0) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ (**1.0 pts**)
luego la ecuación de la tangente en el punto (x_0, y_0) de la curva es:

$$y - y_0 = -\frac{1}{(1+x)^2}(x - x_0)$$

(**1.0 pts**)

Pero la recta tangente debe pasar por el punto $(0, -1)$ que no está en la curva, por lo tanto se debe cumplir que:

$$-1 - y_0 = -\frac{1}{(1+x_0)^2}(-x_0)$$

(**1.0 pts**)

Además, El punto (x_0, y_0) está en la curva, luego cumple su ecuación, y substituyendo y_0 por $\dfrac{1}{1+x_0}$ Obtenemos la ecuación:

$$x_0^2 + 4x_0 + 2 = 0$$

(**1.0 pts**)

Sus soluciones son:

$$\{-2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}\}$$

(**1.0 pts**)

Por lo tanto, los puntos buscados son:

$$P_1\Big(-2 + \sqrt{2},\ \frac{1}{-1+\sqrt{2}}\Big) \text{ y } P_2\Big(-2 - \sqrt{2},\ \frac{1}{-1-\sqrt{2}}\Big)$$

(**1.0 pts**)

4. Considere la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-p}{x+1} & \text{si } x > 0 \\ \\ x^2 + qx & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) Determine los valores de p y q en los reales de manera que f sea derivable en $x = 0$

b) Para los valores de p y q encontrados en a), determine la función f' indicando su dominio.

Solución

a) Para que sea derivable en cero, primero necesitamos que sea continua en cero, por lo tanto necesitamos que:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$$

Esto significa que

$$p = 0$$

(**1.0 pts**)

Además:

$$f'(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = 1$$

(**1.0 pts**)
sea igual que el límite por la derecha, es decir:

$$1 = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 + qh}{h} = q$$

(**1.0 pts**)

b)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ \\ 2x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

(**2.0 pts**)

y su dominio son todos los reales. (**1.0 pts**)

ALTERNATIVA : Para la diferenciabilidad en cero se requiere que $\lim_{x\to 0-} f'(x) = \lim_{x\to 0+} f'(x)$.
Esto es, que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} \left(\frac{x}{x+1}\right)' &= \lim_{x\to 0+} (x^2+qx)' \\ &\updownarrow \\ \lim_{x\to 0-} \frac{1}{(x+1)^2} &= \lim_{x\to 0+} 2x+q \\ &\updownarrow \\ 1 &= q \end{aligned}$$