PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2020

Pauta Examen- MAT1610

Primera versión.

1. Calcule

a) $\int_0^{\pi/6} \text{sen}^2(z)\cos^3(z)dz$.

Solución:
Observe que

$$\int_0^{\pi/6} \text{sen}^2(z)\cos^3(z)dz = \int_0^{\pi/6} (\text{sen}^2(z) - \text{sen}^4(z))\cos(z)dz.$$

haciendo la sustitución $u = \text{sen}(z)$, obtenemos que

$$\int_0^{\pi/6} (\text{sen}^2(z) - \text{sen}^4(z))\cos(z)dz = \int_0^{1/2} u^2 - u^4 du = \frac{17}{480}$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por hacer la sustitución correcta hasta obtener integral equivalente es términos de u.
- (1punto) Por integrar correctamente para obtener resultado.

b) $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$

Solución:

Haciendo la sustitución $t = \tan(\theta)$, obtenemos que

$$\int_{-1}^{1} \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos(\theta)d\theta = \sqrt{2}$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por hacer la sustitución correcta hasta obtener integral equivalente es términos de θ.
- (1punto) Por integrar correctamente para obtener resultado.

2. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por lascurvas $y = 1 - x^2$ e $y = -\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)$.

a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.
Solución:

El área de la región $\mathcal{R}$ es:

$$\int_{-1}^{1} \left(1 - x^2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) dx = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi}$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por plantear correctamente la integral.
- (1punto) Por obtener el área.

b) Determine el volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x = -4$.
Solución:

El volumen del sólido descrito es

$$\int_{-1}^{1} 2\pi(x+4)\left(1 - x^2 + \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right) dx = 8\pi\left(\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3}\right)$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por plantear correctamente la integral.
- (1punto) Por obtener el volumen.

Segunda versión.

1. Calcule

a) $\int_0^{\pi/3} \text{sen}^3(z)\cos^2(z)dz$.

Solución:

Observe que

$$\int_0^{\pi/3} \text{sen}^3(z)\cos^2(z)dz = \int_0^{\pi/3} (\cos^2(z) - \cos^4(z))\text{sen}(z)dz.$$

haciendo la sustitución $u = \cos(z)$, obtenemos que

$$\int_0^{\pi/3} (\cos^2(z) - \cos^4(z))\text{sen}(z)dz = -\int_1^{1/2} u^2 - u^4 du = \frac{47}{480}$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por hacer la sustitución correcta hasta obtener integral equivalente es términos de u.
- (1punto) Por integrar correctamente para obtener resultado.

b) $\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}}$

Solución:

Haciendo la sustitución $t = \tan(\theta)$, obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^{3/2}} = \int_0^{\pi/4} \cos(\theta)d\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por hacer la sustitución correcta hasta obtener integral equivalente es términos de θ.
- (1punto) Por integrar correctamente para obtener resultado.

2. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por lascurvas $y = x^2 - 4$ e $y = \cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)$.

a) Determine el área de la región $\mathcal{R}$.
Solución:

El área de la región $\mathcal{R}$ es:

$$\int_{-2}^{2} \left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - x^2 + 4\right) dx = \frac{32}{3} + \frac{8}{\pi}$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por plantear correctamente la integral.
- (1punto) Por obtener el área.

b) Determine el volumen del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno a la recta $x = -5$.
Solución:

El volumen del sólido descrito es

$$\int_{-2}^{2} 2\pi(x+5)\left(\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right) - x^2 + 4\right) dx = 10\pi\left(\frac{8}{\pi} + \frac{32}{3}\right)$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) Por plantear correctamente la integral.
- (1punto) Por obtener el volumen.