Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre de 2024

Cálculo I ⋆ MAT1610

Interrogación 3

1. Considere la función, con dominio todos los reales,

$$f(x) = \sqrt[3]{1-x^2}$$

cuyas primera y segunda derivada están dadas por

$$f'(x) = -\frac{2x}{3(1-x^2)^{2/3}} \qquad \text{y} \qquad f''(x) = -\frac{2(3+x^2)}{9(1-x^2)^{5/3}}$$

   a) **(4 ptos)** Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

   b) **(2 ptos)** Determine valores de mínimos y máximos locales de f.

   c) **(6 ptos)** Determine intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de f.

   d) **(2 ptos)** Determine, en caso de existir, puntos de inflexión de f.

   e) **(6 ptos)** Esboce una gráfica para f, incluyendo los puntos de intersección con los ejes coordenados.

2. *a*) (**10 ptos**) Determine las coordenadas del punto sobre la curva $y = 2\sqrt{x}$ que está más cerca del punto $(2, 8)$.

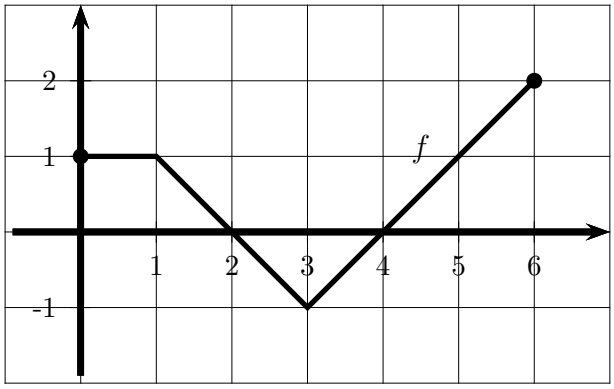
   b) (**6 ptos**) Calcule

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - \sin x}{x \sin x}$$

3. *a*) (**10 ptos**) Sea g una función continua tal que $\displaystyle\int_0^9 g(x)\,dx = 5$ y $g(9) = -1$. Calcule $G'(3)$ sabiendo que

$$G(x) = x \int_0^{x^2} g(t)\,dt$$

   b) (**6 ptos**) En la imagen se muestra la gráfica de una función poligonal continua f sobre el intervalo $[0, 6]$.



   Use la interpretación de **área** para la integral y calcule $\displaystyle\int_0^6 f(t)\,dt$.

Nota. Una poligonal es una secuencia de segmentos unida por sus extremos.

Continua...

4. *a*) (**10 ptos**) Calcule las siguientes integrales

(i) $\displaystyle\int_e^{e^4} \frac{\operatorname{sen}(\ln(x))}{x} dx.$ (ii) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}}\, dx$

b) (**4 ptos**) Para todo $x > 0$, demuestre que

$$\int_0^x \frac{\sinh(t)}{t}\, dt \geq x$$

siendo $\sinh(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

Sugerencia. Comience demostrando que $\sinh(t) \geq t$.

Toda respuesta debe ir acompañada con un desarrollo que justifique su solución. En caso contrario la respuesta será evaluada con puntaje mínimo

Tiempo: 120 minutos

Sin consultas

Sin calculadora

Prohibido tener celular y/o relojes inteligente prendidos