PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2018

PAUTA EXAMEN - MAT1610

1. a) Determine, en caso que exista, el o los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - [x]} + ax & \text{si } x \geq 1 \\ \\ x - [x] & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

es continua en $x = 1$.

Solución:

Sabemos que f es continua en $x = 1$ si y solo si $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1) = a$. Para esto observemos que

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - [x]} + ax = \lim_{x \to 1^+} \sqrt{x - 1} + ax = a$$

y que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x - [x] = \lim_{x \to 1^-} x = 1$$

por lo tanto f es continua en $x = 1$ si y solo si $a = 1$.

Distribución de puntajes:

- 1 punto por limite lateral derecho
- 1 punto por limite lateral izquierdo
- 0.5 por determinar el valor de a
- 0,5 por establecer, de alguna forma, que $f(1) = a$ y que eso está comparando.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \int_0^x \dfrac{\text{sen}(t^3)dt}{x^4}$

Solución:

Observe que

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{\text{sen}(t^3)dt}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^x \text{sen}(t^3)dt}{x^4}$$

y que éste corresponde a un límite indeterminado de la forma $0/0$ por lo tanto podemos aplicar la regla de L'Hopital obteniendo que

$$\lim_{x \to 0} \int_0^x \frac{\text{sen}(t^3)dt}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(x^3)}{4x^3} = \frac{1}{4}$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por establecer que es del tipo 0/0
- 1 punto por laplicar correctamente L'Hopital
- 1 punto por calcular el valor.

2. a) Calcule el área de la región limitada por las curvas $y = x^2 \ln(x)$ e $y = 4\ln(x)$.

Solución:

Para determinar la región limitada por dichas curvas determinaremos la intersección entre éstas, para eso resolvemos la ecuación

$$4\ln(x) = x^2 \ln(x)$$

cuya solución es $x = 1$ y $x = 2$, obteniendo que el área es:

$$\int_1^2 (4 - x^2)\ln(x)dx$$

Si hacemos integración por partes con $u = \ln(x)$ y $dv = (4 - x^2)dx$ tenemos que

$$\int (4 - x^2)\ln(x)dx = \ln(x)\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) - \int 4 - \frac{x^2}{3}dx = \ln(x)\left(4x - \frac{x^3}{3}\right) - 4x + \frac{x^3}{9} + C$$

De lo que tenemos que

$$\int_1^2 (4 - x^2)\ln(x)dx = \frac{16}{3}\ln(2) - \frac{29}{9}$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por establecer la integral que corresponde al área.
- 1 punto por la integración
- 1 punto por calcular el valor.

b) Determine $\displaystyle\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx$

Solución:

Al hacer fracciones parciales tenemos que $\dfrac{10}{(x-1)(x^2+9)} = \dfrac{1}{(x-1)} - \dfrac{x+1}{x^2+9}$ luego,

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx = \int \frac{1}{(x-1)}dx - \int \frac{x}{x^2+9}dx - \int \frac{1}{x^2+9}dx$$

Calculando cada una de las integrales tenemos que

$$\int \frac{10}{(x-1)(x^2+9)}dx = \ln(|x-1|) - \frac{1}{2}\ln(x^2+9) - \frac{1}{3}\arctan(x/3) + C$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por hacer la descomopicición en fracciones parciales.
- 0.5 punto por la integración de $\int \frac{1}{(x-1)}dx$.
- 0.5 punto por la integración de $\int \frac{1}{2}\ln(x^2+9)dx$.
- 1 punto por la integración de $\int \frac{1}{x^2+9}dx$

* Descontar 0.5 ptos si olvida la constante C

3. Calcule

a) $\int_0^{\pi/4} \tan^5(x)\sec^4(x)dx$

Solución:

Si hacemos la sustitución $u = \tan(x)$ tendremos que

$$\int_0^{\pi/4} \tan^5(x)\sec^4(x)dx = \int_0^1 u^5 + u^7 du = \frac{7}{24}$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por hacer sutitución adecuada.
- 1 punto por deetrminar la integral en términos de la sustitución (si hace mal el cambio de límites de integración ya sea antes o después de integrar descontar 0.5)
- 1 punto por calcular el valor.

b) $\int_1^3 \sqrt{5+4x-x^2}dx$

Solución:

Haciendo $x - 2 = 3\text{sen}(\theta)$ tenemos que

$$\int_1^3 \sqrt{5+4x-x^2}dx = \int_{\text{arcsen}(-1/3)}^{\text{arcsen}(1/3)} 9\cos^2(\theta)d\theta = 9\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}(\theta/2)}{4}\right)\Big|_{\text{arcsen}(-1/3)}^{\text{arcsen}(1/3)} = 2\sqrt{2}+9\text{arcsen}(1/3)$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por hacer sutitución adecuada.
- 1 punto por detrminar la integral en términos de la sustitución (si hace mal el cambio de límites de integración ya sea antes o después de integrar descontar 0.5)
- 1 punto por calcular el valor, puede dejarlo expresado!

4. a) Sea $h(x) = 2^{x\cos(x)}$. Determine $h'(\pi)$.

Solución:

$$h'(x) = 2^{x\cos(x)}\ln(2)(\cos(x) - x\text{sen}(x))$$

evaluando en tenemos que $h'(\pi) = -2^{-\pi}\ln(2)$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por la derivada de la exponenial
- 1 punto por el producto que aparece en la regla de la cadena
- 1 punto por evaluar

b) Se necesita construir una caja de base cuadrada, sin tapa, que debe tener un volumen de 32000cm^3. Encuentre la medida del lado de la base de la caja que minimizan la cantidad de material usado.

Solución:

Observe que la función que modela el material uado es

$$A(x) = x^2 + \frac{128000}{x}$$

para $x > 0$

$A'(x) = \dfrac{2x^3 - 128000}{x^2}$, por lo que $A'(x) = 0$ si y solo si $x = 40$, y este corrresponde a un mínimo ya que antes de $x = 40$ la derivada es negativa y después positiva.

Por lo tanto el lado de la base debe medir $40cm$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por la función que modela el material usado
- 1 punto por eencontar el punto critico.
- 1 punto por verificar que minimiza (cualquiera de los dos criterios)

5. Bosqueje el gráfico de la función

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + e^{-x}$$

indicando extremos locales, puntos de inflexión, intervalos de monotonía, intervalos de concavidad y asíntotas.

Solución:

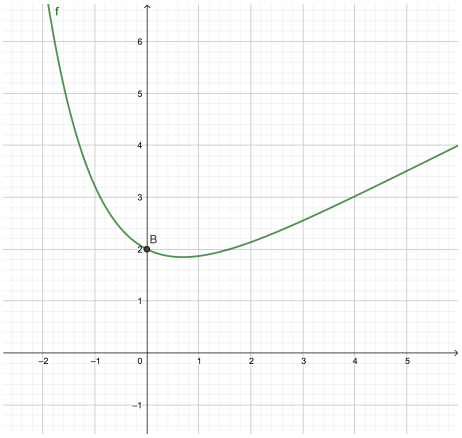
Observe que $f'(x) = 1/2 - e^{-x}$, por lo tanto $f'(x) = 0$ si y solo si $x = -\ln(1/2)$, por otra parte $f''(x) = e^{-x}$ y por lo tanto $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

De lo anterior podemos concluir que $f(-\ln(1/2)) = 3/2 - 1/2\ln(1/2)$ es el único mínimo local, que f no tiene máximos ni puntos de inflexión y que es cóncava hacia arriba en todo $\mathbb{R}$.

En resumen f es creciente en $(3/2 - 1/2\ln(1/2), \infty)$ y decreciente en $(-\infty, 3/2 - 1/2\ln(1/2))$ y cóncava hacia arriba en $(-\infty, \infty)$

Podemos además ver que como f es continua en todo $\mathbb{R}$ no existen asíntotas verticales, los límites al infinito y menos infinito no exsiten por lo que tampoco tiene asíntotas horizontales.

Observe que $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2}$ y que $\lim_{x\to\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x\right) = 1$ por lo tanto la gráfica de la función tiene una asíntora oblicua de ecuación $y = \frac{1}{2}x + 1$



Distribución de puntajes:

- 1 punto por intervalo de creciemiento
- 1 punto por intervalo de decreciemento.
- 1 punto por concavidad
- 1 punto por mínimo
- 1 punto por la asíntota
- 1 punto por gráfico