Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2016

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 3

1. Calcular

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n+2}{n}} + \cdots \sqrt{\frac{n+n}{n}}\Big)$$

Solución

Sea $L = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\Big(\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n+2}{n}} + \cdots \sqrt{\frac{n+n}{n}}\Big)$

Entonces

$$L = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\sqrt{1+\frac{k}{n}}$$

Luego si $f(x) = \sqrt{x}$ y $x_i = 1 + \frac{i}{n}$

3,0 pts.

$$L = \int_1^2 \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\Big|_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)$$

3,0 pts.

2. *a*) Calcular

$$\int \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

Sugerencia: utilice la substitución $(e^x - 1) = u^2$

Solución

Sea

$$I = \int \sqrt{e^x - 1}\,dx$$

y sea $e^x - 1 = u^2$ entonces $dx = \frac{2udu}{u^2+1}$

1,0 pto.

Por lo tanto

$$I = \int \frac{2u^2}{u^2+1}\,du = 2\int \frac{u^2+1-1}{u^2+1}\,du = 2\int (1 - \frac{1}{u^2+1}$$

1,0 pto.

Luego

$$I = 2(u - \arctan(u)) + C = 2(\sqrt{e^x - 1} - \arctan(\sqrt{e^x - 1})) + C.$$

1,0 pto.

b) Encuentre una función f tales que:

$$\int_a^{x^2} f(t)\ln(t)\,dt \;=\; x^3\Big(\ln(x)-\frac{1}{3}\Big),\; a>1$$

Solución
Dado que buscamos una función $f(x)$ que cumpla con:

$$\int_a^{x^2} f(t)\ln(t)\,dt \;=\; x^3\Big(\ln(x)-\frac{1}{3}\Big),\; a>1$$

Entonces derivando la igualdad obtenemos

$$2xf(x^2)\ln(x) \;=\; 3x^2\ln(x)-x^2+x^2 \;=\; 3x^2\ln(x)$$

2,0 pts.
Dado que $a>1$ entonces $\ln(x)\neq 0$, luego: Luego

$$f(x^2) \;=\; \frac{3x}{2}$$

Es decir

$$f(x) \;=\; \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

1,0 pto.

3. *a*) Calcular

$$\frac{d}{dx}\int_{1-2x}^{1+2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt$$

Solución

$$\int_{1-2x}^{1+2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt \;=\; \int_{1-2x}^{1} t\,\mathrm{sen}(t)dt + \int_{1}^{1+2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt \;=\; \int_{1}^{1+2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt - \int_{1}^{1-2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt$$

1,5 pts.

Por lo tanto

$$\frac{d}{dx}\int_{1-2x}^{1+2x} t\,\mathrm{sen}(t)dt \;=\; 2((1+2x)\,\mathrm{sen}(1+2x)) \;+\; 2((1-2x)\,\mathrm{sen}(1-2x))$$

1,5 pts.

b) Demostrar que si F es una primitiva de f, entonces

$$\int f(ax)dx \;=\; \frac{F(ax)}{a} + C,\; a \neq 0$$

Solución

Tenemos que $F'(x) \;=\; f(x)$ por lo tanto $f(ax) \;=\; \frac{1}{a}F'(ax)$

1,5 pts.

Luego

$$\int f(ax)dx \;=\; \frac{1}{a}\int F'(ax)\,dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

1,5 pts.

4. Sea c una constante real positiva, calcular el área de la región del plano XY delimitada por abajo por la curva $y \;=\; x^3$ y por arriba por la recta $y \;=\; cx$.

Solución

Buscamos los punto de intersección de las curvas:

$x^3 \;=\; cx \;\leftrightarrow\; x \;=\; 0 \vee x \;=\; \pm\sqrt{c}$

Sin embargo $x \;=\; -\sqrt{c}$ no es lo que buscamos porque no cumple con las hipótesis de que $y = \; x^3$ esté por debajo de $y \;=\; cx$

2,0 pts.

Por lo tanto el área buscada, la denotamos por A y resulta ser

$$A \;=\; \int_0^{\sqrt{c}} (cx - x^3)dx \;=\; (\frac{cx^2}{2} \;-\; \frac{x^4}{4})\Big|_0^{\sqrt{c}}$$

$$A \;=\; \frac{c^2}{2} - \frac{c^2}{4} \;=\; \frac{c^2}{4}$$

4,0 pts.