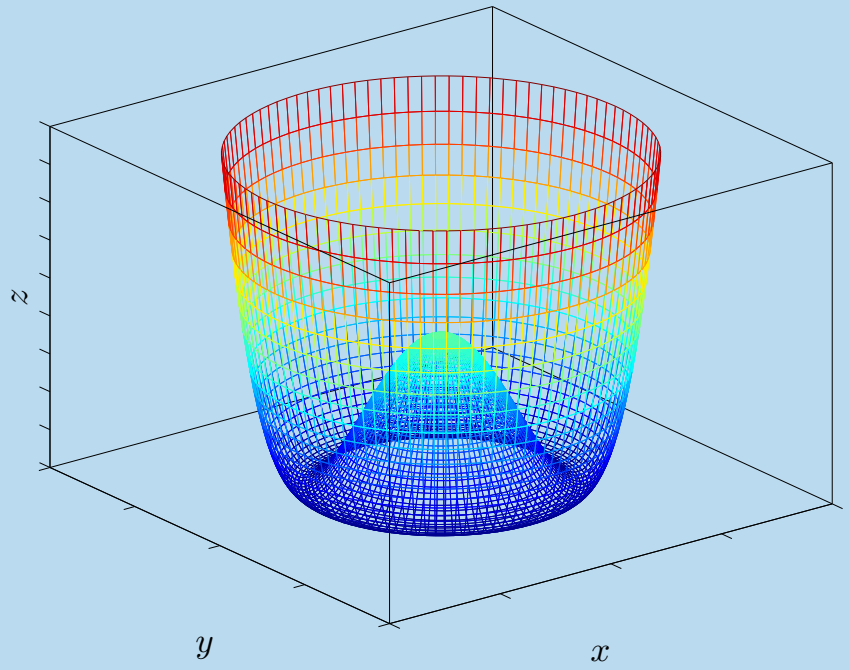
Cálculo

Problemas Resueltos

Sebastián Urrutia Quiroga



Tercera Edición
2017

Imagen de portada: *Potencial tipo Sombrero Mexicano del mecanismo de Higgs*, elaboración propia
Diseño de portada: Daniela Hurtado L. y Sebastián Urrutia Q.

`Primera Edición` – Enero de 2014
`Segunda Edición` – Febrero de 2015
`Tercera Edición` – Abril de 2017
Versión digital
Santiago, Chile

Disponible en línea: `http://www.sgurruti.cl/`

Sebastián Urrutia Quiroga
Contacto: `sgurruti at uc.cl`

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica que acredita al trabajo y a su autor.

Prohibida su Comercialización

This page intentionally left blank

Índice general

Prefacio iv

1. Cálculo diferencial en una variable 1

I. Límite de sucesiones . . . 2

i. Sucesiones, supremo e ideas de límite . . . 2

ii. Límite de sucesiones . . . 6

II. Límite de funciones y continuidad . . . 14

i. Límite de funciones . . . 14

ii. Continuidad . . . 23

III. Derivadas . . . 31

i. Reglas de derivación . . . 31

ii. Derivadas de orden superior, Teoremas de la función inversa e implícita . . . 37

IV. Aplicaciones de la derivada . . . 46

i. Tasas relacionadas, Teorema del valor medio y aproximaciones . . . 46

ii. Máximos y mínimos, gráfico de funciones y otros . . . 56

iii. Regla de L'Hôpital . . . 70

iv. Teorema de Taylor . . . 75

2. Cálculo integral en una variable 83

I. Integral de Riemann . . . 84

i. Propiedades de la integral . . . 84

II. Sumas de Riemann . . . 89
II. Funciones definidas a partir de la integral . . . 98
I. Teorema Fundamental del Cálculo . . . 98
II. Funciones logaritmo y exponencial . . . 106
III. Técnicas de integración . . . 113
I. Teoremas de integración por partes y sustituciones . . . 113
II. Sustituciones trigonométricas, fracciones parciales y otros teoremas . . . 122
IV. Aplicaciones de la integral . . . 131
I. Cálculo de áreas . . . 131
II. Volúmenes por secciones transversales . . . 140
III. Sólidos de revolución . . . 143
IV. Centroide de regiones planas y trabajo . . . 151
V. Longitud de curvas . . . 156
VI. Superficies de revolución . . . 161
VII. Coordenadas polares . . . 167
Apéndice a la sección . . . 176

3. Procesos infinitos **179**
I. Integrales impropias . . . 180
I. Integrales impropias de primer y segundo tipo . . . 180
Apéndice a la sección . . . 189
II. Series . . . 192
I. Series de términos positivos . . . 192
II. Series alternantes . . . 203
III. Series de potencias . . . 208
Apéndice a la sección . . . 225

4. Geometría vectorial **229**
I. Geometría euclidiana en el espacio . . . 230
I. Vectores geométricos . . . 230
II. Productos vectoriales . . . 234
III. Rectas y planos . . . 239
II. Geometría diferencial en el espacio . . . 249

I. Curvas 249

5. Funciones escalares de varias variables **283**

I. Cálculo diferencial en funciones escalares 284

I. Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$ 284

II. Límites 285

III. Continuidad 288

IV. Diferenciabilidad 291

V. Regla de la cadena 303

II. Optimización de funciones escalares 310

I. Máximos y mínimos sin restricciones 310

II. Multiplicadores de Lagrange 320

III. Cálculo integral en funciones escalares 333

I. Integrales dobles 333

II. Cambios de variable 340

III. Aplicaciones de integrales dobles 347

IV. Integrales triples 351

6. Funciones vectoriales de varias variables **360**

I. Cálculo diferencial en funciones vectoriales 361

I. Diferenciabilidad 361

II. Teoremas de la función implícita e inversa 363

II. Cálculo integral en funciones vectoriales 379

I. Integrales de línea 379

II. Teorema de Green 387

III. Integrales de superficie y Teorema de la Divergencia 398

IV. Teorema de Stokes 408

Prefacio

El presente libro corresponde a una recopilación de ejercicios, de fuentes diversas, realizadas durante mi labor como ayudante Docente Corrector, de la Facultad de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Chile, en los cursos de Cálculo I, II y III (MAT1610, MAT1620 y MAT1630, respectivamente). Esta labor fue realizada durante mi estudios de Ingeniería Civil Electricista, como pregrado, y Magister en Física en la misma casa de estudios. En su mayoría, estos problemas se originan en interrogaciones y exámenes disponibles en el repositorio de la Facultad; el resto proviene de mi propia invención y las contribuciones de otros ayudantes. También se han seleccionado algunos problemas de la bibliografía mínima de los cursos en cuestión.

Este libro busca complementar el estudio de esta área tan importante de la matemática. Abarca desde el concepto de sucesiones hasta los teoremas más relevantes del cálculo vectorial. Demás está decir que el presente documento no reemplaza la asistencia a clases y ayudantías, sino solo concentra *problemas tipo* en un único documento de fácil acceso. Cualquier consulta, sugerencia u otro tipo de comentario para mejorar el documento es bienvenido.

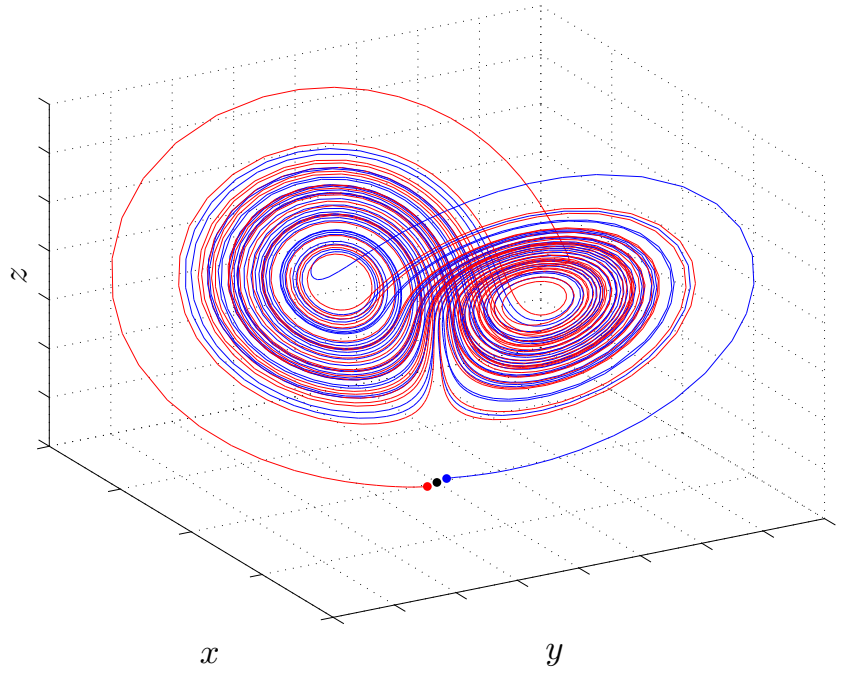
La motivación principal para realizar esta selección y edición de problemas es contribuir al desarrollo de los alumnos. No solo en lo académico –a lo cual está dirigido, obviamente, el presente texto– sino que como personas. Esa es la razón por la que hago docencia, y es el sello que creo darle a mi trabajo. Agradezco a los profesores y autoridades de la Facultad de Matemática UC por permitirme llevar a cabo esta labor, y orientar/corregir la ejecución de la misma. También agradezco a mis amigos, colegas y, sobretodo, a las $4 + 1$ mujeres más importantes de mi vida. Finalmente, pero no menos importante, agradezco a Dios por todo lo que me ha dado.

Sebastián Urrutia Quiroga
ENERO DE 2014

1

Cálculo diferencial en una variable

Atractor de Lorenz (Edward Lorenz, 1963)



Sección I

Límite de sucesiones

I.i. Sucesiones, supremo e ideas de límite

(1) *a*) Sean A y B dos conjuntos, definimos $A+B=\{x+y : x\in A, y\in B\}$, entonces demuestre que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$.

b) Sea $A\subset\mathbb{R}$ un conjunto acotado superiormente y sea $-A=\{-x \mid x\in A\}$. Pruebe que $-A$ es acotado inferiormente y que $\text{ínf}\{-A\}=-\sup\{A\}$.

Solución:

a) Demostraremos la propiedad demostrando dos desigualdades.
Primero $\sup(A+B)\leq\sup(A)+\sup(B)$:
Un elemento de $A+B$ se escribe como $x+y$, y este número es menor que $\sup(A)+\sup(B)$, pues $x\leq\sup(A)$ e $y\leq\sup(B)$. Con ello tenemos que $\sup(A)+\sup(B)$ es una cota superior del conjunto $A+B$. Entonces el $\sup(A+B)$ debe ser menor que $\sup(A)+\sup(B)$. Luego,

$$\sup(A+B)\leq\sup(A)+\sup(B)$$

Segundo $\sup(A+B)\geq\sup(A)+\sup(B)$:
Sabemos que para todo $x\in A$ e $y\in B$, $x+y\leq\sup(A+B)$, es decir para todo $x\in A$ se tiene $x\leq\sup(A+B)-y$, lo que equivale a decir que para todo $y\in B$, se tiene que el real $\sup(A+B)-y$, es cota superior de A. Entonces para todo $y\in B$ se tiene que $\sup(A)\leq\sup(A+B)-y$. Como es para todo $y\in B$, entonces tenemos $y\leq\sup(A+B)-\sup(A)$. Luego $\sup(B)\leq\sup(A+B)-\sup(A)$. Con lo cual se tiene la otra desigualdad.
Así,

$$\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$$

b) Sea $a\in\mathbb{R}$ cota superior de A; es decir, para todo $x\in A$ se tiene que $x\leq a$. Multiplicando por -1 obtenemos que $-a\leq-x$. Recordemos que un elemento $y\in-A$ es de la forma $y=-x$. Es decir, para todo $y\in-A$ tenemos que $-a\leq y$. Por tanto, el conjunto $-A$ es acotado inferiormente y con ello, posee ínfimo $\text{ínf}\{-A\}$. Por otra parte, notemos que dado $\epsilon>0$, existe $x\in A$ tal que

$$\sup\{A\}-\epsilon<x\leq\sup\{A\}$$

De donde,

$$-\sup\{A\}\leq-x<-\sup\{A\}+\epsilon$$

y por lo tanto $\text{ínf}\{-A\}=-\sup\{A\}$.

■

(2) Calcule $\lim_{n\to\infty} \dfrac{3n+1}{6n+1}$ y luego demuéstrelo por definición.

Solución:

Notemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+1}{6n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(3+\frac{1}{n})}{n(6+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{6+\frac{1}{n}} = \frac{3+0}{6+0} = \frac{1}{2}$$

Ahora, debemos demostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}\ (\forall n > n_0 \Rightarrow \left|\frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon)$$

Es decir, dado $\epsilon > 0$, buscamos n_0 tal que cumpla lo pedido. A modo de borrador, tenemos que:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2}\right| < \epsilon \quad &\Rightarrow \quad \left|\frac{6n+2-6n-1}{2(6n+1)}\right| < \epsilon \\
&\Rightarrow \quad \left|\frac{1}{2(6n+1)}\right| < \epsilon \quad \text{como la fracción es positiva,} \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{6n+1} < 2\epsilon \\
&\Rightarrow \quad \frac{1}{2\epsilon} < 6n+1 \\
&\Rightarrow \quad \frac{1-2\epsilon}{12\epsilon} < n
\end{aligned}$$

Recordemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x$. Así, nuestro candidato a n_0 es

$$n_0 = \left\lfloor \frac{1-2\epsilon}{12\epsilon} \right\rfloor$$

Ahora, con nuestro n_0 probamos que:
Sea $n > n_0 = \left\lfloor \dfrac{1-2\epsilon}{12\epsilon} \right\rfloor$. Entonces,

$$\begin{aligned}
n > \frac{1-2\epsilon}{12\epsilon} \quad &\Rightarrow \quad 6n > \frac{1-2\epsilon}{2\epsilon} = \frac{1}{2\epsilon} - 1 \\
&\Rightarrow \quad 6n+1 > \frac{1}{2\epsilon} \\
&\Rightarrow \quad \epsilon > \frac{1}{2(6n+1)} = \frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

y con ello $\epsilon > \left|\frac{3n+1}{6n+1} - \frac{1}{2}\right|$. ■

(3) Demuestre que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

Solución:

Debemos demostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (\forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \epsilon)$$

Lo que es equivalente a demostrar que:

$$\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ (\forall n > n_0 \Rightarrow \left| \frac{1}{n+1} \right| < \epsilon)$$

Sea $\epsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon}$. Ahora, su existencia está asegurada por la propiedad Arquimediana. [1]

Entonces si $n > n_0$ entonces se tiene que:

$$n + 1 > \frac{1-\epsilon}{\epsilon} + 1 = \frac{1}{\epsilon}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{n+1} < \epsilon$$

■

(4) En cada caso, de un ejemplo de una sucesión que satisfaga la condición propuesta y, si no existe tal sucesión, explique.

a) Una sucesión ni creciente ni decreciente que converja a 0.

b) Una sucesión no acotada que converja a -3.

c) Una sucesión divergente a $-\infty$.

Solución:

a) $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$

b) Si es convergente, entonces necesariamente es acotada. Luego, no existe tal sucesión.

c) $b_n = -n^2$

■

(5) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

a) Demuestre que es creciente.

b) Demuestre que la sucesión está acotada superiormente por $\frac{1}{2}$.

c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

[1] **Teorema (Propiedad Arquimediana):** $\forall x > 0 \in \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que $x \cdot n > 1$

Solución:

a) Notemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sqrt{n+1} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - (n+1) - \left(\sqrt{n}\sqrt{n+1} - n\right) \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{n}\sqrt{n+1} \\ &= \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

Entonces, para probar el carácter creciente, debemos probar que la expresión anterior es positiva, o bien

$$\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} > 1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Pero, ya que para $a, b > 0$ se cumple que $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$, esto es equivalente a demostrar que

$$(n+1)(n+2) > \left(1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}\right)^2 = n(n+1) + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1$$

o lo que es lo mismo que

$$2n + 1 > 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Aplicando nuevamente la propiedad anterior, vemos que basta probar que

$$4n^2 + 4n + 1 > 4n(n+1)$$

lo que es evidentemente cierto.

b) Se tiene que

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} = \frac{(n+1-n)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) De lo anterior,

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

■

I.ii. Límite de sucesiones

(1) Demuestre que el límite de una sucesión convergente es único.

Solución:

Para la demostración, primero probaremos el siguiente lema:

Lema: *Una sucesión es convergente a L si y solo si la distancia entre los valores de la misma y L converge a cero.*
Dem: Si una sucesión a_n converge a L, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}(n > n_0 \longrightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

O lo que es equivalente,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}(n > n_0 \longrightarrow ||a_n - L| - 0| < \varepsilon)$$

es decir, que la sucesión definida como $b_n = |a_n - L|$ converge a cero.

Ahora, supongamos que existen $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$ tales que $a_n \to L_1, a_n \to L_2$ distintos entre si. Notemos que, por la desigualdad triangular:

$$0 \leq |L_1 - L_2| \leq |L_1 - a_n| + |a_n - L_2|$$

Con $n \to \infty$ obtenemos que $|L_1 - L_2| = 0$ y con ello $L_1 = L_2$, lo que contradice la hipótesis inicial. Por lo tanto, el límite es único. ■

(2) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2}$$

Solución:

Notemos que $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n + k \geq n$, si $k = 0 \ldots n$. Por tanto, $\frac{1}{n} \geq \frac{1}{n+k}$. Dado que ambos términos son positivo, la desigualdad se mantiene al elevar al cuadrado ambos lados. Así,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(n+k)^2}}_{\leq \frac{1}{n^2}} + \frac{1}{(n+n)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n}$$

Por otra parte, notemos que de manera análoga se puede concluir que $n + n \geq n + k$, y con ello se cumple que $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k}$. Igual que en el caso anterior, la desigualdad se mantiene al elevar al cuadrado:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{(n+k)^2}}_{\geq \frac{1}{(2n)^2}} + \frac{1}{(n+n)^2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4n}$$

Por tanto, por el *Teorema del Sandwich* y dado que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{4n} = 0$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n+k)^2} = 0$$

■

(3) Calcule los límites de las sucesiones cuyos términos $n-$ésimos son:

- $\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$ $\boxed{R=0}$
- $\dfrac{\sqrt{n^2+1}}{2n-1}$ $\boxed{R=\dfrac{1}{2}}$
- $\left(\dfrac{n^2+5}{n^2+1}\right)^{n^2+4}$ $\boxed{R=e^4}$
- $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ $\boxed{R=0}$
- $\dfrac{\sin n}{n}$ $\boxed{R=0}$
- $\dfrac{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^4}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^3}$ $\boxed{R=\dfrac{4}{3}}$
- $\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$ $\boxed{R=1}$

(4) Calcule

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^2-3n}{n^2-2n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n-1}{3^n+1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} [a_n]$, donde $\{a_n\}$ es la sucesión definida por $a_n = \dfrac{2n+1}{n+3}$

Solución:

a) Se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2-3n}{n^2-2n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(4-\frac{3}{n})}{n^2(1-\frac{2}{n})} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{4-\frac{3}{n}}{1-\frac{2}{n}} \\ &= \frac{4-0}{1-0} \\ &= 4\end{aligned}$$

b) Tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{2^n-1}{3^n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n(1+(\frac{1}{2})^n)}{3^n(1+(\frac{1}{3})^n)} \\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{1+(\frac{1}{2})^n}{1+(\frac{1}{3})^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)^n}_{\to 0} \underbrace{\frac{1+(\frac{1}{2})^n}{1+(\frac{1}{3})^n}}_{\to 1} \\ &= 0\end{aligned}$$

c) Dado que

$$\frac{2n+1}{n+3} = 2 - \frac{5}{n+3}$$

y como $0 < \dfrac{5}{n+3} < 1$ para $n > 2$, entonces:

$$\left[\frac{2n+1}{n+3}\right] \leq 1$$

Además,

$$\left[\frac{2n+1}{n+3}\right] \geq \frac{2n+1}{n+3} - 1 = \frac{n-2}{n+3}$$

Luego,

$$\frac{n-2}{n+3} \leq \left[\frac{2n+1}{n+3}\right] \leq 1, \qquad \forall n > 2$$

Finalmente, por el Teorema del Sandwich,

$$\lim_{n\to\infty} [a_n] = 1$$

■

(5) *a*) Sea $\{a_n\}$ una sucesión definida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_1 &= 3 \\ a_n &= 2 - \frac{1}{a_{n-1}} \end{aligned}$$

Demuestre que dicha sucesión es convergente y calcule $\lim_{n\to\infty} a_n$.

b) Si $a_1 = 4$ y $a_{n+1} = \dfrac{6a_n + 6}{a_n + 11}$, demostrar que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y calcular su límite.

Solución:

a) Tenemos que $a_1 = 3$, $a_2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3} < a_1$. Probemos que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente y acotada inferiormente.

- Trataremos de probar, vía inducción, que 1 es una cota inferior de nuestra sucesión. Notemos que $a_1 = 3 > 1$. Supongamos que $a_n > 1$. Ahora bien,

$$\begin{aligned} a_n > 1 \qquad &\Rightarrow \frac{1}{a_n} < 1 \\ &\Rightarrow 2 - \frac{1}{a_n} > 2 - 1 \\ &\Rightarrow a_{n+1} > 1 \end{aligned}$$

y, por tanto, 1 es una cota inferior de la sucesión.

- Ahora, probaremos por inducción que $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente. Por lo antes calculado, evidenciemos que $a_1 > a_2$. Tomemos como hipótesis de inducción que $a_n < a_{n-1}$. Ahora,

$$\begin{aligned} a_n < a_{n-1} \qquad &\Leftrightarrow \frac{1}{a_{n-1}} < \frac{1}{a_n} \\ &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{a_{n-1}} > 2 - \frac{1}{a_n} \\ &\Leftrightarrow a_n > a_{n+1} \end{aligned}$$

y con ello se concluye que es decreciente.

- Por teorema, como la sucesión es acotada inferiormente y decreciente, tiene límite. Notemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1} = L$. Ahora, tomando el límite de la igualdad $a_n = 2 - \frac{1}{a_{n-1}}$, se tiene que:

$$\begin{aligned} L = 2 - \frac{1}{L} \qquad &\Leftrightarrow L^2 - 2L + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow (L-1)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow L = 1 \end{aligned}$$

Así, $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.

b) Igualmente que en el ejercicio anterior, debemos probar que la sucesión es monótona y acotada.

- Tenemos que $a_1 = 4 > 0$. Ahora, nuestra hipótesis de inducción es que $a_n > 0$. Luego,

$$\begin{array}{rcl} \text{Si } a_n > 0 & \to & 6(a_n+1) > 6 > 0 \\ \text{Si } a_n > 0 & \to & a_n + 11 > 11 > 0 \\ & \therefore & a_{n+1} > 0 \end{array}$$

Así, la sucesión es <u>acotada inferiormente</u>.

- Notemos que $a_1 = 4 > a_2 = \frac{24+6}{4+11} = 2$. Nuestra H.I. es que $a_n < a_{n-1}$. Así,

$$a_{n+1} = \frac{6a_n + 6}{a_n + 11} = 6\left(1 - \frac{10}{a_n + 11}\right)$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcccc} a_n < a_{n-1} \Leftrightarrow & a_n + 11 & < & a_{n-1} + 11 \\ \Leftrightarrow & \frac{10}{a_n+11} & > & \frac{10}{a_{n-1}+11} \\ \Leftrightarrow & -\frac{10}{a_n+11} & < & -\frac{10}{a_{n-1}+11} \\ \Leftrightarrow & 1 - \frac{10}{a_n+11} & < & 1 - \frac{10}{a_{n-1}+11} \\ \Leftrightarrow & 6\left(1 - \frac{10}{a_n+11}\right) & < & 6\left(1 - \frac{10}{a_{n-1}+11}\right) \\ \Leftrightarrow & a_{n+1} & < & a_n \end{array}$$

Así, la sucesión es <u>decreciente</u>. Por tanto,

$$\text{acotada } + \text{ monótona } \Rightarrow \text{ convergente}$$

- Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$. Así, reemplazando,

$$L^2 + 5L - 6 = 0 \quad \longrightarrow \quad L = 1 \ \vee \ L = -6$$

Por unicidad del límite, éste debe corresponder a uno de los valores anteriores. Pues bien, dado que la sucesión es siempre mayor que cero, por tanto el límite debe ser igualmente positivo. Así,

$$L = 1$$

■

(6) *a*) Determine $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$, $a > 1$

b) Igual que en el ejercicio anterior, pero con $x_n = \frac{n+1}{n}$

Solución:

a) Sea $x_n = \frac{a^n}{n!}$. Notemos que:

$$\frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \frac{a}{n+1}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n+1} = 0 < 1$$

y por propiedad de sucesiones, $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

b) Notemos que:

$$\frac{\frac{n+1+1}{(n+1)}}{\frac{n+1}{n}} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = 1$$

y en este caso la propiedad no aplica. Evidentemente, es más fácil realizar el cálculo directo:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$$

Esto nos muestra que la propiedad utilizada anteriormente no sirve para el cálculo de límites de todo tipo de sucesiones.

■

(7) Determine:

a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + \pi^n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p + 2^p + \cdots + n^p}$, con $p \in \mathbb{N}$ fijo.

c) $\lim_{n\to\infty} a_n$, con

$$a_1 = 0.9,\ a_2 = 0.99, \cdots\ a_n = 0.9999\ldots$$

Solución:

a) Inicialmente,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + \pi^n} = \lim_{n\to\infty} \pi \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + 1} = \pi \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{e}{\pi}\right)^n + 1}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} 0 < e < \pi \implies & 0 < \left(\frac{e}{\pi}\right) < 1 \\ \implies & 0 < \left(\frac{e}{\pi}\right)^n < 1 \\ \implies & 1 < 1 + \left(\frac{e}{\pi}\right)^n < 2 < n \quad \text{para } n > 2 \\ \implies & 1 < \sqrt[n]{1 + \left(\frac{e}{\pi}\right)^n} < \sqrt[n]{n} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{e^n + \pi^n} = \pi$$

b) Dado que $\forall p \in \mathbb{N}$ se cumple que $1^p < k^p < n^p$, con $k = 1, \cdots, n$, entonces es claro que:

$$\begin{aligned} \underbrace{1^p + 1^p + \cdots + 1^p}_{n-veces} < \quad & 1^p + 2^p + \cdots + n^p < \underbrace{n^p + n^p + \cdots + n^p}_{n-veces} \\ n \cdot 1^p < \quad & 1^p + 2^p + \cdots + n^p < n \cdot n^p \\ \sqrt[n]{n} < & \sqrt[n]{1^p + 2^p + \cdots + n^p} < \sqrt[n]{n^{p+1}} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^{p+1} \end{aligned}$$

Como los extremos tienden a 1 cuando $n \to \infty$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1^p + 2^p + \cdots + n^p} = 1$$

c) Analicemos nuestra sucesión:

$$\begin{aligned} a_1 = 0.9 \quad &= \quad \frac{9}{10} \quad = \quad \frac{9}{10} \\ a_2 = 0.99 \quad &= \quad \frac{99}{100} \quad = \quad \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} \\ a_n = 0.999\ldots \; &= \frac{999\ldots}{1000\ldots} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = 9 \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{10}\right)^k = 9 \left[\frac{1}{10}\left(\frac{1 - \frac{1}{10^n}}{1 - \frac{1}{10}}\right)\right] = 1 - \frac{1}{10^n}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1 - \frac{1}{10^n} = 1$$

Note que, aunque la sucesión consiste en agregar nueves luego de la coma, ésta converge a uno.

■

(8) Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida por $a_n = \sqrt{n} \cdot \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

a) Demuestre que es creciente.

b) Demuestre que la sucesión está acotada superiormente por $\dfrac{1}{2}$.

c) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Solución:

a) Notemos que

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\sqrt{n+1} - \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - (n+1) - \left(\sqrt{n}\sqrt{n+1} - n\right) \\ &= \sqrt{n+1}\sqrt{n+2} - 1 - \sqrt{n}\sqrt{n+1} \\ &= \sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}\right) - 1 \end{aligned}$$

Entonces, para probar el carácter creciente, debemos probar que la expresión anterior es positiva, o bien

$$\sqrt{n+1}\sqrt{n+2} > 1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Pero, ya que para $a, b > 0$ se cumple que $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$, esto es equivalente a demostrar que

$$(n+1)(n+2) > \left(1 + \sqrt{n}\sqrt{n+1}\right)^2 = n(n+1) + 2\sqrt{n}\sqrt{n+1} + 1$$

o lo que es lo mismo que

$$2n + 1 > 2\sqrt{n}\sqrt{n+1}$$

Aplicando nuevamente la propiedad anterior, vemos que basta probar que

$$4n^2 + 4n + 1 > 4n(n+1)$$

lo que es evidentemente cierto.

b) Se tiene que:

$$\begin{aligned} a_n &= \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\sqrt{n} = \frac{(n+1-n)\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \\ &= \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

c) De lo anterior,

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}$$

Así,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

■

Sección II

Límite de funciones y continuidad

II.i. Límite de funciones

(1) *a*) Demuestre $\lim_{x\to a} x^2 = a^2$, $a > 0$.

b) Dado el límite $\lim_{x\to 3}(2x-5) = 1$, encontrar δ tal que $|(2x-5)-1| < 0.01$ siempre que $0 < |x-3| < \delta$.

Solución:

a) Por demostrar:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } (0 < |x-a| < \delta \Rightarrow \left|x^2 - a^2\right| < \epsilon)$$

Dado $\epsilon > 0$, debemos encontrar $\delta > 0$ tal que $(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |x^2 - a^2| < \epsilon)$.

$$\left|x^2 - a^2\right| = |(x-a)(x+a)| = (x+a)\,|x-a| < \epsilon$$

$$\text{Pero,} \quad |x-a| < \delta \longrightarrow (x+a)|x-a| < \delta(x+a) < \underbrace{\delta(\delta + a + a)}_{\text{dado que la función es creciente}} < \epsilon$$

Así,

$$\delta(\delta + 2a) < \epsilon$$

Con ello, hemos hallado un $\delta(\epsilon)$ tal que cumple con lo pedido.

b) Observemos que:

$$|(2x-5)-1| = |2x-6| = 2|x-3| < 0.01$$

Además, por enunciado es claro que:

$$0 < |x-3| < \delta \longrightarrow 0 < 2|x-3| < 2\delta$$

Así, basta tomar $2\delta = 0.01$ para mantener las desigualdades. Finalmente, $\delta = 0.005$.

■

(2) Demuestre que

$$\lim_{x\to 3} \frac{2}{x+3} = \frac{1}{3}$$

Solución:

Dado un $\epsilon > 0$ arbitrario, debemos hallar un $\delta > 0$ que permita asegurar que:

$$0 < |x-3| < \delta \quad \longrightarrow \quad \left| f(x) - \frac{1}{3} \right| < \epsilon$$

Si trabajamos en la última implicancia,

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \frac{1}{3} \right| < \epsilon \quad &\leftrightarrow \quad \left| \frac{2}{x+3} - \frac{1}{3} \right| < \epsilon \\ &\leftrightarrow \quad \left| \frac{3-x}{3(x+3)} \right| < \epsilon \\ &\leftrightarrow \quad \left| \frac{(-1)(x-3)}{3(x+3)} \right| < \epsilon \\ &\leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\frac{|x-3|}{|x+3|} < \epsilon \end{aligned}$$

Arbitrariamente elijamos que $\delta \leq 1$. Esta es una suposición válida pues, en general, una vez que se encuentra un valor de δ que cumple los requerimientos, cualquier valor más pequeño también lo hace. Ahora,

$$\begin{aligned} |x-3| < \delta \quad &\rightarrow \quad |x-3| < 1 \\ &\rightarrow \quad -1 < x-3 < 1 \\ &\rightarrow \quad 2 < x < 4 \\ &\rightarrow \quad 5 < x+3 < 7 \end{aligned}$$

De lo anterior es posible concluir que $5 < |x+3| < 7$, y con ello:

$$\frac{1}{|x+3|} < \frac{1}{5}$$

Por tanto,

$$\frac{1}{3}\frac{|x-3|}{|x+3|} < \frac{|x-3|}{15} < \frac{\delta}{15}$$

Como deseamos que esta última expresión sea menor que ϵ, entonces imponemos que $\delta < 15\epsilon$. Para que este requerimiento se satisfaga de manera concurrente con el hecho de que $\delta \leq 1$,

$$\delta = \text{mín}\,\{1, 15\epsilon\}$$

■

(3) Demuestre que $\lim_{x\to 0} f(x) = \nexists$, si $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$

Solución:

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números racionales tales que $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

Ahora, sea $\{b_n\}$ una sucesión de números irracionales tales que $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} f(b_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$$

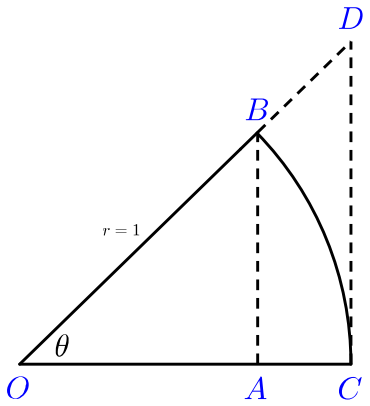
Como ambos límites son distintos, por el *Teorema de enlace entre límites de funciones y sucesiones*[2], dicho límite no existe. ■

(4) Demuestre que

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

Solución:

Consideremos el siguiente diagrama de una circunferencia de radio 1:



El área total de un circulo unitario es π, por lo que el área del sector circular COB es

$$A_{COB} = \frac{\theta}{2}$$

Notemos que el $\triangle AOB$ es rectángulo en el vértice A, con hipotenusa igual a 1. Así, los lados $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$ miden $\cos\theta$ y $\sin\theta$, respectivamente. Con ello, el área del triángulo vienen dada por:

$$A_{\triangle AOB} = \frac{\cos\theta\sin\theta}{2}$$

[2]**Teorema:** $\lim_{x\to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}, \lim_{n\to\infty} x_n = a$ se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = L$

Finalmente, el $\triangle COD$ es rectángulo en el vértice C, con el cateto adyacente al ángulo θ igual a 1. Así, el lado $\overline{DC}$ mide $\tan\theta$. Por tanto,

$$A_{\triangle COD} = \frac{\tan\theta}{2}$$

Mediante simple comparación,

$$A_{\triangle AOB} < A_{COB} < A_{\triangle COD} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\cos\theta\sin\theta}{2} < \frac{\theta}{2} < \frac{\tan\theta}{2}$$

Así,

$$\cos\theta < \frac{\theta}{\sin\theta} < \frac{1}{\cos\theta} \qquad \longrightarrow \qquad \cos\theta < \frac{\sin\theta}{\theta} < \frac{1}{\cos\theta}$$

Por el Teorema del Sandwich, como

$$\lim_{\theta\to 0}\cos\theta = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\cos\theta} = 1$$

concluimos que:

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

■

(5) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)}$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{[x]}{x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x^3+3x-4}$

d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\tan(x-1)}{x^3+x-2}$

Solución:

a) Se tiene que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)} &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)}\left(\frac{1+\sin(x)}{1+\sin(x)}\right)\\ &= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{\cos^2(x)}\left(\frac{1+\sin(x)}{1}\right)\end{aligned}$$

Es claro que $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(1+\sin(x)) = 2$.

Ahora, sea $u = \cos^2(x)$. Si $x \to \frac{\pi}{2}$, entonces $u \to 0$. Así, $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin(u)}{u} = 1$.

Por tanto,

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\cos^2(x)\right)}{1-\sin(x)} = 2$$

b) Sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}$, se cumple que $x-1 \leq \left[x\right] \leq x$:

$$\begin{aligned} x-1 \leq \left[x\right] &\leq x \\ \frac{x-1}{x} \leq &\frac{\left[x\right]}{x} \leq 1 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x\to\infty} 1 = 1$ y $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x} = 1$, entonces por el *Teorema del Sandwich*, tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\left[x\right]}{x} = 1$$

c) Racionalizando,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x^3+3x-4} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2x}-\sqrt{x+1}}{x^3+3x-4}\left(\frac{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x}+\sqrt{x+1}}\right) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{(x-1)(x^2+x+4)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x^2+x+4)(\sqrt{2x}+\sqrt{x+1})} \\ &= \frac{1}{12\sqrt{2}} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 1} \frac{\tan(x-1)}{x^3+x-2} &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{\cos(x-1)}\left(\frac{1}{(x-1)(x^2+x+2)}\right) \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{\sin(x-1)}{x-1}\left(\frac{1}{(\cos(x-1))(x^2+x+2)}\right) \\ &= 1\cdot\frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

■

(6) Hallar los valores del parámetro k para los cuales existe $\lim_{x\to 0} f(x)$ si:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{1-\cos(k\cdot x)}{x^2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Solución:

Para que exista $\lim_{x\to 0} f(x)$ deben existir los límites laterales

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0-} f(x)$$

Notemos que, para $x < 0$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(k\cdot x)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(k\cdot x)}{(kx)^2} k^2 \\
&= \frac{k^2}{2}
\end{aligned}$$

Por otra parte, para $x > 0$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{\sqrt{x+1}-1} \left(\frac{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{x+1-1}\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}^2+\sqrt[3]{x+1}+1}\right) \\
&= \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} f(x)$ existe si y solo si:

$$\frac{k^2}{2} = \frac{2}{3} \quad \Leftrightarrow \quad k = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

■

(7) Determine si el siguiente límite existe. Calcularlo en caso afirmativo y justificar su respuesta en caso negativo.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin|x|}$$

Solución:

Consideremos los límites laterales:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin|x|} &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{1-(x+1)}{(1+\sqrt{x+1})\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{(1+\sqrt{x+1})\sin(x)} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin|x|} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-\sqrt{x+1}}{\sin(-x)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{1-(x+1)}{-(1+\sqrt{x+1})\sin(x)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{(1+\sqrt{x+1})\sin(x)} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

pues el seno es una función impar, i.e. $\sin(-x) = -\sin(x)$ para todo x real. Por tanto, como los límites laterales son distintos, el límite global **no existe**. ■

(8) El concepto de límites también es útil para analizar el comportamiento de las funciones, tanto en sus puntos de indefinición como en grandes valores del dominio. Estudie dichos elementos en las siguientes funciones:

a) $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2+2x-8}$

b) $g(t) = \dfrac{t^2+1}{\sqrt{t^2-1}}$

c) $h(x) = x - \sqrt{x^2-4}$

Solución:

a) Lo primero que debemos notar es que nuestra función puede escribirse como sigue:

$$f(x) = \frac{x(x+2)(x-1)}{(x+4)(x-2)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

Por tanto, los límites a calcular son los siguientes:

- $\lim\limits_{x\to -4} f(x)$
  En este caso, $p(-4) = -40,\ q(-4) = 0$ y por lo tanto, dado que el denominador se hace cada vez más pequeño en comparación con el numerador mientras $x \to -4$, es claro que la función diverge. Ahondemos un poco más:

Sea $\delta > 0$. Así, $p(-4+\delta) = p(-4-\delta) < 0$. Por otra parte, $q(-4-\delta) < 0$ y $q(-4+\delta) > 0$. Por tanto se cumple que:

$$\lim_{x\to -4-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -4+} f(x) = \infty$$

Decimos entonces que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = -4$.

- $\lim_{x\to 2} f(x)$
  Igual que en el caso anterior, el límite no tiene posibilidades de existir dado que $p(2) = 8,\ q(2) = 0$. De igual manera, tomando $\delta > 0$ se cumple que $p(2+\delta) = p(2-\delta) > 0$ y $q(2+\delta) > 0,\ q(2-\delta) < 0$ y con ello:

$$\lim_{x\to 2-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 2+} f(x) = \infty$$

  Decimos entonces que $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x = 2$.

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$
  Es fácil reconocer, ya sea utilizando el grado de los polinomios u otro argumento similar, que la función f diverge cuando $x \to \pm\infty$. Lo interesante es saber cómo diverge, i.e. si tiene alguna similitud con alguna otra función particular. Aplicando división de polinomios, podemos reescribir nuestra función f de un modo ligeramente diferente:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+2x-8)+4(x-2)}{x^2+2x-8} = x - 1 + \frac{4(x-2)}{x^2+2x-8}$$

  Notemos que $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{4(x-2)}{x^2+2x-8} = 0$, por lo para valores lo suficientemente grandes o pequeños de x, nuestra función tendrá cada vez más un comportamiento similar a la recta $x - 1$.

  Ahora, este hecho se sistematiza al introducir el concepto de asíntotas horizontales y oblicuas, definidas como:

$$m_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad m_- = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$$
$$n_+ = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_+ x \qquad n_- = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_- x$$

  Es fácil comprobar que:

$$m_+ = m_- = 1 \qquad n_+ = n_- = -1$$

  Decimos entonces que la recta $y = x - 1$ es una asíntota oblicua a $f(x)$ en $\pm\infty$.

b) Primero que todo, debemos entender que el dominio de la función es $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

- $\lim_{t\to -1} g(t)$
  En este caso, el numerador tiende a un número fijo distinto de cero (dos) mientras que el denominador se acerca al valor nulo. Por tanto, $g(t)$ diverge en $x = -1$. Dado que tanto el polinomio $t^2 + 1$ como la raíz $\sqrt{t^2-1}$ son positivas, podemos concluir que:

$$\lim_{t\to -1} g(t) = \infty$$

Decimos entonces que $g(t)$ tiene una asíntota vertical en $t = -1$.

- $\lim_{t\to 1} g(t)$
  Igual que en el caso anterior, la función diverge en $t = 1$ por los mismos motivos que en la anterior discontinuidad. De igual manera,

$$\lim_{t\to 1} g(t) = \infty$$

  Decimos entonces que $g(t)$ tiene una asíntota vertical en $t = 1$.

- $\lim_{t\to\pm\infty} g(t)$
  Notemos que: $\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = 1$ y con ello $\lim_{t\to\infty} g(t) - t = 0$. Decimos entonces que la recta $y = t$ es una asíntota oblicua a $g(t)$ en ∞.
  De manera análoga, $\lim_{t\to-\infty} \frac{g(t)}{t} = -1$ y con ello $\lim_{t\to-\infty} g(t) + t = 0$. Decimos entonces que la recta $y = -t$ es una asíntota oblicua a $g(t)$ en $-\infty$.

c) En este caso la función tiene como dominio $(-\infty, -2] \cup [2, \infty)$, pero no posee discontinuidades. Así, solo basta analizar el comportamiento en $\pm\infty$.

$$m_+ = \lim_{x\to\infty} \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x^2-4)}{x(x+\sqrt{x^2-4})} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x(x+\sqrt{x^2-4})} = 0$$

$$n_+ = \lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x^2-4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - (x^2-4)}{x+\sqrt{x^2-4}} = \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x+\sqrt{x^2-4}} = 0$$

Decimos entonces que la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal a $h(x)$ en ∞. Finalmente,

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x - \sqrt{x^2-4}}{x} = m_-$$

Sea $u = -x$, y con ello si $x \to -\infty$, $u \to \infty$. Así,

$$m_- = \lim_{u\to\infty} \frac{-u - \sqrt{u^2-4}}{-u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u + \sqrt{u^2-4}}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{u + u\sqrt{1-4/u^2}}{u} = 2$$

$$n_- = \lim_{x\to-\infty} h(x) - 2\cdot x = \lim_{x\to-\infty} -x - \sqrt{x^2-4} = \lim_{u\to\infty} u - \sqrt{u^2-4} = 0$$

Decimos entonces que la recta $y = 2x$ es una asíntota horizontal a $h(x)$ en $-\infty$.

■

II.ii. Continuidad

(1) Estudie la continuidad de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} & , \text{ si } x > 0 \\ \dfrac{(1-\cos(x))(x^3+4x^2)}{x^4} & , \text{ si } x < 0 \\ 2 & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

Notemos que, para $x < 0$, la función es continua en todo el intervalo $(0, \infty)$. Por otra parte, para $x > 0$, igualmente es continua en todo el intervalo $(-\infty, 0)$. Por tanto, basta analizar únicamente el punto $x = 0$.

Recordemos que una función f se dice continua en $x = a$ si:

- $x = a \in \text{Dom}(f)$
- $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x)$
- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

En primer lugar, calculemos los límites laterales:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0+} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}}\right) \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{(2x+1)-(x+1)} \cdot \left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1}\right) \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}}_{=1} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} (\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+1})}_{=2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(1-\cos(x))(x^2(x+4))}{x^4} \\ &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right) \cdot (x+4) \\ &= \underbrace{\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}}_{=\frac{1}{2}} \cdot \underbrace{\lim_{x\to 0} x+4}_{=4} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Por tanto, como los límites laterales son iguales entre sí e iguales a la función evaluada en el punto, f es continua en $x = 0$. Entonces, $f(x)$ es continua en todo $\mathbb{R}$. ■

(2) Determine las constantes $A, B \in \mathbb{R}$ tales que la siguiente función sea continua en toda la recta real:

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin(x) & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ A\sin(x) + B & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 3\cos^2(x) & \text{si } x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Solución:

La función definida a tramos presenta una combinación de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$. Por tanto, basta analizar los puntos en donde se produce el cambio en la definición de la función:

- Continuidad en $x = -\frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} -2\sin(x) = 2 \\ \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \to -\frac{\pi}{2}} A\sin(x) + B = B - A = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{aligned}$$

  Por tanto, $\underbrace{B - A = 2}_{(1)}$

- Continuidad en $x = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} f(x) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} A\sin(x) + B = A + B = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} f(x) &= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} 3\cos^2(x) = 0 \end{aligned}$$

  y con ello, $\underbrace{B + A = 0}_{(2)}$

Finalmente, por (1) y (2), la función será continua en toda la recta real si

$$A = -1 \qquad \text{y} \qquad B = 1$$

■

(3) Determine los valores de a, b, c para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos(3x)}{1 - \cos(5x)} & , \text{si } x < 0 \\ a & , \text{si } x = 0 \\ \dfrac{x^2 + bx + c}{x} & , \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sea continua en $x = 0$.

Solución:

Notemos que la función posee infinitas discontinuidades, en aquellos puntos x_0 donde $1-\cos(5x_0) = 0$. En este caso, eso no influye en nuestro problema, puesto que se nos pide analizar un único punto.

Para la continuidad en $x = 0$ debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0-} f(x) = f(0)$$

Es claro que,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0-} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{1-\cos(5x)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{1-\cos(3x)}{(3x)^2}}{\dfrac{1-\cos(5x)}{(5x)^2}} \frac{(3x)^2}{(5x)^2} \\
&= \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{9}{25} \\
&= \frac{9}{25}
\end{aligned}$$

Por tanto, como $f(0) = a$ se cumple que:

$$a = \frac{9}{25}$$

Ahora, f es continua en dicho punto si

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2+bx+c}{x} = \frac{9}{25}$$

Así,

Como se trata de una forma indeterminada $(\frac{0}{0})$, para que el límite anterior exista se requiere que el numerador se haga cero cuando $x = 0$. Esto se logra dividiendo los polinomios:

$$(x^2+bx+c) = (x+b)\cdot x + c$$

Como el resto es c, y deseamos que el polinomio inicial sea divisible por x (para que podamos simplificar), debe cumplirse que:

$$c = 0$$

Lo anterior asegura que $x^2+bx+c = x\cdot q(x)$, con $q(x) = x+b$. Por tanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{x^2+bx+c}{x} &= \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot q(x)}{x} \\
&= q(0) = b
\end{aligned}$$

Finalmente, juntando nuestros resultados,

$$b = \frac{9}{25}$$

■

(4) *a*) Si f y g son funciones continuas en $[a, b]$ tales que $f(a) > g(a)$ y $f(b) < g(b)$, pruebe que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

b) Demuestre que si f es continua en $[a, b]$ tal que $a \leq f(a)$ y $f(b) \leq b$, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

c) Demuestre que el polinomio $p(x) = x^3 + 3x^2 - 1$ tiene tres raíces reales.

Solución:

a) Definamos la función $h(x) = f(x) - g(x)$. Notemos que nuestra nueva función es continua en el intervalo $[a, b]$ puesto que corresponde a una resta de funciones continuas. Por otra parte, notemos que:

$$h(a) = f(a) - g(a) > 0 \quad \text{, y también} \quad h(b) = f(b) - g(b) < 0$$

Entonces, por Teorema del Valor Intermedio, existe $c \in [a, b]$ tal que $h(c) = 0$, es decir, $f(c) - g(c) = 0$ y, por tanto,

$$f(c) = g(c)$$

b) Definamos la función auxiliar $g(x) = f(x) - x$. Notemos que dicha función es continua en el intervalo $[a, b]$ puesto que corresponde a una resta de funciones continuas. Así:

$$g(a) = f(a) - a > 0 \quad \text{, y también} \quad g(b) = f(b) - b < 0$$

Entonces, por Teorema del Valor Intermedio, existe c $\in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, es decir, $f(c) - c = 0$ y, por tanto,

$$f(c) = c$$

c) Tenemos que $p(0) = -1 < 0$ y que $p(1) = 3 > 0$. Como $p(x)$ en continua en el intervalo $[0, 1]$ por ser un polinomio, por el T.V.I. existe $c \in [0, 1]$ tal que $p(c) = 0$.

Por otro lado, $p(-1) = 1 > 0$. Entonces, nuevamente por el T.V.I. existe $d \in [-1, 0]$ tal que $p(d) = 0$.

Como $p(x)$ es de grado tres solo puede tener una o tres raíces reales, pero como ya hallamos dos de ellas, $p(x)$ debe tener tres raíces reales.

■

(5) Analice la continuidad en $\mathbb{R}$ de la función:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}$$

Solución:

Como $\lim_{n\to\infty} x^{2n}$ es cero, uno o infinito, según sea $|x|<1$, $|x|=1$ o $|x|>1$ separaremos por casos:

- Si $|x|<1$ tenemos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$$

- Si $|x|>1$ tenemos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{x^{2n}}}{1+\frac{1}{x^{2n}}} = \frac{1-0}{1+0} = 1$$

- Si $|x|=1$ tenemos:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \frac{1-1}{1+1} = 0$$

Por tanto, la función en cuestión puede escribirse de la siguiente manera:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } |x|<1 \\ 1 & \text{si } |x|>1 \\ 0 & \text{si } |x|=1 \end{cases}$$

Entonces f presenta discontinuidades irreparables en $x=\pm 1$. En todos los demás puntos, es continua. ■

(6) *a*) Sea $n\in\mathbb{Z}$. Calcule $\lim_{x\to n} \sqrt{x-[x]}+[x]$. ¿Qué puede decir de la continuidad de $f(x)=\sqrt{x-[x]}+[x]$ en $\mathbb{R}$?

b) Demuestre que si $\lim_{x\to a} f(x)$ existe, entonces $\lim_{x\to a} |f(x)|$ también existe. ¿Es verdadero, en general, el recíproco (o sea, si $\lim_{x\to a}|f(x)|$ existe, entonces $\lim_{x\to a} f(x)$ existe)?

Solución:

a) Mostraremos que los límites laterales son iguales a n. Si $n-1\le x<n$, tenemos que $[x]=n-1$. Por tanto, $\sqrt{x-[x]}+[x] = \sqrt{x-(n-1)}+(n-1)$. Por la continuidad de la función raíz cuadrada, se cumple que

$$\lim_{x\to n^-} \sqrt{x-[x]}+[x] = n$$

Por otro lado, si $n \leq x < n+1$, $[x] = n$. Así, $\sqrt{x-[x]} + [x] = \sqrt{x-n} + n$. Por el mismo argumento que en el apartado anterior,

$$\lim_{x \to n^+} \sqrt{x-[x]} + [x] = n$$

Como los límites laterales existen y son iguales entre sí, concluimos que

$$\lim_{x \to n} \sqrt{x-[x]} + [x] = n$$

Para estudiar la continuidad de f, supongamos que $a \in \mathbb{R}$ y separemos por casos:

- $a \in \mathbb{Z}$
  Por lo hecho anteriormente, $\lim_{x \to a} f(x) = a = \sqrt{a-[a]} + a = f(a)$ y por lo tanto es continua en los enteros.

- $a \notin \mathbb{Z}$
  La función está bien definida en $x = a$, puesto que $[a] < a$. Tenemos que $[a] < a < [a]+1$; si x es tal que $[a] < x < [a]+1$, se tiene que

  $$\sqrt{x-[x]} + [x] = \sqrt{x-[a]} + [a]$$

  Utilizando la continuidad de la raíz cuadrada, se cumple que:

  $$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \sqrt{x-[a]} + [a] = \sqrt{a-[a]} + [a] = f(a)$$

  Por lo tanto, f es continua $x = a$.

Luego, f es continua en $\mathbb{R}$.

b) Recordemos la desigualdad triangular reversa: Si a, b son números reales cualesquiera, $||a| - |b|| < |a-b|$. De la definición de límite,

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } |f(x) - L| < \epsilon \text{ cuando } 0 < |x-a| < \delta$$

Notemos que, por la desigualdad triangular reversa, se cumple que $||f(x)| - |L|| < |f(x) - L|$. Entonces, para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow ||f(x)| - |L|| < |f(x) - L| < \epsilon$$

Por tanto, es claro que si f converge a L, entonces $|f|$ lo hace a $|L|$. Ahora, para probar que la proposición recíproca no es cierta, tomemos la siguiente función $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$ y analizar los límites laterales cuando x tiende a 0:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \qquad \wedge \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

y el límite no existe; mientras que $|f(x)| \equiv 1$, por lo que su límite sí existe.

■

(7) *a*) Sea f una función continua en $[0,2]$ tal que $f(0) = f(2)$. Demuestre que existe $x_1 \in [0,1]$ tal que $f(x_1) = f(x_1+1)$. *Ayuda*: Considere la función $g(x) = f(x+1) - f(x)$ en el intervalo $[0,1]$.

b) Consideremos a $f(x)$ como una función continua en $x = 0$ tal que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = 2$. Demuestre que $f(0) = 0$. Además, calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos\Big(f(x)\Big)}{x^2}$$

Solución:

a) Sea $g(x) = f(x+1) - f(x)$. Entonces, g es continua en $[0,1]$ y

$$g(0) = f(1) - f(0) \qquad \wedge \qquad g(1) = f(2) - f(1) = f(0) - f(1) = -g(0)$$

Distinguimos los siguientes casos:

- Si $f(0) \neq f(1)$, entonces g cambia de signo al pasar x de 0 a 1. Así, el T.V.I. garantiza la existencia de un $x_1 \in (0,1)$ tal que $g(x_1) = 0$. Lo anterior significa que:

$$\exists\, x_1 \in (0,1) \text{ tal que } f(x_1) = f(x_1+1)$$

- Si $f(0) = f(1)$, entonces se cumple trivialmente que $x_1 = 0$ pues $f(0) = f(0+1) = f(1)$

b) Como f es continua en $x = 0$, entonces:

$$f(0) = \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x\frac{f(x)}{x} = \left(\lim_{x\to 0} x\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}\right) = 0 \cdot 2 = 0$$

dado que ambos límites existen independientemente. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos\Big(f(x)\Big)}{x^2} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos^2\Big(f(x)\Big)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos\Big(f(x)\Big)} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin\Big(f(x)\Big)}{f(x)}\right)^2 \cdot \left(\frac{f(x)}{x}\right)^2 \cdot \frac{1}{1 + \cos\Big(f(x)\Big)} \\
&= 1 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \;=\; 2
\end{aligned}$$

pues f es continua en $x = 0$ y $f(0) = 0$.

■

(8) *a*) Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x - [x]} + x & \text{si } x > 1 \\ x - [x] & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

¿Es posible definirla en $x = 1$ de modo que sea continua en dicho punto?

b) Demuestre que las curvas definidas por $f(x) = 10x^3 - x^2 + 5x - 11$ y $g(x) = 2x^3 + 9x^2 + 10$, se intersectan en algún punto $x_0 > 0$.

c) Demuestre que existe al menos una solución real de la ecuación:

$$\sqrt[3]{x} = 1 - x$$

en el intervalo $]0, 1[$.

Solución:

a) Para poder definir f en $x = 1$ continua, es necesario que exista el siguiente límite

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Ahora:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x - [x]} + x = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x-1} + x = 1$$

y

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x - [x] = \lim_{x\to 1^-} x - 0 = 1$$

Como ambos límites laterales son iguales, el límite global existe. Luego, es posible definir f en $x = 1$ para que sea continua ahí. En particular, $f(1) = 1$.

b) Consideremos la función auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x) = 8x^3 - 10x^2 + 5x - 1$$

Es claro que h es una función continua en $\mathbb{R}$, pues es un polinomio, por lo que particularmente es continua en $[0, 1]$ (u otro intervalo de la forma $[0, a]$ con $a \geq 1$). Ahora bien,

$$h(0) = -1 < 0 \qquad \wedge \qquad h(1) = 2 > 0$$

Por lo tanto, por el Teorema del Valor Intermedio (o el Teorema de Bolzano) existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $h(x_0) = 0$, así

$$h(x_0) = 0 \longrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \longrightarrow f(x_0) = g(x_0)$$

de donde se obtiene que existe un punto intersección $x_0 > 0$ de f y g.

c) Definimos la siguiente función

$$f(x) = \sqrt[3]{x} - 1 + x$$

Dado que $f(x)$ es función continua en todo $\mathbb{R}$, y en particular en $]0, 1[$ notamos:

$$f\left(\frac{1}{8}\right) < 0 \qquad \wedge \qquad f\left(\frac{27}{81}\right) > 0$$

Entonces, por el Teorema del Valor Intermedio, f toma el valor cero en el intervalo $[1/8, 27/81] \subset]0, 1[$ y esa es una solución a esta ecuación.

Observación: Es posible emplear cualquier otro par de puntos dentro del intervalo en los que f cambia de signo.

■

Sección III

Derivadas

III.i. Reglas de derivación

(1) Calcule, por definición, la derivada de $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ en el punto $x = \sqrt{3}$

Solución:

Por la definición de derivada, sabemos que:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{1+(x+h)^2}-\sqrt{1+x^2}}{h} \cdot \left(\frac{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1+(x+h)^2-1-x^2}{h(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{h(2x+h)}{h(\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{1+(x+h)^2}+\sqrt{1+x^2}} \\
&= \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

■

(2) Calcule las derivadas de las siguientes funciones:

a) $g(x) = \sqrt{\sin(x^2)}\sqrt{\tan(2x)} + (x^2+1)\sqrt{x+1}$

b) $f(x) = \left(\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \right)^3$

c) $h(x) = \sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$

Solución:

a) La derivada del primer sumando es:

$$\frac{\cos(x^2)\cdot 2x}{2\sqrt{\sin(x^2)}} \cdot \sqrt{\tan(2x)} + \sqrt{\sin(x^2)} \cdot \frac{\sec^2(2x)\cdot 2}{2\sqrt{\tan(2x)}}$$

La derivada del segundo sumando es:

$$2x\sqrt{x+1}+\frac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}}$$

Así,

$$g'(x)=\frac{\cos\left(x^2\right)\cdot x}{\sqrt{\sin\left(x^2\right)}}\cdot\sqrt{\tan\left(2x\right)}+\sqrt{\sin\left(x^2\right)}\cdot\frac{\sec^2\left(x\right)\cdot 2}{\sqrt{\tan\left(2x\right)}}+2x\sqrt{x+1}+\frac{x^2+1}{2\sqrt{x+1}}$$

b) Por la regla de la cadena, tenemos que:

$$3\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)^2\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)'$$

Ahora, aplicando la regla del cociente en la derivada,

$$\frac{\frac{1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}-\frac{-1-\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}}{(1-\sqrt{x})^2}=\frac{1}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^2}$$

Así,

$$f'(x)=\frac{3(1+\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})^4}$$

c) Por la regla de la cadena, la derivada corresponde a:

$$h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}}\cdot\left[1+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right]\right)$$

donde los paréntesis cuadrados, en este caso, **no representan** la función parte entera, sino un paréntesis elegante.

■

(3) *a*) Si se define la función $f(x)=\frac{1}{2}\cdot x\cdot|x|$, demuestre es diferenciable $\forall x\in\mathbb{R}$ y encuentre $f'(x)$

b) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, una función derivable en todo (a,b). Sea $x_0\in(a,b)$ fijo, se define:

$$\phi(x_0)=\frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$$

Demuestre que $\lim\limits_{h\to 0}\phi(x_0)=f'(x_0)$

Solución:

a) Se tiene que:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x \geq 0 \\ \\ -\dfrac{1}{2}x^2 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

y con ello es claro que $f(x)$ es diferenciable $\forall x \neq 0$. Por otra parte,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2}h\,|h|}{h} = \frac{1}{2}\lim_{h\to 0} |h| = 0$$

Entonces $f(x)$ también es diferenciable en el origen. Así,

$$f'(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = |x|$$

b) Notemos que la función $\phi(x)$ puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \phi(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} &= \frac{f(x_0+h) - f(x_0) + f(x_0) - f(x_0-h)}{2h} \\ &= \frac{1}{2}\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{1}{2}\frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{h\to 0} \phi(x_0) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}}_{f'(x_0)} + \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} \right)$$

Pero, sea $u = -h$. Si $h \to 0$, entonces $u \to 0$. Así:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0-h)}{h} = \lim_{u\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0+u)}{-u} = \lim_{u\to 0} \frac{f(x_0+u) - f(x_0)}{u} = f'(x_0)$$

Con ello,

$$\lim_{h\to 0} \phi(x_0) = \frac{1}{2}\Big(f'(x_0) + f'(x_0) \Big) = f'(x_0)$$

■

(4) Determine los valores de a, b para los cuales la función:

$$f(x) = \begin{cases} 5 + \sqrt{2x} & , \text{ si } x \in (0, 8] \\ \\ bx + a & , \text{ si } x \in (8, \infty) \end{cases}$$

Sea diferenciable en $x = 8$.

Solución:

Primero que todo, necesitamos que f sea continua en $x = 8$. Así:

$$\lim_{x \to 8-} f(x) = 9 = f(8)$$

$$\lim_{x \to 8+} f(x) = 8b + a$$

$$\therefore \quad 8b + a = 9$$

Por otra parte, por la definición formal de derivada, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 8+} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} &= \lim_{x \to 8} \frac{bx + a - 9}{x - 8} \\ &= \lim_{x \to 8} \frac{bx + a - (8b + a)}{x - 8} \\ &= \lim_{x \to 8} \frac{b(x - 8)}{x - 8} = b \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 8-} \frac{f(x) - f(8)}{x - 8} &= \lim_{x \to 8} \frac{5 + \sqrt{2x} - 9}{x - 8} = \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{2x} - 4}{x - 8} \\ &= \lim_{x \to 8} \frac{\sqrt{2x} - 4}{x - 8} \cdot \frac{\sqrt{2x} + 4}{\sqrt{2x} + 4} \\ &= \lim_{x \to 8} \frac{2x - 16}{(x - 8)(\sqrt{2x} + 4)} \\ &= \lim_{x \to 8} \frac{2}{\sqrt{2x} + 4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Así,

$$b = \frac{1}{4} \longrightarrow a = 7$$

y con ello se tiene lo pedido.

■

(5) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - p}{x + 1} & \text{si } x > 0 \\ \\ x^2 + qx & \text{si } x < 0 \\ \\ r & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Determine los valores de p, q y r en los reales de manera que f sea derivable en $x = 0$.

b) Para los valores encontrados en el apartado anterior, determine la función f' indicando su dominio.

Solución:

a) Para que f sea derivable en cero, primero necesitamos que sea continua en dicho punto, por lo que requerimos:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = -p,\ \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0,\ f(0) = r$$

Por tanto,

$$p = r = 0$$

Ahora, para la diferenciabilidad,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h(h+1)} = 1$$

También

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+q)}{h} = q$$

Para que la derivada exista, ambos límites deben ser iguales y por tanto

$$q = 1$$

Podemos, además, determinar la derivada en $x = 0$:

$$f'(0) = 1$$

En las ramas $x > 0$ y $x < 0$, utilizamos las reglas de derivación ya conocidas (pues son intervalos abiertos). Por tanto,

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x > 0 \\ 2x + 1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y su dominio son todos los reales.

■

(6) Determine la ecuación de la recta tangente en $x = 0$ a la función:

$$f(x) = \begin{cases} x - x^2\ \cos\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{, si } x \neq 0 \\ 0 & \text{, si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

La recta buscada pasa por $(0,0)$, por lo que solo falta hallar su pendiente. Esta es:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(h)}{h}=\lim_{x\to 0}\frac{h-h^2\ \cos\left(\frac{\pi}{h}\right)}{h}\\ &= \lim_{x\to 0}\left(1-h\ \cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\right)=1-\lim_{x\to 0}h\ \cos\left(\frac{\pi}{h}\right)\end{aligned}$$

El último límite es producto de una función acotada por otro que tiende a cero, por lo que $f\prime(0) = 1-0=1$. Así, la recta tangente buscada es:

$$y = x$$

■

(7) Dada la curva C de ecuación:

$$C:\ y=f(x)=-x^2+2x-4$$

a) Determine la ecuación de la recta tangente a C en un punto $x = x_0$.

b) Determine $x_0 \in \mathbb{R}$ de modo que la recta tangente en dicho punto pase por el origen.

Solución:

a) Para determinar la ecuación de la recta tangente calculamos, en primer lugar, la pendiente en el punto $\Big(x_0, f(x_0)\Big)$,

$$f'(x_0) = -2x_0+2$$

Así, la ecuación de la recta tangente será

$$y-f(x_0)=(-2x_0+2)(x-x_0)$$

o bien

$$y = x(-2x_0+2)+2{x_0}^2-2x_0+f(x_0)$$

b) Para que la recta tangente pase por el origen, el coeficiente afín debe ser igual a cero:

$$2{x_0}^2-2x_0+f(x_0)={x_0}^2-4=0$$

pues $f(x_0)=-{x_0}^2+2x_0-4$. Resolviendo,

$$x_0=\pm 2$$

■

(8) *a*) Sean f y g funciones de reales, tales que:

$$f'(x) = g(x)$$

$$g'(x) = f(x)$$

y $f(0) = 0,\ g(0) = 1$. Demuestre que $F(x) = \Big(f(x)\Big)^2 - \Big(g(x)\Big)^2$ es constante y determine su valor.

b) **[Propuesto]** Demuestre, vía inducción, la fórmula de Leibniz para la derivada del producto:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) \cdot g^{(k)}(x)$$

Solución:

a) Notemos que:

$$F'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2f(x)g(x) = 0$$

Como $F'(x) = 0$, es claro que $F(x) = C$. Así,

$$F(0) = 0^2 - 1^2 = -1 \ \longrightarrow\ F(x) = -1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

■

III.ii. Derivadas de orden superior, Teoremas de la función inversa e implícita

(1) Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Determine valores de $n \in \mathbb{N}$ para los cuales la función es *continua, diferenciable* o con *derivada continua.*

Solución:

Para que nuestra función $f(x)$ sea continua, debemos analizar los que ocurre en $x = 0$. Así, debe cumplirse que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

Ahora,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} x^n \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Si $n \geq 1$, entonces el límite anterior será de la forma cero por acotada, y con ello $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0)$ y la función será continua en la recta real.

Calculemos su derivada:

$$f'(x) = nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right),\ \forall x \neq 0$$

para hallar $f'(0)$, si existe, debemos utilizar la definición analítica:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^n \sin\left(\frac{1}{h}\right)}{h} = \lim_{h\to 0} h^{n-1}\sin\left(\frac{1}{h}\right)$$

Igual que en el caso anterior, dicho límite solo existirá si $n-1 \geq 1 \to n \geq 2$. Por tanto, si $n \geq 2$ la función será diferenciable en todo $\mathbb{R}$.

Con ello,

$$f'(x) = \begin{cases} nx^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x}\right) - x^{n-2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) & , \text{si } x \neq 0 \\ \\ 0 & , \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Finalmente, para analizar la continuidad de f' debemos realizar el mismo análisis que para cualquier otra función: Notemos que f' es una composición de funciones continuas, y por tanto es continua en todo $\mathbb{R}$ excepto en el origen. Para analizar la continuidad en dicho punto probamos que:

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$$

Si $n = 2$, entonces el límite en cuestión es de la forma:

$$\lim_{x\to 0} 2x\sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) = \nexists$$

Por tanto, con $n > 2$ se garantiza la continuidad de la derivada en $\mathbb{R}$. ■

(2) *a*) Determine la derivada de la función $\text{Arcsin}\,(x) : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

b) Sea $f(x) = x^3 - x$ para $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$, y sea $g(x)$ su inversa. Calcular $g'(0)$.

c) Sean $f(x) = 2x + \sin(x)$ y $g(x)$ su función inversa. Calcule $g'(2\pi)$.

Solución:

a) Por la definición de función inversa, sabemos que:

$$f(f^{-1}(x)) = x \quad \Rightarrow \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Por tanto, como $(\sin(x))' = \cos(x)$, debemos calcular $\cos(\text{Arcsin}(x))$.

Recordemos que $\cos(u) = \pm\sqrt{1-\sin^2(u)}$, para todo $u \in \mathbb{R}$.

Ahora, si tomamos $\text{Arcsin}(x) = y \leftrightarrow \sin(y) = x$, entonces la identidad fundamental anterior queda como sigue:

$$\cos(y) = \pm\sqrt{1-\sin^2(y)} = \pm\sqrt{1-x^2} \qquad \text{Pero, } y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \cos(y) > 0$$

$$\begin{aligned} \cos(y) &= \sqrt{1-x^2} \\ &\Rightarrow \cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$(\text{Arcsin}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

b) Por la fórmula de la derivada de la función inversa,

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))}$$

Ahora bien, $g(0) = x \leftrightarrow f(x) = 0 \leftrightarrow x^3 - x = 0$ y $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
La ecuación $x^3 - x = 0$ tiene soluciones $x = 0$ y $x = \pm 1$. De ellas, la única que satisface la restricción $x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$ es $x = -1$.
Por lo tanto, $g(0) = -1$ y con ello $g'(0) = \dfrac{1}{f'(-1)}$.
Como $f'(x) = 3x^2 - 1$ tenemos que $f'(-1) = 2$ y por tanto

$$g'(0) = \frac{1}{2}$$

c) Dado que $g'\Big(f(x_0)\Big) = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ y $f(\pi) = 2\pi$, concluimos que $x_0 = \pi$. Con ello,

$$f'(x_0) = 2 + \cos(x_0) = 2 - 1 = 1$$

Finalmente,

$$g'(2\pi) = \frac{1}{1} = 1$$

■

(3) Las siguientes ecuaciones definen implícitamente a y como función de x. Encuentre $\frac{dy}{dx}$:

a) $\sin(x+y) = y^2 \ \cos(x)$

b) $1 - \arctan\left(\dfrac{x}{y}\right) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= y^2\ \cos(x) \Big/ \frac{d}{dx} \\
\cos(x+y)\left(1+\frac{dy}{dx}\right) &= 2y\frac{dy}{dx}\cos(x) - y^2\ \sin(x) \\
\cos(x+y) + \cos(x+y)\ \frac{dy}{dx} &= 2y\frac{dy}{dx}\cos(x) - y^2\ \sin(x) \\
\left[\cos(x+y) - 2y\ \cos(x)\right]\ \frac{dy}{dx} &= -\left[y^2\ \sin(x) + \cos(x+y)\right] \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{y^2\ \sin(x) + \cos(x+y)}{2y\ \cos(x) - \cos(x+y)}
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
1 - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) &= \frac{x^2+y^2}{2} \Big/ \frac{d}{dx} \\
\left(-\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\right)\cdot\left(\frac{y - x\ y'}{y^2}\right) &= x + y\ y' \\
\frac{x\ y' + y}{x^2+y^2} &= x + y\ y' \\
x\ y' + y &= (x^2+y^2)\,(x + y\ y') \\
\left[x - (x^2-y^2)\ y\right]\ y' &= (x^2+y^2)\ x + y \\
\frac{dy}{dx} &= \frac{x^3 + xy^2 + y}{x - x^2y - y^3}
\end{aligned}$$

■

(4) La curva γ dada por $\gamma : x^3 + xy^2 + x^3y^5 = 3$ define a y como función implícita de x. Determine si la recta tangente a γ en el punto $(1,1)$, pasa por el punto $(-2,3)$.

Solución:

Derivando implícitamente con respecto a x en la ecuación de γ, se tiene:

$$3x^2 + y^2 + 2xyy' + 3x^2y^5 + 5x^3y^4y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{3x^2 + y^2 + 3x^2y^5}{2xy + 5x^3y^4}$$

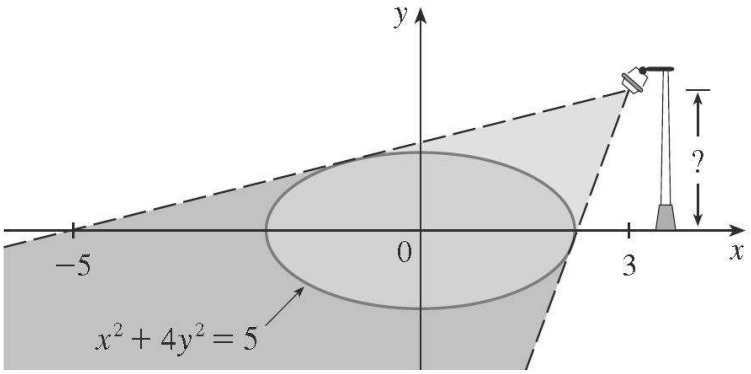
$$y'(1,1) = -1$$

Luego la recta T, tangente a γ en $(1,1)$ tiene pendiente -1, de donde la ecuación de T es:

$$T : y + x - 2 = 0$$

Si reemplazamos en T para $x = -2$, se obtiene $y = 4$, por lo tanto la recta tangente T no pasa por el punto $(-2, 3)$. ■

(5) La figura muestra una luz ubicada tres unidades a la derecha del eje Y y la sombra creada por la región elíptica $x^2 + 4y^2 \leq 5$. Si el punto $(-5, 0)$ está en el borde de la sombra, ¿a qué altura sobre el eje X está ubicada la luz?



Solución:

La recta que une la luz con el punto $(-5, 0)$ es tangente a la elipse $x^3 + 4y^2 = 5$, llamemos (x_0, y_0) al punto de tangencia de esta recta con la elipse. Luego, la ecuación de la recta es:

$$y - y_0 \;=\; \frac{dy}{dx}(x_0, y_0)\ (x - x_0)$$

Ahora, determinemos la derivada usando derivación implícita:

$$x^3 + 4y^2 = 5\ /\ \frac{d}{dx} \;\Rightarrow\; 2x + 8y\frac{dy}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y}$$

Y como el punto $(-5, 0)$ pertenece a esta recta, se tiene que:

$$y - y_0 \;=\; -\frac{x_0}{4y_0}\ (x - x_0) \Rightarrow\ \underbrace{4y_0^2 = -5x_0 - x_0^2}_{(i)}$$

Pero el punto de tangencia pertenece a la elipse, y por tanto

$$\underbrace{x_0^2 + 4y_0^2 = 5}_{(ii)}$$

Juntando las ecuaciones (i) y (ii), se obtiene que $x_0 = -1$ e $y_0 = 1$ o $y_0 = -1$. Pero el punto de tangencia está sobre el eje X, por tanto, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$. Reemplazando estos valores, se obtiene que la ecuación de la recta tangente es:

$$y - 1 = \frac{1}{4}(x + 1)$$

Para finalizar, sabemos que la luz está sobre la recta $x = 3$ y sobre la recta tangente que acabamos de encontrar, luego

$$y = \frac{1}{4}(3 + 1) + 1 = 1 + 1 = 2$$

y la luz se encuentra a dos unidades sobre el eje X. ■

(6) *a)* Sea n un número natural y C una constante real. Considere la función

$$f(x) = \begin{cases} (x+2)^n \sin\left(\dfrac{1}{x+2}\right) + \dfrac{2x^2}{3} & \text{si} \quad x \neq -2 \\ \\ C & \text{si} \quad x = -2 \end{cases}$$

Calcule la derivada de la función para $x \neq -2$. Determine condiciones sobre n y C para que $f'(-2)$ exista y calcúlela.

b) Estudie la continuidad y diferenciabilidad de la función indicada.

$$h(x) = x[x],\ x \in (-2, 2)$$

Solución:

a) Cuando $x \neq -2$, $f'(x)$ puede calcularse usando las reglas de derivación. Luego,

$$f'(x) = (x+2)^{n-1}\, n \sin\left(\frac{1}{x+2}\right) - (x+2)^{n-2} \cos\left(\frac{1}{x+2}\right) + \frac{4}{3}x$$

Para que f sea diferenciable en $x=-2$ debe ser continua en dicho punto. Así,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{x\to -2} f(x) \\ &= \lim_{x\to -2}\left((x+2)^n \sin\left(\frac{1}{x+2}\right)+\frac{2}{3}x^2\right) \\ &= 0+\frac{8}{3}=\frac{8}{3} \end{aligned}$$

pues $n\in\mathbb{N}$ y el seno es una función acotada. Ahora, calculamos $f'(-2)$ por definición:

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x\to -2}\frac{f(x)-f(-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2}\frac{\left((x+2)^n \sin\left(\frac{1}{x+2}\right)+\frac{2}{3}x^2\right)-\frac{8}{3}}{x+2} \\ &= \lim_{x\to -2}\left((x+2)^{n-1}\sin\left(\frac{1}{x+2}\right)\right)+\lim_{x\to -2}\frac{\frac{2}{3}(x^2-4)}{x+2} \end{aligned}$$

Pero, $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\frac{2}{3}(x^2-4)}{x+2}=\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2}{3}(x-2)=-\dfrac{8}{3}$.
Así, $f'(-2)$ existe *ssi* el primer límite existe, y ello se consigue estableciendo que $n>1$. Finalmente, las condiciones pedidas son:

$$C=\frac{8}{3} \qquad \text{y} \qquad n>1$$

b) Notemos que la función en cuestión es:

$$h(x)=\begin{cases} -2x & \text{si} \quad x\in(-2,-1) \\ -x & \text{si} \quad x\in[-1,0) \\ 0 & \text{si} \quad x\in[0,1) \\ x & \text{si} \quad x\in[1,2) \end{cases}$$

Es claro que h es continua y derivable en $(-2,-1)$, en $(-1,0)$, en $(0,1)$ y en $(1,2)$. En estos intervalos las derivadas son $-2,\ -1,\ 0$ y 1 respectivamente. Por otra parte,

$$\lim_{x\to -1^-} h(x)=2 \quad \neq \quad 1=\lim_{x\to -1^+} h(x)$$

entonces h no es continua en $x=-1$, y por tanto no es derivable en ese punto. Análogamente:

$$\lim_{x\to 1^-} h(x)=0 \quad \neq \quad 1=\lim_{x\to 1^+} h(x)$$

Por tanto, h no es continua ni derivable en $x=1$. Tenemos que:

$$\lim_{x\to 0^-} h(x)=0 \quad = \quad \lim_{x\to 0^+} h(x)$$

y con ello h es continua en $x=0$. Ahora

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1$$

Además

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{0}{x} = 0$$

y finalmente la función no es derivable en $x = 0$.

■

(7) *a*) Calcule, de la forma más simple posible, la derivada de:

$$g(x) = \tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right)$$

b) Encuentre la ecuación de la normal a la curva $\phi : x\ \cos(y) = \sin(x+y)$ en $\mathcal{P} = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

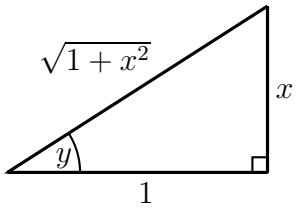
c) Demuestre el *Teorema de Darboux*: Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ diferenciable. Si $d \in (f'(a), f'(b))$ entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = d$.

Solución:

a) Veamos que:

$$\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = y \iff \cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

Gráficamente,



Por tanto, $\tan(y)$ puede calcularse fácilmente:

$$\tan\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)\right) = \tan(y) = |x|$$

donde el módulo aparece porque valores positivos y negativos de x satisfacen la identidad inicial. Así,

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}|x| = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

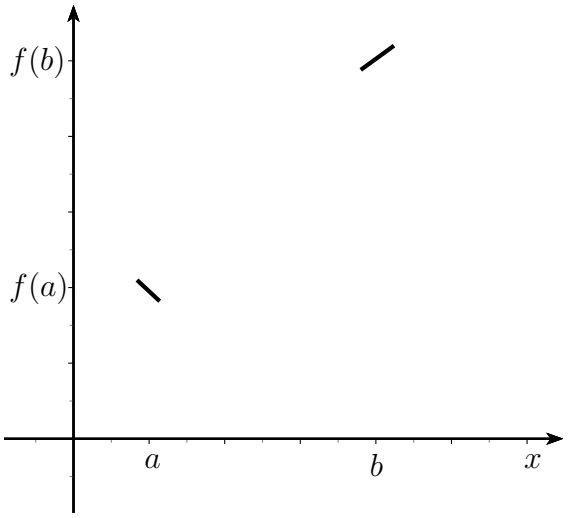
b) Usando diferenciación implícita, si ϕ define implícitamente a y como función de x en una vecindad del punto dado, se tiene que:

$$\cos(y) - x\sin(y)\cdot y' = \cos(x+y)(1+y')$$

y por tanto la pendiente de la recta *tangente* en el punto $\mathcal{P}$ es $m = \dfrac{2}{\pi - 2}$. Por geometría analítica elemental, sabemos entonces que la pendiente de la recta normal es $\tilde{m} = -\frac{1}{m}$. Por tanto, la recta pedida es:

$$\mathcal{N} : \left(y - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2 - \pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$$

c) Supongamos inicialmente que $d = 0$, i.e. $f'(a) < 0 < f'(b)$.



Por Teorema de Weierstrass, la función continua alcanza un valor extremo en $[a, b]$ (por la compacidad de los intervalos cerrados y acotados). Dado que $f'(a) < 0$ y $f'(b) > 0$ entonces el mínimo debe alcanzarse en el interior del intervalo. Así, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c)$ es un mínimo local. Como la función es diferenciable y posee un mínimo en $c \in (a, b)$ entonces $f'(c) = 0$ de donde se obtiene el resultado.

Para demostrar el resultado en el caso general, recurrimos a la función auxiliar $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, tal que $\varphi(x) = f(x) - d\ x$.

Notemos que si $d \in (f'(a), f'(b))$ y $c \in (a, b)$ es tal que $f'(c) = d$, entonces

$$\varphi'(x) = f'(x) - d \implies \varphi'(c) = f'(c) - d = 0$$

Por lo tanto, encontrar un punto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = d$ es equivalente a encontrar una punto $\tilde{c}$ tal que $\varphi(\tilde{c}) = 0$; que es, justamente, lo que probamos inicialmente.

■

Sección IV

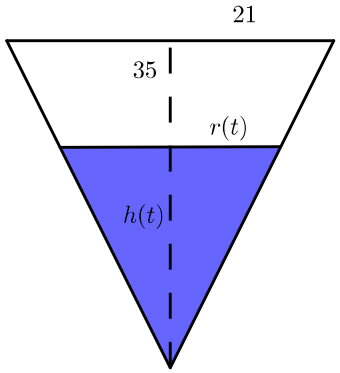
Aplicaciones de la derivada

IV.i. Tasas relacionadas, Teorema del valor medio y aproximaciones

(1) En un depósito cónico recto entra, a razón de 8 $[m^3/s]$ cierto líquido incompresible. El radio y la altura del depósito son 21 $[m]$ y 35 $[m]$ respectivamente. Calcule la tasa de crecimiento de la altura cuando ésta toma un valor de $h = 6$ $[m]$.

Solución:

Realizando un diagrama de la situación, tenemos que:



Notemos que, por el Teorema de Thales, encontramos la siguiente relación:

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{21}{35} = \frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad r(t) = \frac{3}{5}\, h(t)$$

Ahora bien, el volumen del líquido contenido en el depósito corresponde a

$$V(t) = \frac{1}{3}\, \pi\, r(t)^2\, h(t)$$

Así, con la relación antes calculada, tenemos que:

$$V(t) = \frac{1}{3}\, \pi\, \frac{9}{25}\, h(t)^3$$

Con ello, la variación temporal de la expresión queda como sigue:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{9\pi}{25}\, h(t)^2\, \frac{dh}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = \frac{25\frac{dV}{dt}}{9\pi\, h(t)^2}$$

Reemplazado,

$$\frac{dh}{dt} \;=\; \frac{25 \cdot 8}{9\pi \cdot 6^2} \;=\; \frac{50}{81\pi} \approx\; 0.196 \left[\, \frac{m}{s} \right]$$

■

(2) *a*) Un globo esférico se infla a una tasa de $20\,\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}$. Determine la tasa de cambio de la superficie del globo cuando el volumen es de $36\pi\,\text{cm}^3$.

b) Para el globo anterior, se utiliza una aproximación lineal para determinar su volumen, a partir del dato exacto de $V_0 = 36\,\pi\,\text{cm}^3$. Si el error entre el valor aproximado y el dato exacto es de $\frac{\pi}{8}\,\text{cm}^3$, indique el valor correspondiente al radio del globo y el error de esta estimación.

Solución:

a) Sea $V(t)$ el volumen del globo en el instante t y sea $S(t)$ la superficie del globo en el mismo instante. Del enunciado se puede inferir que:

$$\frac{dV}{dt} = 20\,\text{cm}^3/\text{s}$$

Como se trata de un globo esférico, se cumple que:

$$V(t) = \frac{4\pi}{3}\,r(t)^3 \qquad \wedge \qquad S(t) = 4\pi\,r(t)^2$$

donde $r(t)$ es el radio del globo en el instante t. Luego,

$$r(t) = \sqrt{\frac{S(t)}{4\pi}} \qquad \longrightarrow \qquad V(t) = \frac{1}{6\sqrt{\pi}} S(t)^{3/2}$$

Derivando esta relación con respecto al tiempo, obtenemos que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} S(t)^{1/2} \frac{dS}{dt}$$

Ahora, en el instante t_0 en que $V(t_0) = 36\pi$, tendremos que $S(t_0) = 36\pi$ también. Luego,

$$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{V(t_0)=36\pi} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} \cdot 6\sqrt{\pi} \left.\frac{dS}{dt}\right|_{V(t_0)=36\pi}$$

Simplificando,

$$\left.\frac{dS}{dt}\right|_{V(t_0)=36\pi} = \frac{40}{3}\,\text{cm}^2/\text{s}$$

b) Como $V = \frac{4\pi}{3}\,r^3$, tendremos que cuando $V = 36\pi\,\text{cm}^3$, el radio mide $r_0 = 3\,\text{cm}$. Ahora, usando la aproximación lineal del volumen tenemos que:

$$V(r_0 + \Delta r) \approx V(r_0) + V'(r_0)\,\Delta r$$

Por tanto,

$$|V(r_0 + \Delta r) - V(r_0)| \approx |V'(r_0)\,\Delta r|$$

Como $r_0 = 3$ y $V'(r_0) = 4\pi\,{r_0}^2 = 36\pi$, podemos concluir que:

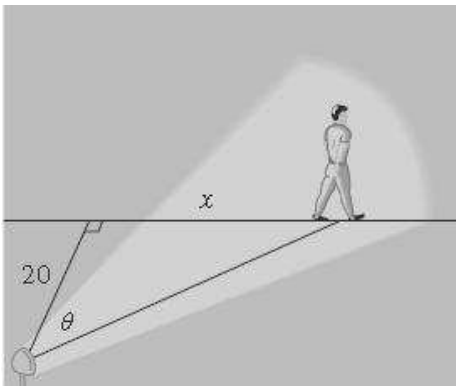
$$\frac{\pi}{8} \approx 36\pi\,|\Delta r| \qquad \longrightarrow \qquad |\Delta r| \approx \frac{1}{288}\,\text{cm}$$

■

(3) Un hombre camina por un sendero recto a una velocidad de 4 $[\frac{m}{s}]$. Un reflector está situado en el suelo a 20 $[m]$ del camino y se mantiene centrado en el hombre. ¿A qué tasa gira el reflector cuando el hombre está a 15 $[m]$ desde el punto en la senda más cercano al reflector?

Solución:

La situación se diagrama de la siguiente forma:



Sea x la distancia medida desde el hombre hasta el punto más cercano al reflector. Llamemos θ al ángulo que forman la perpendicular al camino y la posición del hombre, tal como lo indica la figura. Por las relaciones trigonométricas, tenemos que:

$$\frac{x}{20} = \tan(\theta) \Longrightarrow x = 20\tan(\theta)$$

Así, derivando dicha expresión con respecto al tiempo:

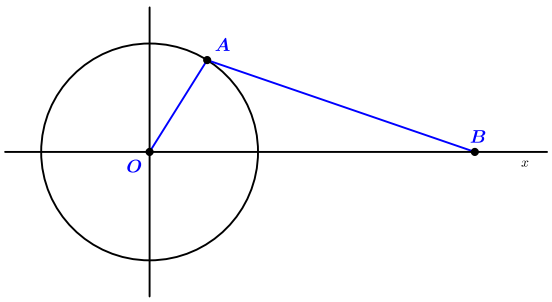
$$\frac{dx}{dt} = 20\sec^2(\theta)\,\frac{d\theta}{dt} \Longrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{20}\cos^2(\theta)\,\frac{dx}{dt}$$

Cuando $x = 15$, la distancia del hombre al foco es de 25 y con ello $\cos(\theta) = \frac{4}{5}$. Reemplazando dicho valor y $\frac{dx}{dt} = 4$, finalmente:

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{5}\left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125} = 0.128\ \left[\frac{rad}{s}\right]$$

■

(4) Sobre un círculo de radio 1 se mueve el extremo A de una barra de largo 3 cuyo otro extremo B se desliza sobre un eje fijo.



a) Determine una ecuación que relacione la posición x del punto B con el ángulo $\angle BOA = \theta$.

b) Suponga que A gira en el sentido contrario a las manecillas del reloj con el ángulo θ variando a una tasa de 0.6 $[rad/s]$. Calcule la velocidad de desplazamiento de B cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

a) Sea x la posición del punto B. Por el *Teorema del Coseno* tenemos que:

$$9 = 1 + x^2 - 2x\cos(\theta)$$

b) Derivando la ecuación anterior con respecto al tiempo tenemos:

$$2x\frac{dx}{dt} - 2\frac{dx}{dt}\cos(\theta) + 2x\sin(\theta)\frac{d\theta}{dt} \;\Rightarrow\; \frac{dx}{dt} = \frac{x\sin(\theta)}{\cos(\theta) - x}\frac{d\theta}{dt}$$

Cuando $\theta = \frac{\pi}{4}$ obtenemos x de la ecuación original, después de descartar la raíz negativa. Esto da que $x = 1/\sqrt{2} + \sqrt{17/2}$, que sumado al hecho que

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.6$$

da el resultado reemplazando:

$$\frac{dx}{dt} \approx -0.5071\ [m/s]$$

■

(5) *a*) Dada la función $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$, con m y n naturales, demuestre que el punto c del teorema de Rolle divide al intervalo $[a, b]$ en la razón $m : n$.

b) Demuestre que si f es una función dos veces diferenciable en todo $\mathbb{R}$ y tiene tres raíces reales distintas, entonces existe un punto c en el cual $f''(c) = 0$.

c) Suponga que $f(0) = -3$ y que $f'(x) \leq 5$ para todo valor de x . ¿Cuál es el mayor valor que $f(2)$ puede tomar?

Solución:

a) Es inmediato que $f(a) = f(b) = 0$, y por el *Teorema de Rolle* existe $c \in [a, b]$ tal que $f'(c) = 0$. Así,

$$\begin{aligned} 0 &= f'(c) \\ &= m(c-a)^{m-1}(c-b)^n + n(c-b)^{n-1}(c-a)^m \qquad \text{Sup. que c} \neq a, b \\ &= m(c-b) + n(c-a) \\ &= -m(b-c) + n(c-a) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$(b-c)m = (c-a)n \qquad \rightarrow \qquad \frac{c-a}{b-c} = \frac{m}{n}$$

b) Sean a, b, c distintos entre sí tales que $f(a) = f(b) = f(c) = 0$. Entonces, como f es dos veces diferenciable en todo $\mathbb{R}$, por el Teorema de Rolle,

$$f(a) = f(b) \Rightarrow \exists \alpha \in (a, b) \text{ tal que } f'(\alpha) = 0$$

Similarmente,

$$f(b) = f(c) \Rightarrow \exists \beta \in (b, c) \text{ tal que } f'(\beta) = 0$$

Aplicando el Teorema de Rolle una vez más a f' obtenemos que

$$\exists \gamma \in (\alpha, \beta) \text{ tal que } f''(\gamma) = 0$$

c) Como f es diferenciable, pues su derivada existe, entonces es posible aplicar el T.V.M. en el intervalo $[0, 2]$ y con ello obtener que:

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} = f'(c),\ c \in (0, 2)$$

pero, por hipótesis, $f'(c) \leq 5$. Así,

$$\frac{f(2) - f(0)}{2 - 0} \leq 5 \quad \Rightarrow \quad f(2) - f(0) \leq 10 \quad \Rightarrow \quad f(2) \leq 7$$

■

(6) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si $0 < u < v < \frac{\pi}{2}$, entonces:

$$\frac{u}{v} < \frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

b) Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ diferenciable, tal que $f'(x) \neq 1$. Existe un único punto $\phi \in [0, 1]$ tal que $f(\phi) = \phi$.

c) Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ satisface que $|f(x) - f(y)| \leq c\,|x - y|^{\alpha}$, $\forall x, y \in [a, b]$ con $\alpha > 1$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces f es constante.

Solución:

a) Analicemos la función

$$f(t) = \frac{\sin(t)}{t},\ t \in (0, \pi/2)$$

Tomemos dos puntos arbitrarios en el intervalo, $x,\ y$, tales que $x > y$. Así, por el T.V.M:

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = f'(z) = \frac{z\cos(z) - \sin(z)}{z^2} \qquad , z \in (x, y)$$

Analicemos ahora la función auxiliar $g(z) = z\cos(z) - \sin(z)$. Notemos que:

$$g'(z) = -z\sin(z) < 0, \forall z \in (0, \pi/2)$$

Por tanto,

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y}<0 \longrightarrow f(x)<f(y)$$

y la función es decreciente. Si tomamos los u, v pedidos tendremos que:

$$f(v)<f(u) \rightarrow \frac{\sin(v)}{v}<\frac{\sin(u)}{u} \rightarrow \frac{u}{v}<\frac{\sin(u)}{\sin(v)}$$

que es lo que se pedía demostrar.

b) El Teorema del Valor Intermedio garantiza la existencia de un punto[3] ϕ donde $f(\phi)=\phi$. Si existiese un segundo punto θ con $f(\theta)=\theta$ tendríamos, por el T.V.M:

$$f'(\psi)=\frac{f(\theta)-f(\phi)}{\theta-\phi}=\frac{\theta-\phi}{\theta-\phi}=1$$

para algún $\psi \in (\theta,\phi)$, lo cual es una contradicción.

c) La definición de derivada nos dice que:

$$f'(y)=\lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$$

Así, utilizando la desigualdad del enunciado,

$$\begin{aligned}|f'(y)| &= \left|\lim_{x\to y}\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \lim_{x\to y}\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| \\ &= \lim_{x\to y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} \leq \lim_{x\to y}\frac{c\,|x-y|^{\alpha}}{|x-y|} \\ &= \lim_{x\to y} c\,|x-y|^{\alpha-1} = 0\end{aligned}$$

El límite anterior es cero pues $\alpha-1>0$. Por lo tanto, $|f'(y)|\leq 0$ lo que implica que $f'(y)=0$ para todo $y\in[a,b]$ si y solo si f es constante en $[a,b]$.

■

(7) *a*) Siendo f una función dos veces derivable tal que $f(a)=f(b)=0$ y $f(c)>0$, con $a<c<b$. Demuestre que entre a y b existe un α para el cual $f''(\alpha)<0$.

b) Sea $f(x)$ una función derivable en x_0. Determine para qué valores de $\lambda\in\mathbb{R}$ existe el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+\lambda h)-f(x_0)}{h}$$

y calcúlelo cuando corresponda.

Solución:

[3] Propiedad denominada como *Teorema del punto fijo.*

a) Dado que $a < c < b$, por el teorema del valor medio tenemos que existe un $\alpha_1 \in (a, c)$ tal que

$$f'(\alpha_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \frac{f(c)}{c - a} > 0$$

ya que $f(c) > 0$ por hipótesis. Por el mismo argumento, existe un $\alpha_2 \in (c, b)$ tal que:

$$f'(\alpha_2) = \frac{f(b) - f(c)}{b - c} = -\frac{f(c)}{b - c} < 0$$

Ahora, notemos que $\alpha_1 < \alpha_2$ puesto que los intervalos (a, c) y (c, b) son disjuntos. Aplicando el TVM a la función $g(x) = f'(x)$ en dichos puntos, concluimos que existe un $\alpha \in (a, b)$ tal que:

$$\frac{g(\alpha_2) - g(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = \frac{f'(\alpha_2) - f'(\alpha_1)}{\alpha_2 - \alpha_1} = g'(\alpha) = f''(\alpha)$$

Como $f'(\alpha_2) < 0$ y $f'(\alpha_1) > 0$, se concluye que:

$$f''(\alpha) < 0$$

b) Realicemos la siguiente definición:

$$A \equiv \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{h}$$

El caso más simple ocurre cuando $\lambda = 0$, en cuyo caso $A = 0$. Si $\lambda \neq 0$ entonces:

$$A = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{h} = \lambda \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \lambda h) - f(x_0)}{\lambda h}$$

Sea $u = \lambda h$. Si $h \to 0$ entonces $u \to 0$. Así,

$$A = \lambda \lim_{u \to 0} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0)}{u} = \lambda\, f'(x_0)$$

Juantando ambos casos,

$$A(\lambda) = \lambda\, f'(x_0)$$

■

(8) Considere un móvil que se desplaza, con una velocidad creciente en el tiempo, entre dos ciudades A y B d separadas a una distancia L. Utilizando el TVM, demuestre que en la mitad del viaje no se puede haber recorrido más de la mitad del camino.

Solución:

Sea $x(t)$ la distancia recorrida hasta el tiempo t. Diremos que en $t = 0$, el móvil se encuentra en la ciudad A, y por tanto su distancia recoorida es cero; por otra parte, luego de un tiempo total de viaje T, el móvil logra llegar a la ciudad B. Por tanto,

$$x(0) = 0 \qquad \wedge \qquad x(T) = L$$

Como nos interesa el punto en la mitad del viaje, aplicaremos el TVM en $t = T/2$ para los siguientes pares de puntos:

$$\begin{aligned} \frac{x(T/2) - x(0)}{T/2 - 0} &= x'(t_1) \\ 2\left(\frac{x(T/2)}{T}\right) &= \\ \frac{x(T) - x(T/2)}{T - T/2} &= x'(t_2) \\ 2\left(\frac{L - x(T/2)}{T}\right) &= \end{aligned}$$

donde $t_1 \in (0, T/2)$ y $t_2 \in (T/2, T)$, por lo que $t_1 < t_2$. Como la derivada de la posición corresponde a la velocidad, y por enunciado la velocidad es una función creciente, entonces:

$$t_1 < t_2 \quad \rightarrow \quad v(t_1) < v(t_2) \quad \rightarrow \quad x'(t_1) < x'(t_2)$$

Reemplazando,

$$\begin{aligned} x'(t_1) &< x'(t_2) \\ 2\left(\frac{x(T/2)}{T}\right) &< 2\left(\frac{L - x(T/2)}{T}\right) \\ x(T/2) &< L - x(T/2) \\ x(T/2) &< \frac{L}{2} \end{aligned}$$

Lo anterior demuestra que:

a la mitad del viaje se ha recorrido ***menos*** *de la mitad de la distancia*

■

(9) Dada la función $h(x) = \frac{1}{a}(4 - 3x^2)(a^2 - ax - 1)$ donde a es una constante positiva, demuestre que $h(x)$ tiene un máximo y un mínimo, y que la diferencia entre ellos es $\frac{4}{9}\left(a + \frac{1}{a}\right)^3$. ¿Para qué valor de a es mínima esta diferencia?

Solución:

Para analizar la existencia de máximos y mínimos, debemos recurrir tanto a la primera como a la segunda derivada de h. Así:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{1}{a}(-4a - 6xa^2 + 9ax^2 + 6x) \\ h''(x) &= \frac{1}{a}(-6a^2 + 18ax + 6) \end{aligned}$$

Para hallar los valores extremos (si los hay) resolvemos:

$$\begin{aligned} h'(x)=0 &\iff \frac{1}{a}(-4a-6xa^2+9ax^2+6x)=0 \\ &\iff \left(9ax^2-(6a^2-6)x-4a\right)=0 \\ &\iff x=\frac{6a^2-6\pm\sqrt{(6a^2-6)^2+144a^2}}{18a} \\ &\iff x_1=\frac{2a}{3} \quad \vee \quad x_2=-\frac{2}{3a} \end{aligned}$$

Para clasificar dichos punto, recurrimos al criterio de la segunda derivada:

$$\begin{aligned} h''(x_1) &= \frac{6(a^2+1)}{a}>0 \longrightarrow x_1 \text{ es un mínimo} \\ h''(x_2) &= -\frac{6(a^2+1)}{a}<0 \longrightarrow x_2 \text{ es un máximo} \end{aligned}$$

Que es lo que se pedía probar. Ahora bien, la diferencia entre ambos valores será:

$$D=h(x_2)-h(x_1) \longrightarrow D=\frac{1}{a}\left[\left(4-\frac{4}{3a^2}\right)\left(a^2-\frac{1}{3}\right)-\left(4-\frac{4a^2}{3}\right)\left(\frac{a^2}{3}-1\right)\right]$$

Reduciendo términos semejantes,

$$D=\frac{4}{9}\left(a+\frac{1}{a}\right)^3$$

Para minimizar la distancia, derivamos con respecto a a:

$$\frac{dD}{da}=\frac{4}{3}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2\left(1-\frac{1}{a^2}\right)$$

Así,

$$\frac{dD}{da}=0 \iff a=\pm 1 \quad \vee \quad a=\pm i$$

Como a debe ser positivo, el valor que minimiza la distancia es $a=1$. ■

(10) Calcular aproximadamente $\sqrt{304}$.

Solución:

Sea $f(x)=\sqrt{x}$. Para aplicar el teorema del valor medio busquemos una raíz exacta menor y más cercana a 304. Sean $a=289$ y $b=304$, entonces tenemos:

$$f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \;\rightarrow\; \frac{1}{2\sqrt{x_0}}=\frac{\sqrt{304}-17}{15}$$

para algún $x_0 \in (289, 304)$. Como la función $f(x)$ es estrictamente creciente (probar), se tiene que:

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304}$$

acotando tenemos,

$$17 < \sqrt{x_0} < \sqrt{304} < \sqrt{324} = 18$$

Luego,

$$\frac{15}{2 \cdot 18} < \sqrt{304} - 17 < \frac{15}{2 \cdot 17}$$

Así,

$$17.416 < \sqrt{304} < 17.441$$

Lo que es una aproximación bastante razonable, si no se tiene calculadora. ■

(11) *a*) Demuestre que para todo $x > 0$ se cumple que

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$$

b) Demuestre que para todo $0 < a < b$ se cumple que

$$1 - \frac{a}{b} < \ln\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b}{a} - 1$$

Solución:

a) Consideremos la función auxiliar

$$h(x) = 1 + \frac{x}{3} - \sqrt[3]{1+x}$$

Notemos que la desigualdad pedida equivale a demostrar que $h(x) > 0$ en el intervalo $(0, \infty)$. Derivando

$$h'(x) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3(1+x)^{2/3}} = \frac{(1+x)^{2/3} - 1}{3(1+x)^{2/3}}$$

observamos que $h'(x) > 0$ pues $(1+x)^{2/3} > 1$ en $(0, \infty)$. Luego, h es una función creciente en dicho intervalo. Además $h(0) = 0$, entonces $h(x) > 0$ para todo $x > 0$. Por ello,

$$\sqrt[3]{1+x} < 1 + \frac{x}{3}$$

b) Para entender mejor el problema, podemos manipular la expresión de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b}{a} - 1 \quad &\leftrightarrow \quad \frac{b-a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b-a}{a} \\ &\leftrightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a} < \frac{1}{a} \end{aligned}$$

Luego, usando el teorema del Valor Medio, sabemos que existe un $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \frac{1}{c}$$

Ahora, como la función $\dfrac{1}{x}$ es estrictamente decreciente, se tiene la siguiente desigualdad:

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a}$$

para todo $x \in (a, b)$, y en particular para $x = c$, de lo que obtendremos que

$$\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a}$$

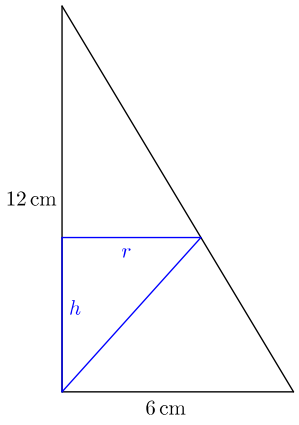
■

IV.ii. Máximos y mínimos, gráfico de funciones y otros

(1) Se desea inscribir un cono circular recto en otro cono circular recto más grande, de manera que sus bases sean paralelas y que el vértice del cono inscrito se encuentre en el centro de la base del cono mayor. Si las dimensiones de dicho cono son 6 cm de radio y 12 cm de altura, determine la altura h y el radio r del cono inscrito de volumen máximo. Recuerde que el volumen de un cono circular recto viene dado por $V = \dfrac{\pi r^2 h}{3}$.

Solución:

Si hacemos una proyección del problema sobre el plano, veremos la siguiente situación:



Aplicando semejanza de triángulos, notamos que

$$\frac{12}{6} = \frac{12 - h}{r} \quad \longrightarrow \quad h = 12 - 2r$$

De lo anterior se deduce que:

$$V(r) = \frac{\pi r^2 (12 - 2r)}{3}\ , \quad 0 \leq r \leq 6$$

y con ello

$$V'(r) = 8\pi r - 2\pi r^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad r_1 = 0,\ r_2 = 4$$

Para determinar el máximo, evaluamos los puntos críticos en conjunto con los extremos del intervalo:

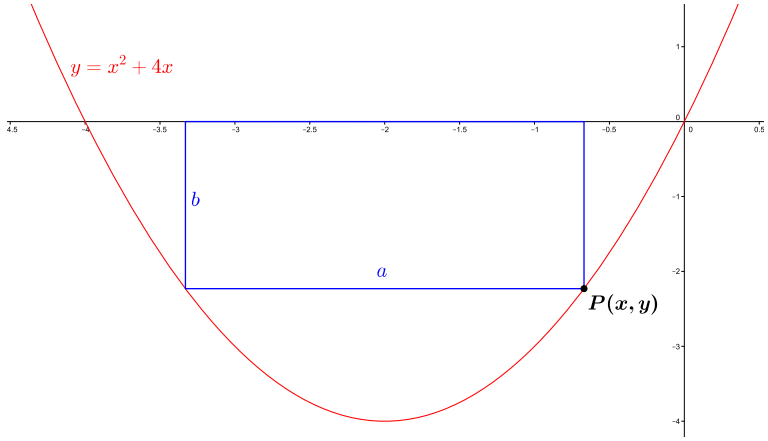
$$V(0) = V(6) = 0 \quad \wedge \quad V(4) = \frac{64\pi}{3}$$

Por tanto, las dimensiones del cono de máximo volumen son $r = 4\,\text{cm}$ y $h = 4\,\text{cm}$. ■

(2) Determine el área máxima que puede tener una rectángulo inscrito en la región limitada por la parábola $y = x^2 + 4x$ y el eje X.

Solución:

Para facilitar el análisis, y dado que la parábola es muy simple de dibujar, realicemos un esquema de la situación. Sean a, b el largo y alto, respectivamente, del rectángulo inscrito y P uno de sus vértices tal que, además, pertenece a la parábola. Así,



Notemos que, como la distancia entre las raíces de la parábola es igual a 4 unidades, y esta es simétrica con respecto al eje que pasa por su vértice, entonces:

$$a = 4 + 2x$$

donde el hecho se sumar $2x$ se explica porque la componente x del vértice $P(x, y)$ es negativa. Como la componente y del vértice $P(x, y)$ también es negativa –pues está bajo el eje X– y el alto debe ser positivo, se cumple que:

$$b = -y$$

Por tanto, el área del rectángulo está dada por:

$$\begin{aligned} A &= ab = -y(4 + 2x) \\ &= -(x^2 + 4x)(2x + 4) = -2x^3 - 12x^2 - 16x \end{aligned}$$

donde el dominio de x está acotado al intervalo $[-2, 0]$ pues estamos utilizando la simetría del rectángulo en torno al eje que pasa por el vértice de la parábola. Derivando,

$$A'(x_0) = -6{x_0}^2 - 24x_0 - 16 = 0 \qquad \longrightarrow {x_0}^{\pm} = -2 \pm \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Como $x \in [-2, 0]$, solo nos quedamos con ${x_0}^+$. Para determinar el área máxima, evaluamos los puntos críticos y los extremos en la función objetivo:

$$A(-2) = A(0) = 0 \qquad \wedge \qquad A({x_0}^+) = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

Por tanto, el área máxima del rectángulo es:

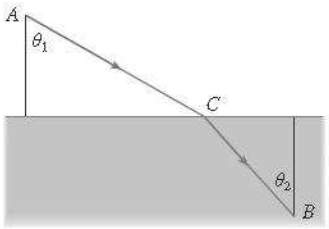
$$A_{\text{máx}} = \frac{32\sqrt{3}}{9}$$

■

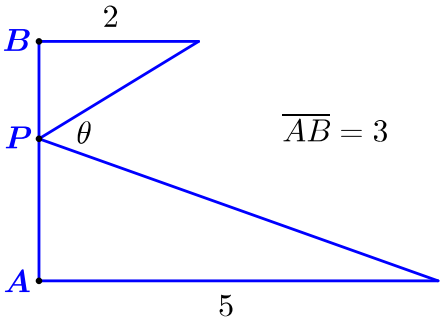
(3) *a*) Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. De acuerdo con el *Principio de Fermat*, un rayo de luz viajará desde un punto en el aire a otro punto en el agua por el camino que minimize el tiempo de viaje. Demuestre que:

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 (ángulo de incidencia) y θ_2 (ángulo de refracción) son conocidos. Ésta ecuación es conocida como la *Ley de Snell.*



b) ¿Dónde debería estar ubicado el punto P sobre el segmento de línea $\overline{AB} = 3$ para maximizar el ángulo θ?

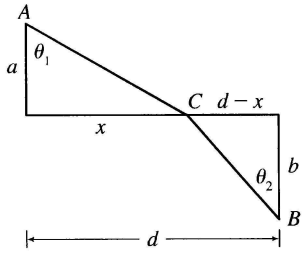


Solución:

a) El tiempo total es:

$$T(x) = T_{A\to C}(x) + T_{C\to B}(x)$$

$$T(x) = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{v_2}, \ 0 < x < d$$



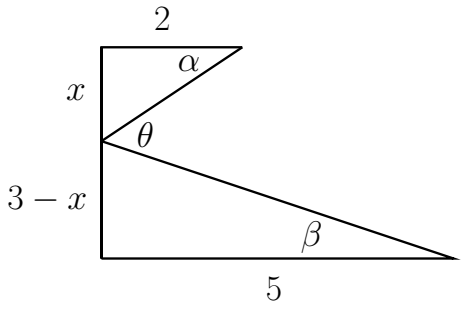
Así,

$$T'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{a^2+x^2}} - \frac{d-x}{v_2\sqrt{b^2+(d-x)^2}} = \frac{\sin\theta_1}{v_1} - \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

El mínimo ocurre cuando $T'(x) = 0$ (notar que $T''(x) > 0$). Finalmente,

$$T'(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sin\theta_1}{v_1} = \frac{\sin\theta_2}{v_2}$$

b) De la figura, $\tan\alpha = \dfrac{x}{2}$ y $\tan\beta = \dfrac{3-x}{5}$. Dado que $\theta = \alpha + \beta$, se cumple que:



$$\theta = \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + \arctan\left(\frac{3-x}{5}\right)$$

con $0 \leq x \leq 3$. Así,

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{2}{4+x^2} - \frac{5}{25+(3-x)^2}$$

Notemos que

$$\frac{d\theta}{dx} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{2}{4+x^2} = \frac{5}{25+(3-x)^2} \;\Rightarrow\; x^2+4x-16 = 0 \;\Rightarrow\; x = -2 \pm 2\sqrt{5}$$

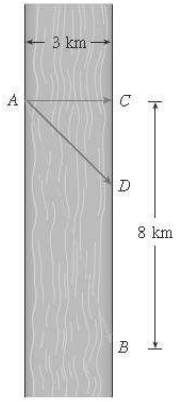
Descartamos la raíz negativa, puesto que $0 \leq x \leq 3$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\theta(0) &= \arctan\left(\frac{3}{5}\right) \approx 0.54 \\
\theta(3) &= \arctan\left(\frac{3}{2}\right) \approx 0.98 \\
\theta(-2+2\sqrt{5}) &= \arctan\left(\sqrt{5}-1\right) + \arctan\left(\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\right) \approx 0.99
\end{aligned}$$

Con ello, el ángulo en cuestión se maximiza cuando $\overline{AP} = x = -2+2\sqrt{5}$.

■

(4) Considere la siguiente situación:
Un hombre lanza su barco desde un punto en la orilla de un río recto, de 3 $[km]$ de ancho, y quiere llegar a otro punto a 8 $[km]$ río abajo en la orilla opuesta. Dicha persona puede remar en su barca directamente al punto B, remar hasta C y luego correr hasta B o realizar una mezcla de ambas posibilidades (remar hasta D y luego correr hasta B). Si el hombre rema a 6 $[km/h]$ y corre a 8 $[km/h]$, ¿dónde debe desembarcar para realizar el trayecto lo más rápidamente posible? Suponga que la velocidad del agua es insignificante.



Solución:

Sea x la distancia entre C y D. Por tanto, la distancia a recorrer a pie es de $P = 8 - x$ y la distancia a recorrer en bote, por *Teorema de Pitágoras* es de $B = \sqrt{x^2 + 9}$.
El tiempo que le toma realizar el viaje puede escribirse como sigue:

$$t_{total}(x) = t(x) = t_B(x) + t_P(x)$$

Así, utilizando la fórmula clásica $t = \frac{d}{v}$ y reemplazando tanto las distancias como las velocidades en cada uno de los tramos, tenemos que:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2+9}}{6} + \frac{8-x}{8} \qquad , x \in [0, 8]$$
$$\Rightarrow t'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8}$$

No existe $x \in \mathbb{R}$ tal que la derivada no exista. Así, nuestros puntos críticos son los extremos del intervalo y donde se anule la derivada. Calculemos éste último:

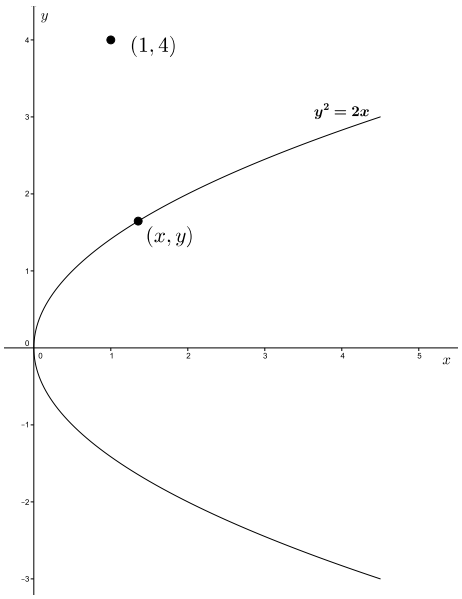
$$\begin{aligned} t'(x) = 0 &\longleftrightarrow \frac{x}{6\sqrt{x^2+9}} - \frac{1}{8} = 0 \longleftrightarrow 4x = 3\sqrt{x^2+9} \\ &\longleftrightarrow \quad 16x^2 = 9(x^2+9) \longleftrightarrow \qquad 7x^2 = 81 \\ &\longleftrightarrow \qquad\qquad x = \frac{9}{\sqrt{7}} \end{aligned}$$

Para encontrar el mínimo en la función tiempo, debemos reemplazar los puntos críticos en dicha función:

$$t(0) = 1.5 \qquad t\left(\frac{9}{\sqrt{7}}\right) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1.33 \qquad t(8) = \frac{\sqrt{73}}{6} \approx 1.42$$

Por tanto, el hombre debería remar $\frac{9}{\sqrt{7}} \approx 3.4\ [km]$ río abajo y lugo correr hasta su objetivo. ■

(5) Encuentre el punto en la parábola $y^2 = 2x$ que es más cercano al punto $(1, 4)$.



Solución:

La distancia entre el punto $(1,4)$ y (x,y) es:

$$d(x,y) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2}$$

Pero el punto (x,y) pertenece a la parábola, luego:

$$d(y) = \sqrt{\left(\frac{y^2}{2} - 1\right)^2 + (y-4)^2}$$

Dado que las distancias son positivas, minimizaremos la función $d(y)^2$. Así,

$$d(y)^2 = f(y) = (x-1)^2 + (y-4)^2 \quad \longrightarrow \quad f'(y) = y^3 - 8$$

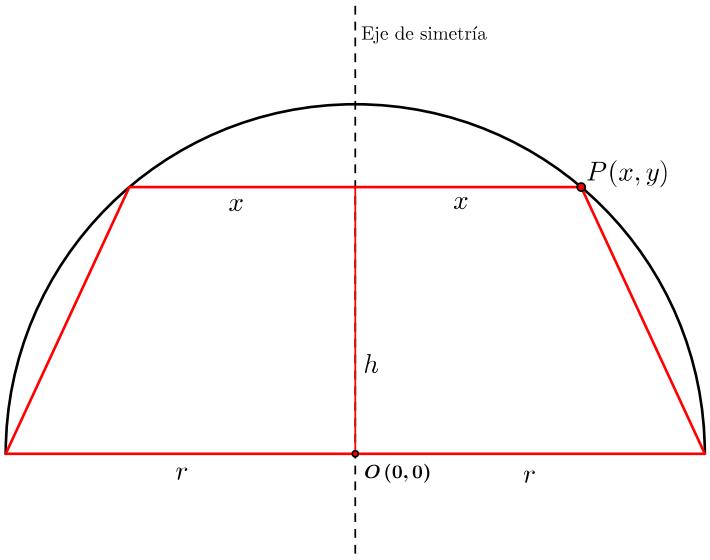
Por tanto, $f'(2) = 0$. Notemos que f' es negativa si $y < 2$ y positiva si $y > 2$. Entonces, la función tiene un único punto crítico en todo $\mathbb{R}$, lo que es consistente con la geometría del problema. Así, el punto tiene coordenadas $x = \frac{y^2}{2} = 2$, $y = 2$.

Finalmente, el punto más cercano a $(1,4)$ en la parábola descrita es $(2,2)$. ■

(6) Encuentre las dimensiones del trapecio isósceles de área máxima que puede ser inscrito en un semicírculo de radio r.

Solución:

Primero que todo, notemos que las bases de un trapecio son paralelas. Así, y usando el diámetro como una de las bases, la figura queda de la siguiente forma:



donde hemos llamado $x \in [0, r]$ a la mitad de la base que no es el diámetro (dada la simetría del trapecio isósceles) y $P(x,y)$ a uno de sus vértices fuera del diámetro del semicírculo. La altura del trapecio está dada por:

$$h = \sqrt{r^2 - x^2}$$

pues la distancia entre el origen O y el punto $P(x, y)$ es r. Luego, como el área del trapecio es la semisuma de las bases por la altura, tendremos que:

$$A(x) = \left(\frac{2x + 2r}{2}\right) h = (x + r)\sqrt{r^2 - x^2}$$

Derivando,

$$A'(x) = \sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - x^2 - x(x + r)}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{(r + x)(r - 2x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Necesitamos que $A'(x_0) = 0$ con $x_0 \in [0, r]$, por lo que el único valor posible es $x_0 = r/2$. Evaluando,

$$A(0) = r^2\,, \quad A(r) = 0\,, \quad A(r/2) = \frac{3\sqrt{3}r^2}{4}$$

Así, el máximo se alcanza en $x = \dfrac{r}{2}$. Finalmente, las dimensiones del trapecio de área máxima son bases $\dfrac{r}{2}$ y r, con altura $\dfrac{\sqrt{3}\,r}{2}$. ■

(7) Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$. Determine:

a) Dominio y raíces.
b) Máximos y mínimos.
c) Intervalos de crecimiento.
d) Puntos de inflexión.
e) Intervalos de concavidad.
f) Asíntotas.
g) Esbozo de su gráfico.

Solución:

Tenemos que $\text{Dom}\,(f) = \mathbb{R}$ y $f(x) = 0 \iff (x - 1)(x + 2) = 0 \iff x = 1,\ x = -2$. La primera derivada está dada por:

$$f'(x) = \frac{3x^2 - 3}{3(x^3 - 3x + 2)^{2/3}} = \frac{x + 1}{(x - 1)^{1/3}(x + 2)^{2/3}}$$

Ahora, y dado que $(x + 2)^{2/3} > 0$ para todo $x \in \text{Dom}\,(f)$, es posible concluir que:

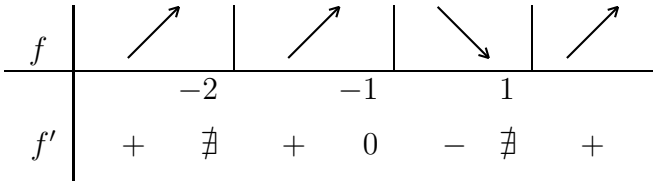
$$f' > 0 \iff x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$$

$$f' < 0 \iff x \in \,]-1, 1[$$

$$f' = 0 \iff x = -1$$

$$f' \nexists \iff x = 1,\ x = -2$$

Entonces,



Por otra parte, la segunda derivada está dada por:

$$f''(x) = \frac{-2}{(x-1)^{4/3}(x+2)^{5/3}}$$

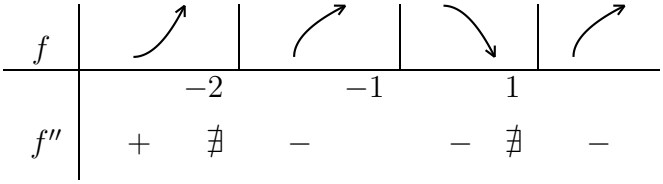
De acuerdo al mismo argumento que para la primera derivada, es posible concluir que

$$f'' > 0 \iff x < -2$$

$$f'' < 0 \iff x > -2$$

$$f'' \nexists \iff x = -2,\ x = 1$$

Así,



Ahora, las asíntotas:

- **VERTICALES**

  Dado que el dominio de la función son todos los reales, no hay asíntotas verticales

- **HORIZONTALES U OBLICUAS**

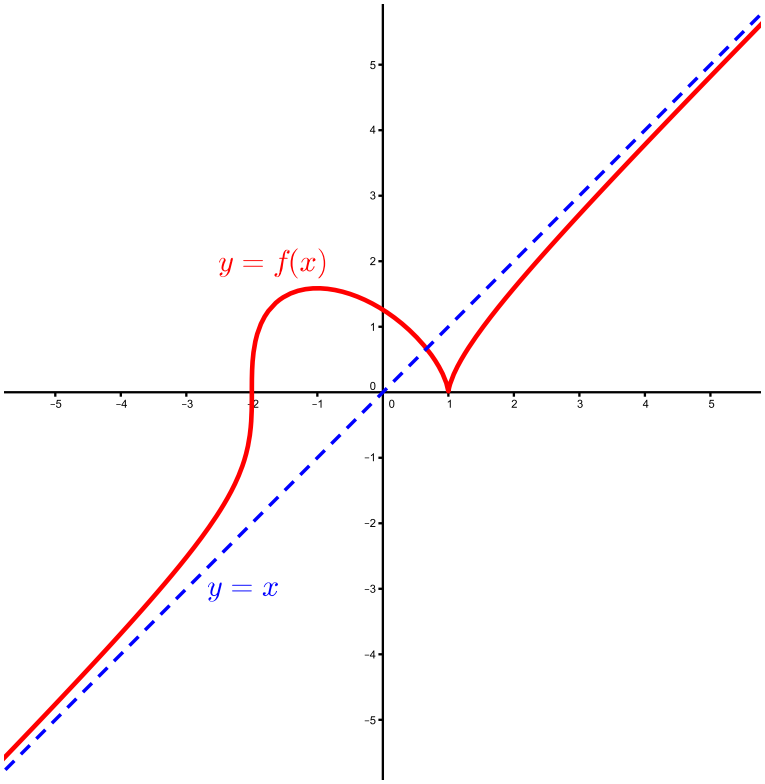
$$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \wedge \qquad n_1 = \lim_{x\to\infty} f(x) - m_1\, x = 0$$

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \qquad \wedge \qquad n_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - m_2\, x = 0$$

Así, $y = x$ es asíntota a la función hacia $\pm\infty$. Agrupando la información obtenida, podemos concluir que:

- f tiene un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$.
- f no tiene mínimos ni máximos globales.
- f tiene un punto de inflexión en $x = -2$.

Finalmente, el gráfico es



■

(8) Dada la función $g(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$. Determine los mismos elementos que la pregunta anterior.

Solución:

Tenemos que $\text{Dom}\,(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ y $g(x) = 0 \iff x = 0$. La primera derivada está dada por:

$$g'(x) = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3(2x)}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} = \left(\frac{x}{x^2-4}\right)^2 (x^2 - 12)$$

Ahora, y dado que paréntesis es mayor o igual a cero para todo $x \in \text{Dom}\,(f)$, es posible concluir que:

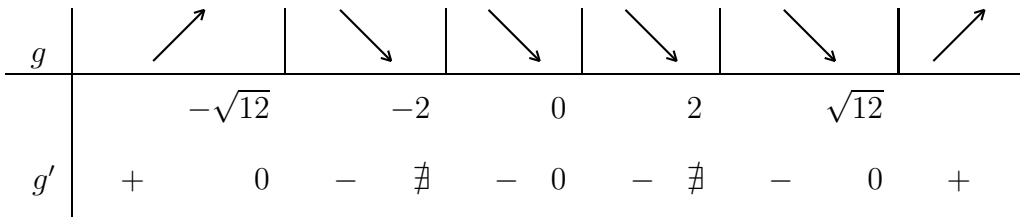
$$g' > 0 \iff x \in \mathbb{R} - [-\sqrt{12}, \sqrt{12}]$$

$$g' < 0 \iff x \in \,]-\sqrt{12}, \sqrt{12}[$$

$$g' = 0 \iff x = -0,\ x = -\sqrt{12},\ x = \sqrt{12}$$

$$g' \nexists \iff x = -2,\ x = 2$$

Entonces,



Por otra parte, la segunda derivada está dada por:

$$g''(x) = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3} = \left(\frac{8(x^2+12)}{(x^2-4)^2}\right)\frac{x}{x^2-4}$$

De acuerdo al mismo argumento que para la primera derivada, es posible concluir que

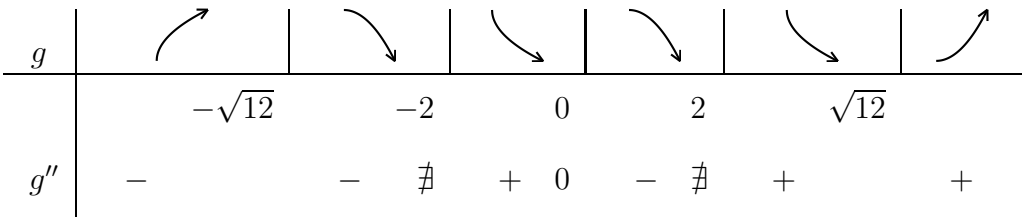
$$g'' > 0 \iff x \in (-2,0) \cup (2,\infty)$$

$$g'' < 0 \iff x \in (-\infty,-2) \cup (0,2)$$

$$g'' = 0 \iff x = 0$$

$$g'' \nexists \iff x = -2,\ x = 2$$

Así,



Ahora, las asíntotas:

- **VERTICALES**

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^3}{x^2-4} = \infty \qquad \wedge \qquad \lim_{x\to 2^-}\frac{x^3}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{x^3}{x^2-4} = \infty \qquad \wedge \qquad \lim_{x\to -2^-}\frac{x^3}{x^2-4} = -\infty$$

- **HORIZONTALES U OBLICUAS**

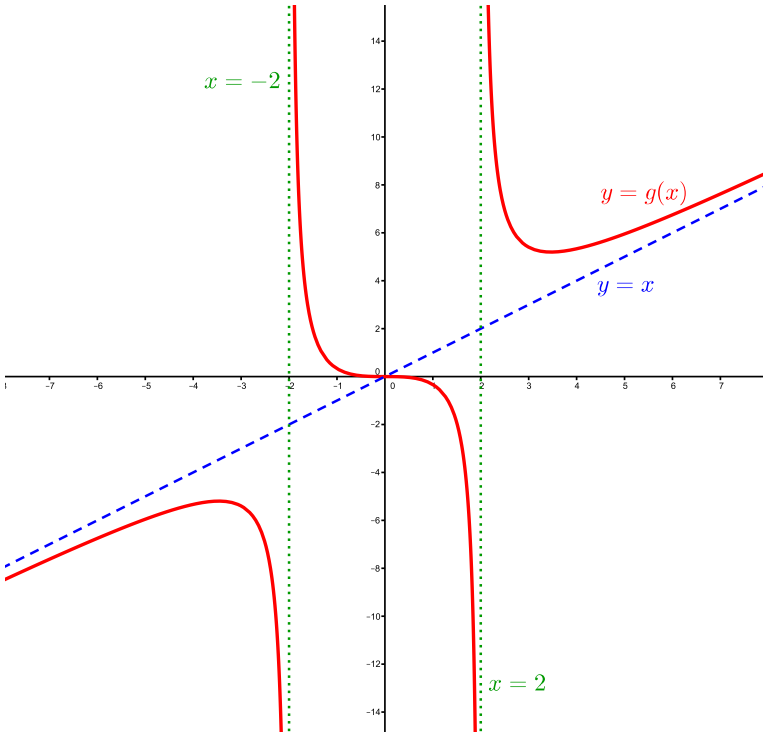
$$m_1 = \lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = 1 \qquad \wedge \qquad n_1 = \lim_{x\to\infty} g(x) - m_1 x = 0$$

$$m_2 = \lim_{x\to -\infty}\frac{g(x)}{x} = 1 \qquad \wedge \qquad n_2 = \lim_{x\to -\infty} g(x) - m_2 x = 0$$

Así, $y = x$ es asíntota a la función hacia $\pm\infty$ y $x = \pm 2$ son asíntotas verticales. Agrupando la información obtenida, podemos concluir que:

- g tiene un máximo local en $x = -\sqrt{12}$ y un mínimo local en $x = \sqrt{12}$.
- g no tiene mínimos ni máximos globales.
- g cambia su concavidad en $x = \pm 2$ y $x = 0$, pero solo tiene un punto de inflexión en $x = 0$ pues los demás valores no pertenecen al dominio.

Finalmente, el gráfico es



■

(9) Dada la función $h(x) = \dfrac{x^2 - \sqrt{x^2+1}}{x}$. Determine los mismos elementos que la pregunta anterior.

Solución:

Tenemos que $\text{Dom}\,(h) = \mathbb{R} - \{0\}$ y

$$h(x) = 0 \iff x^2 = \sqrt{x^2+1} \iff x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

pero $x^2 \geq 0$, luego

$$h(x) = 0 \iff x^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \iff x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

La primera derivada está dada por:

$$h'(x) = \frac{x\left(2x - \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right) - (x^2 - \sqrt{x^2+1})}{x^2} = \frac{x^2 + \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2} = 1 + \left(\frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\right)$$

Ahora, y dado que paréntesis es mayor que cero para todo $x \in \text{Dom}\,(h)$, es posible concluir que:

$$h' > 0 \iff x \in \text{Dom}\,(h)$$

$$h' \nexists \iff x = 0$$

Entonces, h es creciente en todo su dominio. No hay máximos ni mínimos locales. Por otra parte, la segunda derivada está dada por:

$$h''(x) = -\frac{3x^3 + 2x}{x^4(x^2+1)^{3/2}} = -\left(\frac{3x^2+2}{x^2(x^2+1)^{3/2}}\right)\frac{1}{x}$$

De acuerdo al mismo argumento que para la primera derivada, es posible concluir que

$$h'' > 0 \iff x < 0$$

$$h'' < 0 \iff x > 0$$

$$h'' \nexists \iff x = 0$$

Así,

h	↗		↗
		0	
h''	$+$	$\nexists$	$-$

Ahora, las asíntotas:

- **VERTICALES**

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2 - \sqrt{x^2+1}}{x} = -\infty \qquad \wedge \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{x^2 - \sqrt{x^2+1}}{x} = \infty$$

- **HORIZONTALES U OBLICUAS**

$$m_1 = \lim_{x\to\infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \qquad \wedge \qquad n_1 = \lim_{x\to\infty} h(x) - m_1\, x = -1$$

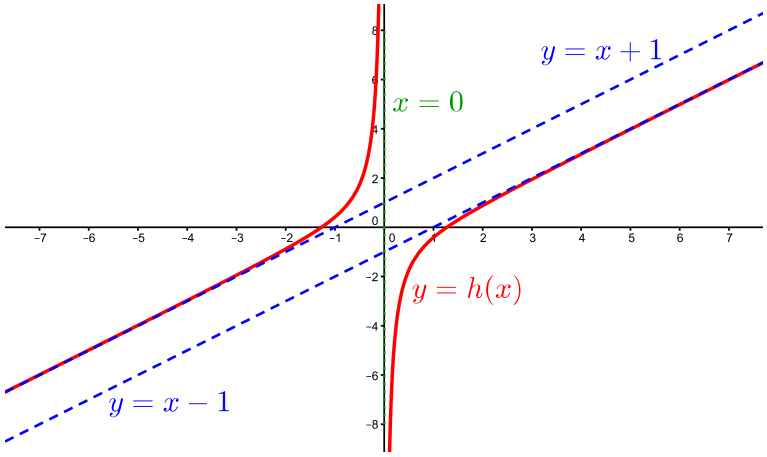
$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x)}{x} = 1 \qquad \wedge \qquad n_2 = \lim_{x\to-\infty} h(x) - m_2\, x = 1$$

Así, $y = x - 1$ es asíntota a la función hacia ∞, $y = x + 1$ es asíntota a la función hacia $-\infty$ y $x = 0$ es asíntota vertical. Agrupando la información obtenida, podemos concluir que:

- h no tiene máximos ni mínimos locales.

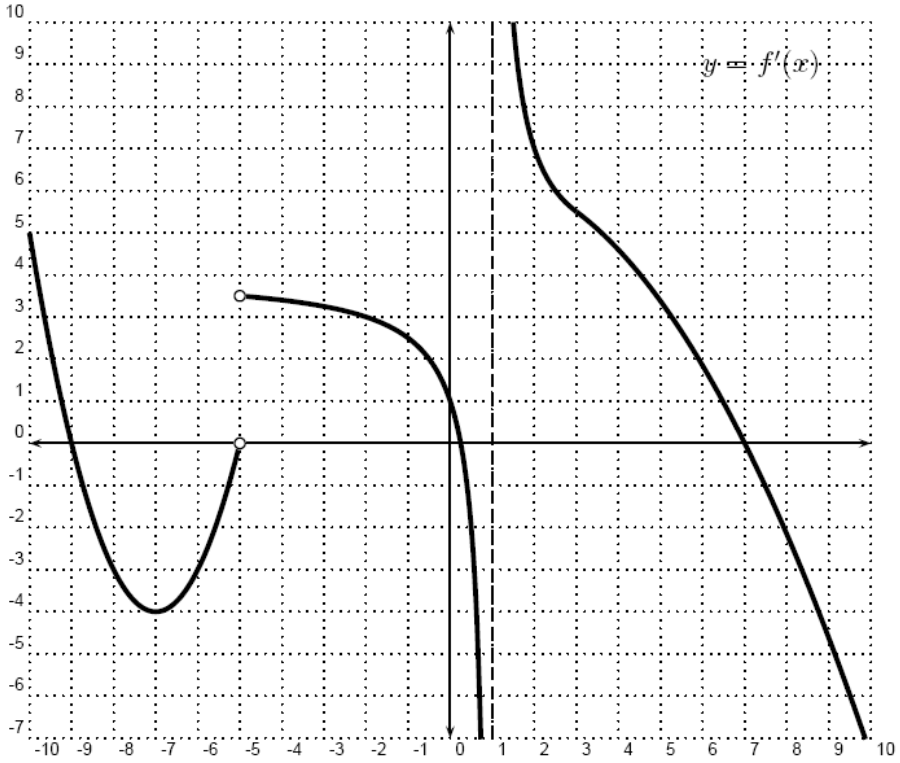
- h no tiene mínimos ni máximos globales.
- h cambia su concavidad en $x = 0$, pero no tiene puntos de inflexión pues dicho valor no pertenece al dominio.

Finalmente, el gráfico es



■

(10) La función $f(x)$ está definida a tramos en $[-10, 10]$ y es continua en ese intervalo. A continuación se presenta el gráfico de la función derivada de $f(x)$, $y = f'(x)$. Utilice dicho gráfico para indicar la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones:



a) $f''(-5)$ no existe.

b) En -7 hay un mínimo local de $f(x)$.

c) En 7 hay un máximo local de $f(x)$.

d) $f(x)$ tiene dos puntos de inflexión en el intervalo $[-10, 10]$.

e) $f(x)$ es decreciente en el intervalo $]1, 10[$.

f) En -5 hay tanto un mínimo como un punto de inflexión de $f(x)$.

Solución:

a) La afirmación es VERDADERA, pues como $f'(x)$ es discontinua en $x = -5$, entonces no existe su derivada en ese punto.

b) La afirmación es FALSA, pues en el intervalo $]-9, -5[$ la función derivada es negativa, por tanto, $f(x)$ es decreciente en ese intervalo y como no hay cambio de crecimiento, no hay ni un máximo ni un mínimo en ese intervalo.

c) La afirmación es VERDADERA, pues $f'(x) > 0$ si $1 < x < 7$ y $f'(x) < 0$ cuando $x > 7$. Entonces $f(x)$ pasa de ser creciente a ser decreciente en $x = 7$.

d) La afirmación es VERDADERA, pues $f(x)$ tiene un punto de inflexión cuando cambia su concavidad, es decir, cuando $f''(x)$ cambia de signo. Pero esto significa que $f'(x)$ tiene un cambio en su crecimiento. Al observar el gráfico, es claro que los únicos cambios en el crecimiento de la derivada se producen en -7 y en -5. Luego, los únicos puntos de inflexión de $f(x)$ ocurren en $x = -7$ y $x = -5$.

e) La afirmación es FALSA, pues $f'(x) > 0$ cuando $1 < x < 7$, entonces $f(x)$ es creciente en $]1, 7[$.

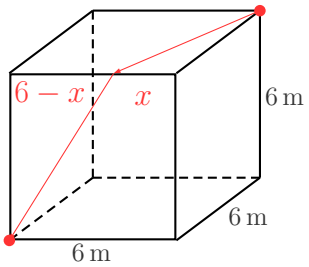
f) La afirmación es VERDADERA. En -5 hay un mínimo de $f(x)$ pues la derivada pasa de ser negativa a positiva y, por tanto, $f(x)$ pasa de ser decreciente a ser creciente. Además, en -5 hay un punto de inflexión de $f(x)$ porque la derivada pasa de ser creciente a ser decreciente, es decir, $f''(x)$ pasa de ser positiva a ser negativa en -5 y esto significa que $f(x)$ pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo.

■

(11) Una habitación tiene la forma de un cubo de arista 6 m. En un vértice superior de la habitación se encuentra una pequeña araña que desea llegar al vértice opuesto para atrapar a su presa. Si la araña solo puede desplazarse por las caras de la habitación, ¿Cuál es la trayectoria más corta?

Solución:

Sea s el camino recorrido por la araña y x el segmento indicado por la figura, luego:



$$s(x) = \sqrt{6^2 + (6-x)^2} + \sqrt{6^2 + x^2} \quad x \in [0, 6]$$

Tenemos que,

$$s'(x) = \frac{x-6}{\sqrt{36 + (6-x)^2}} + \frac{x}{\sqrt{36 + x^2}}$$

Para determinar los puntos críticos, $s'(x) = 0$, resolvemos:

$$\frac{x^2 - 12x + 36}{36 + (6-x)^2} = \frac{x^2}{36 + x^2}$$

y con ello $x = 3$. Para determinar el mínimo absoluto, comparamos $s(0),\ s(2),\ s(6)$ a través del estudio de:

$$\begin{array}{rcl} s(0) & \to & s(0)^2 = 108 + 72\sqrt{2} \\ s(0) & \to & s(3)^2 = 180 \\ s(6) & \to & s(6)^2 = 108 + 72\sqrt{5} \end{array}$$

y por tanto el camino más corto se consigue con $x = 3$. ■

IV.iii. Regla de L'Hôpital

(1) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \csc(x) - \dfrac{1}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to \infty} \sqrt{x}\Big(\pi - 2\arctan\left(\sqrt{x}\right)\Big)$

c) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left\{\pi - 2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right\}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0} \csc(x) - \frac{1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x) + x\cos(x)} = L$$

Así,

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + \cos(x) - x\sin(x)} = 0$$

b)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}(\pi-2\arctan(\sqrt{x}))=\lim_{x\to\infty}\frac{(\pi-2\arctan(\sqrt{x}))}{\frac{1}{\sqrt{x}}}=L$$

Ahora bien,

$$\frac{(\pi-2\arctan(\sqrt{x}))}{\frac{1}{\sqrt{x}}}\underbrace{=}_{L'H}\frac{\frac{1}{(1+x)x^{1/2}}}{\frac{1}{2x^{3/2}}}=\frac{2x}{x+1}=2$$

Por tanto,

$$L=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=2$$

c) El límite en cuestión puede escribirse de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{\pi-2\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)}{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{-2}{\sqrt{1-\frac{x^2}{x^2+1}}}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{2x^2}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}}{1\frac{1}{x^2}}\\ &= \lim_{x\to\infty}2x^2\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2+1}\\ &= 2\end{aligned}$$

■

(2) Aplicando directamente la Regla de L'Hôpital, determine los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

b) $\lim_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x)}{x}$

c) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x^2}{e^{-x}}$

d) $\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sqrt{x}$

e) $\lim_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$

f) $\lim_{x\to0+}(\sin(x))^x$

g) $\lim_{x\to1+}\left(\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Solución:

a) El límite es de la forma $\frac{0}{0}$. Por tanto, aplicamos directamente la regla:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{1}=2$$

b) El límite es de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Por tanto, aplicamos directamente la regla:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

c) Tenemos:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{e^{-x}}\underbrace{=}_{L'H}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x}{-e^{-x}}\underbrace{=}_{L'H}\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=0$$

d) Notemos que la sustitución directa nos entrega la forma $0\cdot\infty$. Debemos adaptar nuestro límite para aplicar la regla:

$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\sqrt{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{e^x}\underbrace{=}_{L'H}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}e^x}=0$$

e) A priori, el límite es de la forma 1^∞. Así, supongamos que dicho límite existe y vale L. Con ello,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\\
\ln(L) &= \ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\right] \quad \text{por continuidad,}\\
&= \lim_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\\
&= \lim_{x\to\infty}x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{1/x} \quad \text{L'H...}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{(-1/x^2)\frac{1}{1+1/x}}{-1/x^2}\\
&= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+1/x}\\
\ln(L)=1 &\Rightarrow L=e
\end{aligned}$$

f) La sustitución directa nos entrega la forma indeterminada 0^0. Por tanto, inicialmente supon-

gamos que el límite existe y vale L. Así,

$$\begin{aligned}
L &= \lim_{x\to 0+} (\sin(x))^x \\
\ln(L) &= \ln\left[\lim_{x\to 0+} (\sin(x))^x\right] \quad \text{por continuidad,} \\
&= \lim_{x\to 0+} \ln\left((\sin(x))^x\right) \\
&= \lim_{x\to 0+} x\ln(\sin(x)) \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin(x))}{\frac{1}{x}} \quad \text{L'H...} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{\cot(x)}{-1/x^2} = \lim_{x\to 0+} \frac{-x^2}{\tan(x)} \quad \text{L'H...} \\
&= \lim_{x\to 0+} \frac{-2x}{\sec^2(x)} = 0 \\
\ln(L) = 0 &\Rightarrow L = 1
\end{aligned}$$

g) Esta forma indeterminada es del tipo $(\infty - \infty)$. La idea es intentar trabajar sobre el límite para así utilizar la regla directamente:

$$\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1+}\left(\frac{x-1-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)}\right)$$

y ahora es de la forma $\frac{0}{0}$. Así,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1}\right) &= \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1-(1/x)}{(x-1)(1/x)\ln(x)}\right) \\
&= \lim_{x\to 1+}\left(\frac{x-1}{x-1+x\ln(x)}\right) \quad \text{L'H...} \\
&= \lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{1+x(1/x)+\ln(x)}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

(3) Calcule los valores de a, b si se sabe que

$$\lim_{h\to 0}\left(\frac{\arctan(5h)}{h^2} + \frac{a}{h} + b\right) = 12$$

Solución:

Notemos que:

$$\frac{\arctan(5h)}{h^2} + \frac{a}{h} + b = \frac{\arctan(5h) + ah + bh^2}{h^2}$$

Si $h \to 0$, la fracción anterior posee la forma indeterminada "0/0" sin importar los valores de a, b. Por ello, podemos emplear la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\arctan(5h)}{h^2}+\frac{a}{h}+b\right) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\arctan(5h)+ah+bh^2}{h^2}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{5}{1+(5h)^2}+a+2bh}{2h}\right)\end{aligned}$$

Si en el límite anterior el numerador no se anula cuando $h \to 0$, entonces no hay forma de que el cociente tienda a 12, pues el denominador se va a cero. Por tanto, se concluye que:

$$\frac{5}{1+(5h)^2}+a+2bh \xrightarrow[h\to 0]{} 5+a \equiv 0 \qquad \therefore\ a=-5$$

Con esta imposición, podemos volver a aplicar la regla de L'Hôpital pues el límite vuelve a ser de la forma "0/0":

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\left(\frac{\arctan(5h)}{h^2}+\frac{a}{h}+b\right) &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{\dfrac{5}{1+(5h)^2}+a+2bh}{2h}\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{-\dfrac{250h}{(1+25h^2)^2}+2b}{2}\right)\\ &= b\end{aligned}$$

Como deseamos que el límite valga 12, se cumple que $b = 12$. Así, los valores de las constantes son

$$a=-5 \qquad \wedge \qquad b=12$$

■

(4) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable con f'' continua y $f(0) = 0$. Considere

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)}{x} & \text{si } x\neq 0\\[2ex] f'(0) & \text{si } x=0\end{cases}$$

Calcule $g'(x)$.

Solución:

Si $x \neq 0$ se tiene que

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}$$

Para calcular la derivada en $x = 0$, utilizamos su definición:

$$g'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - hf'(0)}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(h) - f'(0)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{f''(h)}{2}$$

Lo anterior se obtiene luego de ocupar L'Hôpital dos veces. Finalmente el límite pedido es $\dfrac{f''(0)}{2}$ ya que la función $f''(x)$ es continua. Juntando todo,

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{xf'(x) - f(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \\ \dfrac{f''(0)}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

■

IV.iv. Teorema de Taylor

(1) Determine los polinomios de Taylor en torno a $x_0 = 0$ de las siguientes funciones:

a) $f(x) = e^x$

b) $g(x) = \sin(x)$

c) $h(x) = \ln(x + 1)$

Solución:

a) Recordemos la fórmula del polinomio de Taylor de orden n en torno a x_0:

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

con

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

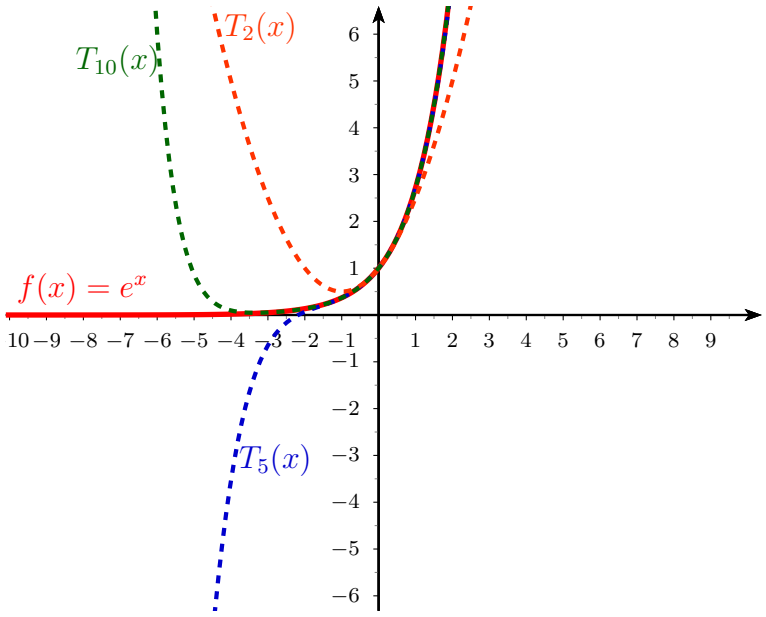
$$R_n(x) = \frac{f^{n+1}(z)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \qquad z \in (x, x_0)$$

En este caso, notemos que $f^{(k)} = e^x,\ \forall k$. Así,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e^{x_0}}{k!}(x - x_0)^k + R_n(f)$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(f)$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(f)$$



Aproximaciones a la función $f(x) = e^x$ con polinomios de Taylor.

b) En el caso de la función seno, se tiene que:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(0)}(0) = 0 \\
f^{(1)}(x) &= \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(1)}(0) = 1 \\
f^{(2)}(x) &= -\sin(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(2)}(0) = 0 \\
f^{(3)}(x) &= -\cos(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(3)}(0) = -1 \\
f^{(4)}(x) &= \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f^{(4)}(0) = 0
\end{aligned}$$

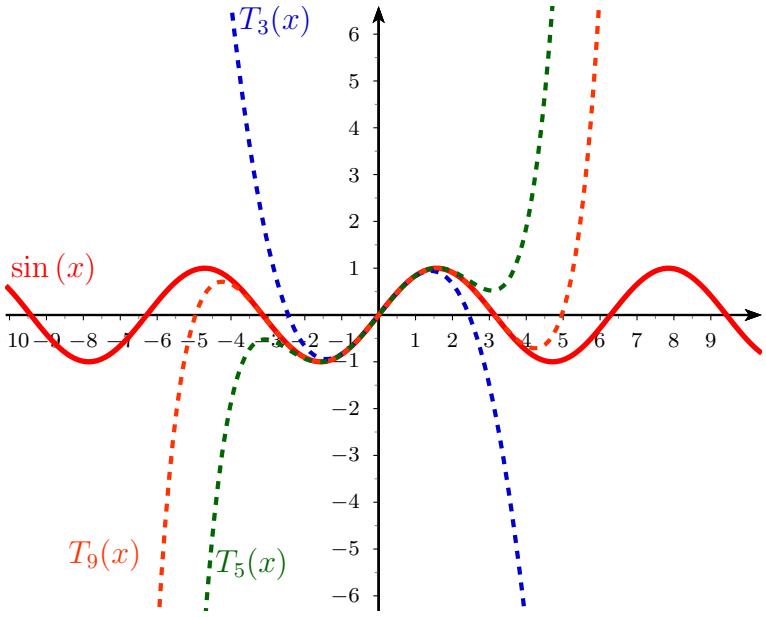
Notemos que

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \sin(x) & k = 0, 4, 8, \cdots \\ \cos(x) & k = 1, 5, 9, \cdots \\ -\sin(x) & k = 2, 6, 10, \cdots \\ -\cos(x) & k = 3, 7, 11, \cdots \end{cases}$$

Así,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_n(f)$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} + R_n(f)$$



Aproximaciones a la función $f(x) = \sin(x)$ con polinomios de Taylor.

c) Para el caso del logaritmo natural, vemos que:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \ln(x+1) \\
f^{(1)}(x) &= \frac{1}{x+1} \\
f^{(2)}(x) &= -\frac{1}{(x+1)^2} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{2}{(x+1)^3} \\
&\vdots \\
f^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^{k+1}\,(k-1)!}{(x+1)^k}, \text{ si } k > 0
\end{aligned}$$

Entonces, para $k > 0$ tenemos:

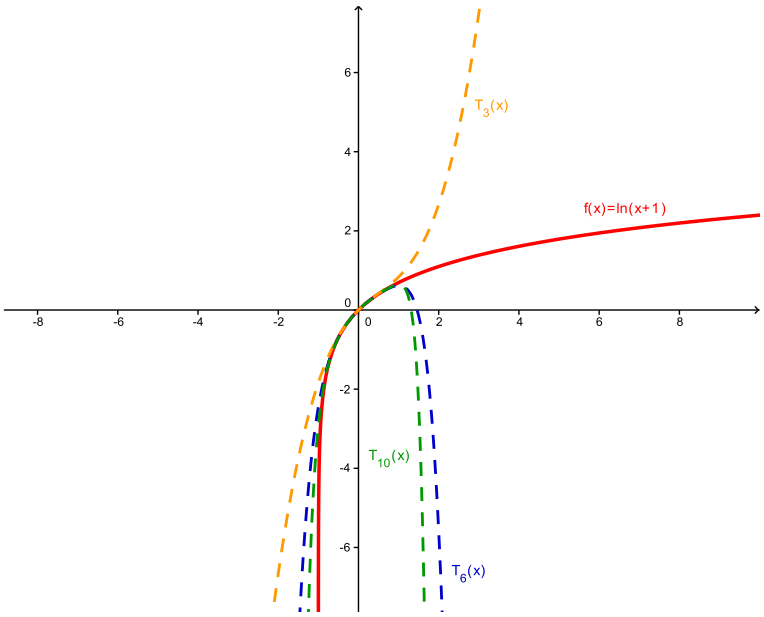
$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{(-1)^{k+1}\,(k-1)!}{(x_0+1)^k\,k!}(x-x_0)^k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x)^k$$

Para $k = 0$ tenemos:

$$\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \frac{\ln(1)}{0!} = 0$$

Así,

$$\ln(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x)^n + R_n(f)$$



Aproximaciones a la función $f(x) = \ln(x+1)$ con polinomios de Taylor.

■

(2) Si $P(x) = 1 + \frac{1}{4}(x-1)^2$ es el Polinomio de Taylor de orden 2 de $y = f(x)$ en $x = 1$, demuestre que f tiene un mínimo local en $x = 1$.

Solución:

Como el polinomio de Taylor de segundo orden cumple

$$p(1) = f(1), \quad p'(1) = f'(1), \quad p''(1) = f''(1)$$

y $p(1) = 1,\ p'(1) = 0,\ p''(1) = \frac{1}{2}$, tenemos que $f(1) = 1,\ f'(1) = 0,\ f''(1) = \frac{1}{2}$. Entonces, por el criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos concluimos que $x = 1$ es un mínimo local para f.

■

(3) *a*) Utilice el Teorema de Taylor para aproximar $\sin(0.1)$ con su polinomio de grado $n = 3$ y determine la precisión de la aproximación.

b) Determine el grado del polinomio de Taylor desarrollado en torno a $x_0 = 1$ que debe utilizarse para aproximar $\ln(1.2)$ de manera que el error sea menor que 0.001.

Solución:

a) Recordemos que:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4, \qquad 0 < z < 0.1$$

Por consiguiente,

$$\sin(0.1) \approx 0.1 - \frac{(0.1)^3}{6} \approx 0.1 - 0.000167 = 0.099833$$

Como $f^{(4)}(z) = \sin(z)$, se sigue que el error $|R_3(0.1)|$ puede acotarse como sigue:

$$0 < \sin(z) < 1$$

$$0 < \frac{\sin(z)}{4!} < \frac{1}{4!}$$

$$0 < \frac{\sin(z)}{4!}(0.1)^4 < \frac{1}{4!}(0.1)^4 \approx 0.000004$$

$$0 < R_3(z) < 0.000004$$

Lo que implica que,

$$0.099833 < \sin(0.1) = 0.099833 + R_3(z) < 0.099833 + 0.000004$$

$$0.099833 < \sin(0.1) < 0.099837$$

b) Utilizando los cálculos anteriores, notemos que para $f(x) = \ln(x+1)$:

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$$

Por tanto, por el Teorema de Taylor sabemos que el error $|R_n(1.2)|$ está dado por:

$$\begin{aligned} |R_n(1.2)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(1.2-1)^{n+1} \right| &= \frac{n!}{z^{n+1}} \left[\frac{1}{(n+1)!}(0.2)^{n+1} \right] \\ &= \frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)} \end{aligned}$$

de donde $1 < z < 1.2$. En este intervalo $\frac{(0.2)^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)}$ es menor que $\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)}$. Así, buscamos n tal que:

$$\frac{(0.2)^{n+1}}{(n+1)} < 0.001 \Longrightarrow 1000 < (n+1)5^{n+1}$$

Por ensayo y error, u otro método de cálculo, puede determinarse que el menor valor de n que satisface la desigualdad es $n = 3$.

■

(4) Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Sea $R : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que sea $n - veces$ derivable en cierto entorno de $x_0 \in I$. Entonces,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R(x)}{(x-x_0)^n} = 0 \Longleftrightarrow R(x_0) = R'(x_0) = \cdots = R^{(n)}(x_0) = 0$$

b) Si $R_n(x)$ es el resto del polinomio de Taylor de grado n, entonces pruebe que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Solución:

a) ($\Longleftarrow$) Dado que la función es $n-veces$ diferenciable, utilizamos la regla de L'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n} &\underbrace{=}_{\mathcal{L}'\mathcal{H}} \lim_{x\to x_0}\frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{(n-1)}}\\ &\underbrace{=}_{\mathcal{L}'\mathcal{H}} \lim_{x\to x_0}\frac{R^{(2)}(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{(n-2)}}\\ &\cdots\\ &\underbrace{=}_{\mathcal{L}'\mathcal{H}} \lim_{x\to x_0}\frac{R^n(x)}{n!(x-x_0)^{(0)}}\\ &= 0\end{aligned}$$

($\Longrightarrow$) Si $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{R(x)}{(x-x_0)^n}$ existe, entonces debe cumplirse que $\lim\limits_{x\to x_0}R(x)=0$. Como la función R es continua, $R(x_0)=0$.
Ahora bien, por la regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R'(x)}{n(x-x_0)^{(n-1)}}=0$$

Repitiendo el argumento anterior, es claro que $\lim\limits_{x\to x_0}R'(x)=0$ y, como la función R' es continua -dado que R es $n-veces$ diferenciable- se concluye que $R'(x_0)=0$.
Iterando el proceso anterior $n-veces$, finalmente concluiremos que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{R^n(x)}{n!(x-x_0)^{(0)}}=0$$

y por tanto $R^{(n)}(x_0)=0$. Finalmente,

$$R(x_0)=R'(x_0)=\cdots=R^{(n)}(x_0)=0$$

b) Como por definición de resto de Taylor, $R_n(x)=f(x)-T_n(f,x_0)$, tenemos que R_n es derivable $n-veces$ y que además todas sus derivadas hasta el orden n y su valor funcional en $x=x_0$ son cero, entonces por el Teorema anterior tenemos que

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n}=0$$

■

(5) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin(x) - x}$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2(x) - \ln(1+x^2)}{x^2 - x\tan(x)}$

Solución:

a) Utilizando los desarrollos de MacLaurin de las funciones que se encuentran tanto en el numerador como en el denominador, es decir, como

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} = \frac{x^3}{6} + R_3(x), \qquad \text{con } \lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0$$

$$\sin(x) - x = -\frac{x^3}{6} + r_3(x), \qquad \text{con } \lim_{x\to 0} \frac{r_3(x)}{x^3} = 0$$

Así,

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{\sin(x) - x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6} + R_3(x)}{-\frac{x^3}{6} + r_3(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{6} + \frac{R_3(x)}{x^3}}{-\frac{1}{6} - \frac{r_3(x)}{x^3}} = -1$$

b) Todos los polinomio de Taylor se calcularan con $n = 5$. El polinomio de Taylor de $\sin(x)$ para $n = 5$, se puede obtener a partir de tomar el cuadrado del polinomio de Taylor de grado 5 para $\sin(x)$, es decir:

$$\begin{aligned}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right)^2 &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)^2 + 2\left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\frac{x^5}{5!} + \left(\frac{x^5}{5!}\right)^2 \\ &= x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{10} - \frac{x^8}{60} + \frac{x^{10}}{120^2}\end{aligned}$$

Luego, el polinomio de Taylor de $\sin^2(x)$ que necesitamos es

$$x^2 - \frac{x^4}{3}$$

Usando el polinomio de Taylor para $\ln(1+x)$, obtenemos el polinomio de grado 5 para $\ln(1+x^2)$, que viene dado por

$$x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} \Longrightarrow x^2 - \frac{x^4}{2}$$

Finalmente, debemos obtener el polinomio de Taylor de $\tan(x)$ de grado cinco o inferior; para esto usamos los polinomios de Taylor de las funciones seno y coseno, dividiéndolas de la siguiente manera:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}}$$

$$\begin{array}{rcl} \left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}\right) & : & \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\right) \quad = \quad x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15} \\ -\left(x-\frac{x^3}{2!}+\frac{x^5}{4!}\right) & & \\ \hline \frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{30} & & \\ -\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{6}+\frac{x^7}{72}\right) & & \\ \hline \frac{2x^5}{15}-\frac{x^7}{72} & & \end{array}$$

Entonces,

Considerando los tres polinomios antes calculados,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(x)-\ln(1+x^2)}{x^2-x\tan(x)} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-\frac{x^4}{3}-x^2+\frac{x^4}{2}}{x^2-x^2-\frac{x^4}{3}-\frac{2x^6}{15}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^4}{6}}{-\frac{x^4}{3}-\frac{2x^6}{15}} \\ &= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}}{-\frac{1}{3}-\frac{2x^2}{15}} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

■

(6) [Propuesto] Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$ funciones dos veces diferenciables tales que $f(a) = f(a)$, $f'(a) = g'(a)$. Demuestre que si, para todo $x \in I$, se tiene que $f(x) \geq g(x)$ entonces $f''(a) \geq g''(a)$.

Solución:

Por el teorema de Taylor, tenemos que:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2}h^2 + R(f) \quad , \quad g(a+h) = g(a) + g'(a)h + \frac{g''(a)}{2}h^2 + R(g)$$

donde

$$\lim_{h\to 0}\frac{R(f)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{R(g)}{h} = 0$$

Así,

$$f(a+h) - g(a+h) = \Big(f''(a) - g''(a)\Big)\frac{h^2}{2} + \Big(R(f) - R(g)\Big)$$

Por otra parte, $h^2/2 \geq 0$ y dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de modo que si $h \in (-\delta, \delta)$ entonces $|R(f) - R(g)| < \epsilon$ (hemos usado que el error se "va rápido" a cero).

Por lo tanto, el signo de la diferencia $f(a+h) - g(a+h)$ coincide con el signo de $f''(a) - g''(a)$. Como, por hipótesis, $f(a+h) \geq g(a+h)$ tenemos que:

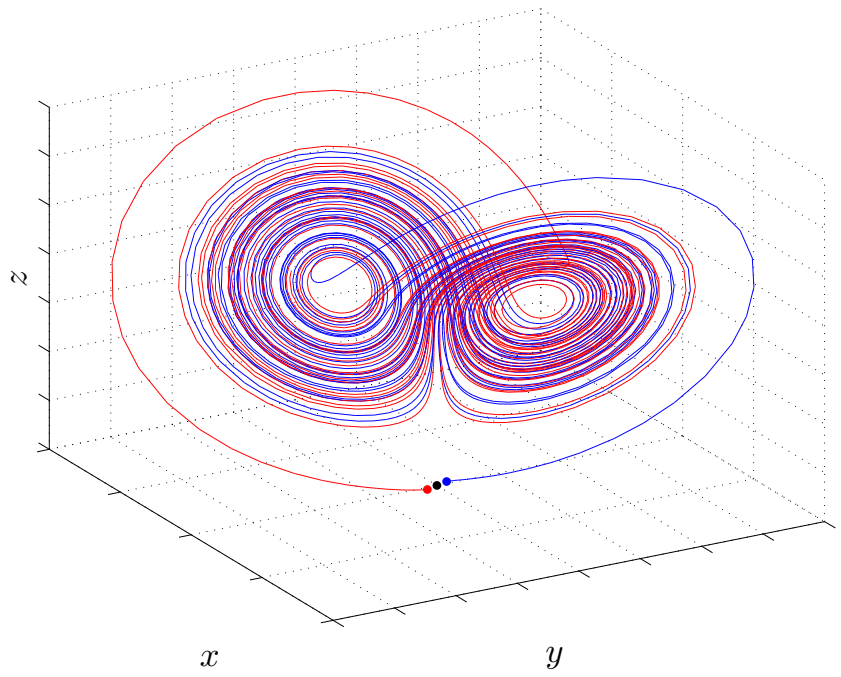
$$f''(a) \geq g''(a)$$

de donde se obtiene el resultado. ■

2

Cálculo integral en una variable

Atractor de Lorenz (Edward Lorenz, 1963)



Integral de Riemann

I.i. Propiedades de la integral

(1) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sean $\mathcal{P},\ \mathcal{P}^*$ dos particiones de $[a, b]$ tales que $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}^*$. Demuestre que

$$s(f, \mathcal{P}) \leq s(f, \mathcal{P}^*)$$
$$S(f, \mathcal{P}) \geq S(f, \mathcal{P}^*)$$

y utilice ese resultado para probar que si $\mathcal{P},\ \mathcal{Q}$ son dos particiones de $[a, b]$ entonces

$$s(f, \mathcal{P}) \leq S(f, \mathcal{Q})$$

Solución:

Bastará probarlo en el caso en que $\mathcal{P}^*$ tiene un elemento más que $\mathcal{P}$; para los demás casos es suficiente iterar el razonamiento añadiendo en cada paso un punto nuevo hasta conseguir lo pedido. Supongamos que $\mathcal{P}^* = \mathcal{P} \cup \{c\}$ con:

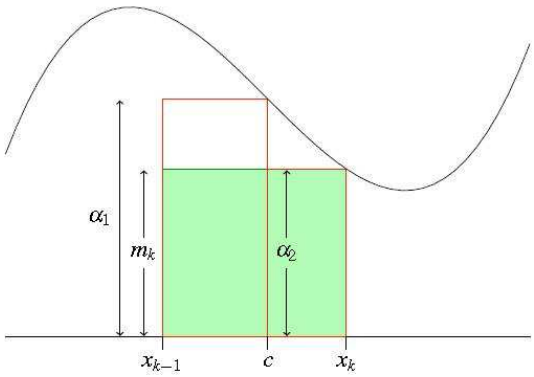
$$\mathcal{P} \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

$$\mathcal{P}^* \equiv \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < c < x_k \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

Sean m_i los ínfimos correspondientes a la partición $\mathcal{P}$ y sean

$$\alpha_1 = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$$

$$\alpha_2 = \text{ínf}\,\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$$



Entonces, $m_k \leq \alpha_1$, $m_k \leq \alpha_2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} s(f, \mathcal{P}^*) - s(f, \mathcal{P}) &= [\alpha_1(c - x_{k-1}) + \alpha_2(x_k - c)] - [m_k(x_k - x_{k-1})] \\ &= \geq [m_k(c - x_{k-1}) + m_k(x_k - c)] - [m_k(x_k - x_{k-1})] = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}^*)$$

Análogamente, sean M_i los supremos correspondientes a P y sean

$$\beta_1 = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, c]\}$$

$$\beta_2 = \sup\{f(x) : x \in [c, x_k]\}$$

Entonces, $M_k \leq \beta_1$, $M_k \leq \beta_2$ y con ello $S(f,\mathcal{P}^*) - S(f,\mathcal{P}) = [\beta_1(c - x_{k-1}) + \beta_2(x_k - c)] - [M_k(x_k - x_{k-1})] \leq 0$

$$\Rightarrow S(f,P^*) \leq S(f,P)$$

Ahora, sean $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ particiones de $[a,b]$. Entonces

$$s(f,\mathcal{P}) \leq s(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leq S(f,\mathcal{Q})$$

■

(2) Calcule la integral superior e inferior de la función $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & , x \in [0,1] \\ 1 & , x \in (1,2] \text{ irracional} \\ 0 & , x \in (1,2] \text{ racional} \end{cases}$$

Solución:

Recordemos que el valor de una integral no se ve afectada por la presencia de un punto adicional. Las integrales en cuestión se definen como sigue:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \text{ínf}\{S(f,P) : \ P \text{ partición de } [a,b]\}$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(f,P) : \ P \text{ partición de } [a,b]\}$$

Así, sea

$$\mathcal{P} \equiv \{0 = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{k-1} < x_k = 1 < x_{k+1} \cdots < x_{n-1} < x_n = 2\}$$

Sean M_i los supremos correspondientes a la partición $\mathcal{P}$ y éstos valen:

$$M_i = \begin{cases} 2 & , \text{si } i \leq k \\ 1 & , \text{si } i > k \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned} S(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} M_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2 \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} 2 \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= 2 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3 \end{aligned}$$

Por otra parte, m_i los ínfimos correspondientes a la partición $\mathcal{P}$ y

$$m_i = \begin{cases} 2 & \text{, si } i \leq k \\ 0 & \text{, si } i > k \end{cases}$$

y con ello,

$$\begin{aligned} s(f,P) &= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} m_i(x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} 2 \cdot (x_i - x_{i-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} 0 \cdot (x_i - x_{i-1}) \\ &= 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 2 \end{aligned}$$

Como la partición $\mathcal{P}$ es arbitraria, tenemos que:

$$\overline{\int_0^2} f(x)dx = 3$$

$$\underline{\int_0^2} f(x)dx = 2$$

■

(3) Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, idénticamente no nula y no negativa. Demuestre que $\int_a^b f(x)dx > 0$

Solución:

Tenemos que $f(x) \geq 0$, por tanto $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ ya que ínf $\{f(x) : x \in [a,b]\} \geq 0$. Notemos que la función f es continua y no idénticamente nula, i.e. $\exists c \in (a,b)$ tal que $f(c) > 0$.
Como f es continua,

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ tal que } x \in (c-\delta, c+\delta) \to f(x) \in (f(c)-\epsilon, f(c)+\epsilon)$$

En particular, sea $\epsilon = \frac{f(c)}{2}$. Notemos que:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^b f(x)dx \\ &\geq 0 + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx + 0 = \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx\end{aligned}$$

Recordemos que si $x \in (c-\delta, c+\delta)$ entonces $f(x) \geq f(c) - \epsilon = \frac{c}{2}$. Por tanto,

$$\text{ínf}\{f(x) : x \in (c-\delta, c+\delta)\} \geq \frac{f(c)}{2} > 0$$

Así,

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \geq 2\delta \cdot \frac{f(c)}{2} = \delta \cdot f(c) > 0$$

Finalmente,

$$\int_a^b f(x)dx > 0$$

■

(4) Pruebe las siguientes afirmaciones:

a) Sean f y g funciones integrables en $[a,b]$ tales que $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

b) Si f es integrable en $[a,b]$, entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Solución:

a) Si $f \leq g$ entonces $0 \leq g - f$, y es claro entonces que $s(g-f, \mathcal{P}) \geq 0$ para cualquier partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$. Como además $g - f$ es integrable, se deduce que:

$$0 \leq s(g-f, \mathcal{P}) \leq \int_a^b (g-f) = \int_a^b g - \int_a^b f$$

Por tanto,

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g$$

b) Como f es integrable, es acotada. Luego, $|f|$ también es acotada. Sean $M_i,\ m_i$ los supremos e ínfimos de una partición $\mathcal{P}$ arbitraria. Así,

$$\begin{aligned} S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\Delta x_i \\ S(|f|,\mathcal{P}) - s(|f|,\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{n} (M_i^{'} - m_i^{'})\Delta x_i \end{aligned}$$

Como $\sup(A) - \text{ínf}(A) = \sup\{|x-y| : x, y \in A\}$ entonces

$$\begin{aligned} M_i - m_i &= \sup\{|f(t) - f(s)| : t, s \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i^{'} - m_i^{'} &= \sup\{||f(t)| - |f(s)|| : t, s \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{aligned}$$

Por desigualdad triangular reversa, $||f(t)|-|f(s)|| \leq |f(t)-f(s)|$. Entonces $M_i^{'}-m_i^{'} \leq M_i - m_i$ y con ello $S(|f|,\mathcal{P}) - s(|f|,\mathcal{P}) \leq S(f,\mathcal{P}) - s(f,\mathcal{P})$. Por tanto, como f es integrable resulta que $|f|$ también lo es.

Ahora, como $f \leq |f|$ y $-f \leq |f|$ podemos utilizar la propiedad antes demostrada para concluir que $\displaystyle\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$ y $\displaystyle\int_a^b (-f) = -\int_a^b f \leq \int_a^b |f|$. Luego,

$$\left|\int_a^b f\right| = \text{máx}\left\{\int_a^b f, -\int_a^b f\right\} \leq \int_a^b |f|$$

■

(5) *a)* Sea f una función acotada e integrable en $[a,b]$. Demuestre que $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ es continua en $[a,b]$.

b) Encuentre una función f acotada e integrable en $[a,b]$ con $a < 1 < b$ tal que $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\ dt$ no posee derivada en $x = 1$. Justifique su respuesta.

Solución:

a) Sea $x_0 \in [a,b]$ arbitrario. Entonces,

$$g(x) = \int_a^x f(t)\ dt = \int_a^{x_0} f(t)\ dt + \int_{x_0}^x f(t)\ dt = g(x_0) + \int_{x_0}^x f(t)\ dt$$

Como f es acotada en $[a,b]$, existe un real M tal que $-M \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$. Por tanto,

$$-\int_{x_0}^x M\ dt = -M(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t)\ dt \leq \int_{x_0}^x M\ dt = M(x - x_0)$$

Vemos que $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \int_{x_0}^x f(t)\ dt$ existe y es igual a 0; por lo tanto, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) + 0 = g(x_0)$ y por tanto es continua.

b) Basta considerar alguna función integrable que tenga una discontinuidad esencial en $x = 1$. Por ejemplo,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \leq x \leq 1 \\ \\ 1 & \text{si} \quad 1 < x \leq b \end{cases}$$

Entonces,

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad a \leq x \leq 1 \\ \\ x-1 & \text{si} \quad 1 < x \leq b \end{cases}$$

Se cumple que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = 0$$

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{g(1+h) - g(1)}{h} = \frac{(1+h-1) - 0}{h} = 1$$

y por tanto g no es derivable en $x = 1$.

■

I.ii. Sumas de Riemann

(1) Demuestre que, si $f(x)$ es una función Riemann-Integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \to \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

y de aquí deduzca que:

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Solución:

Recordemos la definición dada por Riemann para su integral: *Una función f acotada definida en un intervalo $[a, b]$ se dice que es Riemann integrable en $[a, b]$ si existe un número I en los reales tal que, para todo número real positivo ϵ existe una δ positiva tal que si $\mathcal{P}$ es una partición de $[a, b]$ con $\|\mathcal{P}\| < \delta$ y $S(\mathcal{P}, f)$ es cualquier suma de Riemann entonces $|S(\mathcal{P}, f) - I| < \epsilon$.*

Entonces, sea f una función que cumple con las características anteriores:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Así, sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ definida de la siguiente manera:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$x_{k-1} \leq c_k \leq x_k$$

Dado que la función es integrable para cualquier suma de Riemann, tomaremos una partición de n subintervalos de la misma longitud:

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

Elegiremos c_k como el punto terminal derecho de cada subintervalos. Así:

$$c_k = a + k(\Delta x) = a + \frac{(b-a)k}{n}$$

Dado que la función es integrable, es claro que:

$$|S(P,f) - I| < \epsilon \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) \frac{b-a}{n} \right| < \epsilon$$

Con ello, refinando nuestra partición $\mathcal{P}$ aumentando el número de subintervalos:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right)$$

Ahora bien, aplicando el resultado anterior tenemos que:

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

■

(2) Halle la integral definida $\displaystyle\int_{-2}^{1} 2x\ dx$

Solución:

Para realizar este problema, utilizaremos el resultado de la parte anterior. Así, definimos los elementos a utilizar:

$$\Delta x_k = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}$$
$$c_k = a + k(\Delta x) = a + \frac{(b-a)k}{n} = -2 + \frac{3k}{n}$$

De este modo, la integral definida queda como sigue:

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x\ dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(a + \frac{(b-a)k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \sum_{k=1}^{n} 2\left(-2 + \frac{3k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(-2 + \frac{3k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \left[-2n + \frac{3}{n}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} -12 + 9 + \frac{9}{n} \\
&= -3
\end{aligned}$$

■

(3) Utilizando sumas de Riemann, determine $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx$

Solución:

Tenemos $a = 0$, $b = 2\pi$, $\Delta x = \dfrac{2\pi}{n}$ y finalmente $c = 0 + \dfrac{2\pi k}{n}$. Así,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \sum_{k=1}^{n} \underbrace{2\sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}_{2\sin(x)\sin(y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+1)\right)}_{(i)}
\end{aligned}$$

Trabajemos un poco más sobre (i). Estamos bastante cerca de obtener dos sumas telescópicas que nos permitan resolver la sumatoria. Para ello, sumamos $\cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
(i) &= \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k-1)\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}k\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{n}(k+1)\right) \\
&= \cos(0) - \cos(2\pi) + \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right) \\
&= \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)
\end{aligned}$$

Retomemos la integral,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(x)\, dx &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)} \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right) \\
&= \pi \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{2\pi(n+1)}{n}\right)}{\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)}\right) \\
&= \pi \cdot 0 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

■

(4) Calcule los siguientes límites:

$a)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right]$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n^2+1} + \dfrac{n}{n^2+4} + \cdots + \dfrac{n}{n^2+n^2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+(n-1)}$

HINT: $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+b) - \ln(1+a)$ y $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(b) - \arctan(a)$

Solución:

a) Existen varias maneras de realizar el límite anterior, pero dado que conocemos la integral de Riemann, intentaremos utilizar dicha herramienta para realizar el cálculo. La idea es formar una suma de Riemann y, dado que existe un paso al límite, transformarla en una integral fácil de calcular.

Notemos que:

$$\begin{aligned} S(n) &= \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{6\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) \\ &= \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + \underbrace{\sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right)}_{=\,0} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\, S(n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin(x)\,dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

b) Similar al ejercicio anterior.

$$S(n) = \frac{n}{n^2+1} + \frac{n}{n^2+4} + \cdots + \frac{n}{n^2+n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2}$$

Pero, si dividimos, tanto numerador como denominador, por n^2 tendremos:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\frac{1}{n}}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

Ahora, lo anterior es muy parecido a una suma de Riemann, haciendo $b-a=1$ y $c_k=\frac{k}{n}$. Para que ambos resultados sean consistentes, $a=0$ y $b=1$. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S(n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+c_k^2}\Delta x_k\\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx\\ &= \arctan(1)-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

c) Sea

$$S(n)=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+(n-1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}-\frac{1}{n+n}+\frac{1}{n}$$

Notemos que:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}$$

Igual que en el caso anterior, si $b-a=1$ y $c=k/n$ entonces $a=0$ y $b=1$. Así,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} S(n) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}+\frac{1}{n}\\ &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n}\right)\\ &= \int_0^1\frac{1}{1+x}\,dx\\ &= \ln(1+1)-\ln(1+0)=\ln(2)\end{aligned}$$

■

(5) Acote las siguientes integrales según se indica:

a) $1.15\leq\displaystyle\int_1^3\frac{dx}{\sqrt[4]{5+4x-x^2}}\leq 1.25$

b) $0.7<\displaystyle\int_5^7\frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}}\leq 1$

Solución:

a) En estos ejercicios la idea es tomar una expresión inicial que esté acotada y luego comenzar a trabajar la desigualdad hasta llegar a lo pedido en el enunciado. Notemos que:

$$5+4x-x^2=9-(x-2)^2$$

Haciendo uso de las técnicas del capítulo anterior, podemos determinar que $\forall x \in [1,3]$ se tiene que:

$$8 \leq 9-(x-2)^2 \leq 9 \quad \Big/ \sqrt[4]{()}$$

$$\sqrt[4]{8} \leq \sqrt[4]{9-(x-2)^2} \leq \sqrt[4]{9} \quad \Big/ ()^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt[4]{9}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{9-(x-2)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \quad \Big/ \int_1^3 () \, dx$$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[4]{9}} \, dx \leq \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{9-(x-2)^2}} \leq \int_1^3 \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \, dx$$

Finalmente,

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[4]{9}} \, dx = \frac{2}{\sqrt[4]{9}} \approx 1.154$$

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt[4]{8}} \, dx = \frac{2}{\sqrt[4]{8}} \approx 1.189$$

Así,

$$1.15 \leq \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5+4x-x^2}} \leq 1.25$$

b) Haciendo uso de las técnicas del capítulo anterior, podemos determinar que $\forall x \in [5,7]$ se tiene que:

$$4 \leq 9-5\cos(x) < 8 \quad \Big/ \sqrt{()}$$

$$2 \leq \sqrt{9-5\cos(x)} < \sqrt{8} \quad \Big/ ()^{-1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{8}} < \frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}} \leq \frac{1}{2} \quad \Big/ \int_5^7 () \, dx$$

$$\frac{2}{\sqrt{8}} < \int_5^7 \frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}} \leq 1$$

Pero $\frac{2}{\sqrt{8}} \approx 0.7071 > 0.7$. Así,

$$0.7 < \int_5^7 \frac{1}{\sqrt{9-5\cos(x)}} \leq 1$$

■

(6) Sea $A_a^b(f)$ el valor medio de una función f en $[a,b]$, definido por:

$$A_a^b(f) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx$$

Demuestre que si $a < c < b$, entonces existe un número t, $0 < t < 1$, tal que

$$A_a^b(f) = t \cdot A_a^c(f) + (1-t) \cdot A_c^b(f)$$

Además demuestre que

$$A_a^b(f+g) = A_a^b(f) + A_a^b(g) \quad \text{y que} \quad A_a^b(k \cdot f) = k \cdot A_a^b(f)$$

Solución:

Primero que todo, notemos que $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)A_a^b(f)$. Por otra parte, para $a < c < b$ se cumple que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx$$

Por el *Teorema del valor medio para integrales*, se cumple que:

$$\int_a^c f(x)\ dx = (c-a)A_a^c(f) \quad \text{y} \quad \int_c^b f(x)\ dx = (b-c)A_c^b(f)$$

Por tanto,

$$\int_a^b f(x)\ dx = (b-a)A_c^b(f) = (c-a)A_a^c(f) + (b-c)A_c^b(f)$$

$$\Longrightarrow A_a^b(f) = \frac{c-a}{b-a}A_a^c(f) + \frac{b-c}{b-a}A_c^b(f)$$

Como $a < c < b$ es claro que $0 < c-a < b-a$. Por tanto, $0 < \frac{c-a}{b-a} < 1$. Entonces, nombrando $t = \frac{c-a}{b-a}$ es evidente que $1 - t = \frac{b-a}{b-a} - \frac{c-a}{b-a} = \frac{b-c}{b-a}$. Por tanto,

$$A_a^b(f) = t \cdot A_a^c(f) + (1-t) \cdot A_c^b(f),\ 0 < t < 1$$

Ahora, se hace evidente que:

$$\begin{aligned}
(b-a)A_a^b(f+g) &= \int_a^b f(x)+g(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx \\
A_a^b(f+g) &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\ dx \\
\therefore\ A_a^b(f+g) &= A_a^b(f) + A_a^b(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(b-a)A_a^b(k \cdot f) &= \int_a^b k \cdot f(x)\ dx = k \cdot \int_a^b f(x)\ dx \\
A_a^b(k \cdot f) &= k \cdot \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\ dx \\
\therefore\ A_a^b(k \cdot f) &= k \cdot A_a^b(f)
\end{aligned}$$

■

(7) **[Propuesto]** Calcule el siguiente límite, identificándolo como una suma de Riemann.

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k-1}{n^3}}$$

Solución:

Trabajemos un poco sobre la suma:

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k-1}{n^3}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k+(k-1)}{n}}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2\left(\frac{k+(k-1)}{2n}\right)}$$

que corresponde a la suma de Riemann de $f(x)=\sqrt{2x}$ en el intervalo $[0,1]$ considerando la partición regular

$$\mathcal{P}=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},\frac{3}{n},\cdots,\frac{(n-1)}{n},1\right\}$$

y evaluando en el punto medio $\dfrac{k+(k-1)}{2n}$ del $k-$ésimo subintervalo. Como la función es continua, calculamos directamente:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{2k-1}{n^3}}=\int_0^1\sqrt{2x}\,dx=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

■

(8) *a*) Demuestre que

$$\frac{37}{84}<\int_1^3\frac{3}{1+x^3}\,dx<\frac{11}{6}$$

b) Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\sin\left(\frac{a}{n}\right)+\sin\left(\frac{2a}{n}\right)+\cdots+\sin\left(\frac{(n-1)a}{n}\right)\right\}=\frac{1-\cos(a)}{a}$$

si $a\neq 0$.

Solución:

a) Como $f(x)=\dfrac{3}{1+x^3}$ es decreciente para la parte izquierda/derecha de la desigualdad tomamos la suma inferior/superior de una partición de $[1,3]$. Debemos darnos cuenta de que, en este caso, requerimos que la partición tenga dos sub-intervalos: $\mathcal{P}_1=\{1,2,3\}$ pues tomar la partición $\mathcal{P}_2=\{1,3\}$ no nos entrega las cotas deseadas. La verificación se deja propuesta al lector. Así,

$$\frac{3}{1+2^3}+\frac{3}{1+3^3}=\frac{37}{84}<\int_1^3\frac{3}{1+x^3}\,dx<\frac{3}{1+1^3}+\frac{3}{1+2^3}=\frac{11}{6}$$

b) La expresión dentro del límite podemos escribirla como sigue:

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} \sin\left(\frac{ka}{n}\right)$$

En ella reconocemos la función $f(x) = \sin(ax)$, una partición regular del intervalo $[0, 1]$ con valores

$$x_k = \frac{k}{n} \quad \wedge \quad \Delta x_k = \frac{1}{n}$$

escogidos para evaluar la respectiva suma. En resumen, tenemos una suma de Riemann asociada a la función integrable $f(x) = \sin(ax)$ en el intervalo $[0, 1]$. Al tomar el límite de esta expresión, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left\{ \sin\left(\frac{a}{n}\right) + \sin\left(\frac{2a}{n}\right) + \cdots + \sin\left(\frac{(n-1)a}{n}\right) \right\} = \int_0^1 \sin(ax)\ dx$$

Como esta última integral tiene por primitiva $-\dfrac{\cos(ax)}{a}$, en este caso evaluada en $x = 0$ y $x = 1$ respectivamente, finalmente se cumple que:

$$\int_0^1 \sin(ax)\ dx = -\frac{\cos(a)}{a} + \frac{\cos(0)}{a} = \frac{1 - \cos(a)}{a}$$

que es el valor pedido.

■

Sección II

Funciones definidas a partir de la integral

II.i. Teorema Fundamental del Cálculo

(1) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo, determine:

a) $\displaystyle\int_1^2 (x^2-3)\,dx$

b) $\displaystyle\int_1^4 (3\sqrt{x})\,dx$

c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} |1+2\cos(x)|\,dx$

e) El área de la región delimitada por la gráfica de $y=2x^2-3x+2$, el eje X y las rectas verticales $x=0$ y $x=2$.

Solución:

a)
$$\int_1^2 (x^2-3)\,dx = \left[\frac{x^3}{3}-3x\right]_1^2 = \left(\frac{8}{3}-6\right)-\left(\frac{1}{3}-3\right) = -\frac{2}{3}$$

b)
$$\int_1^4 3\sqrt{x}\,dx = 3\int_1^4 x^{1/2}\,dx = \left[3\,\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^4 = 2(4)^{3/2}-2(1)^{3/2} = 14$$

c)
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^2(x)\,dx = \tan(x)\Big|_0^{\pi/4} = 1-0=1$$

d) Notemos que:
$$|1+2\cos x| = \begin{cases} 1+2\cos x & \text{si } x\in\left[0,\dfrac{2\pi}{3}\right] \\ -1-2\cos x & \text{si } x\in\left(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{4\pi}{3}\right) \\ 1+2\cos x & \text{si } x\in\left[\dfrac{4\pi}{3},2\pi\right] \end{cases}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\Phi &= \int_0^{2\pi} |1+2\cos(x)|\ dx \\
&= \int_0^{\frac{2\pi}{3}} (1+2\cos x)\ dx + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (-1-2\cos x)\ dx + \int_{\frac{4\pi}{3}}^{2\pi} (1+2\cos x)\ dx \\
&= \Big[x+2\sin x\Big]_0^{2\pi/3} + \Big[-x-2\sin x\Big]_{2\pi/3}^{4\pi/3} + \Big[x+2\sin x\Big]_{4\pi/3}^{2\pi} \\
&= \left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{2\pi}{3}+2\sqrt{3}\right) + \left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right) \\
&= \frac{2\pi}{3}+4\sqrt{3}
\end{aligned}$$

e) Dado que $y > 0$, podemos interpretar a la integral de Riemann como el área bajo la curva. Así,

$$\text{Área} = \int_0^2 (2x^2-3x+2)\ dx = \left[\frac{2x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

■

(2) Demuestre que si la función h es continua y $f,\ g$ son derivables y si

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} h(t)\ dt$$

entonces se tiene que $F'(x) = h\Big(g(x)\Big)\,g'(x) - h\Big(f(x)\Big)\,f'(x)$. Utilice este hecho para resolver los siguientes problemas:

a) Halle la derivada de $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x-t)\sin(t^2)\ dt$.

b) Para $x > 0$, pruebe que $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^2} - \int_{1/x}^1 \frac{dt}{1+t^2}$ es constante y determine su valor.

c) Dada la función $f(x) = 3 + \displaystyle\int_0^x \frac{1+\sin(t)}{2+t^2}\ dt$, determine un polinomio $p(x) = ax^2+bx+c$ tal que $p(0) = f(0),\ p'(0) = f'(0),\ p''(0) = f''(0)$.

d) Si f es una función continua de período T, demuestre que para todo número real a se tiene $\displaystyle\int_0^T f(t)\ dt = \int_a^{T+a} f(t)\ dt$

Solución:

Dado que la función h es continua entonces, por el *Teorema Fundamental del Cálculo*, existe una función H derivable tal que $H' = h$. Con ello,

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} = H(g(x)) - H(f(x))$$

Derivando la expresión anterior con respecto a x, dado que F es diferenciable -porque h es continua- al igual que H, tenemos:

$$F'(x) = H'(g(x)) \cdot g'(x) - H'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Pero $H'(u) = h(u)$, entonces:

$$F'(x) = h(g(x)) \cdot g'(x) - h(f(x)) \cdot f'(x)$$

a) Tenemos que:

$$F(x) = \int_{\sqrt{x}}^{x^2} (x-t)\sin(t^2)\ dt = \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{x^2} x\sin(t^2)\ dt}_{F_1(x)} - \underbrace{\int_{\sqrt{x}}^{x^2} t\sin(t^2)\ dt}_{F_2(x)}$$

Ahora,

$$\begin{aligned} {F_1}'(x) &= x \cdot \left(\sin(x^4)2x - \sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) + \int_{\sqrt{x}}^{x^2} \sin(t^2)\ dt \\ F_2'(x) &= x^2\sin(x^4)2x - \sqrt{x}\sin(x)\frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x^3\ \sin(x^4) - \frac{\sin(x)}{2} \end{aligned}$$

Así,

$$F'(x) = {F_1}'(x) - {F_2}'(x)$$

b) Notemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(\int_1^x \frac{dt}{1+t^2}\right) &= \frac{1}{1+x^2} \\ \frac{d}{dx}\left(\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{dt}{1+t^2}\right) &= -\frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\frac{-1}{x^2} = \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

Por tanto, $F'(x) = 0$. Ahora, $F(1) = 0$ y con ello la constante es igual a 0.

c) Calculando,

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + \int_0^x \frac{1+\sin(t)}{2+t^2}\ dt \\ f'(x) &= \frac{1+\sin(x)}{2+x^2} \\ f''(x) &= \frac{2\ \cos(x) + \cos(x)\,x^2 - 2\,x - 2\,x\sin(x)}{\left(2+x^2\right)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p(x) &= ax^2 + bx + c \\ p'(x) &= 2ax + b \\ p''(x) &= 2a \end{aligned}$$

Así,

$$f(0) = 3 = c = p(0) \qquad \longrightarrow \quad c = 3$$

$$f'(0) = \frac{1}{2} = b = p'(0) \qquad \longrightarrow \quad b = \frac{1}{2}$$

$$f''(0) = \frac{1}{2} = 2a = p''(0) \quad \longrightarrow \quad a = \frac{1}{4}$$

Finalmente,

$$\therefore \; p(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + 3$$

d) Sea $g(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\ dt$. Entonces,

$$g'(x) = f(x+T) - f(x)$$

Pero f es periódica, por tanto $\forall x \in \mathbb{R}$ se cumple que $f(x+T) = f(x)$. Por tanto, $g'(x) = 0$. Así, g es una función constante y finalmente, evaluando en $x = 0$ y $x = a$:

$$\int_0^T f(t)\ dt = \int_a^{T+a} f(t)\ dt$$

■

(3) *a*) ¿Se puede afirmar que si existe $\displaystyle\int_a^b |f(x)|dx$ entonces también existe $\displaystyle\int_a^b f(x)\ dx$? En caso afirmativo, demuestre. Si no, mencione un contraejemplo.

b) Calcule $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} \int_0^{2n} \frac{\sin(x)}{x+1}\ dx$

c) Encuentre una función f y un $a \in (0, \infty)$ tales que

$$\int_a^{x^2} f(t)\ln(t)\ dt = x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)$$

Solución:

a) Sean las siguientes funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \text{ racional} \\ -1 & x \in [a,b] \text{ irracional} \end{cases} \qquad \wedge \qquad |f(x)| = \begin{cases} 1 & x \in [a,b] \text{ racional} \\ 1 & x \in [a,b] \text{ irracional} \end{cases} = 1$$

Es evidente que $|f|$ es integrable, puesto que es constante, pero f no lo es.

b) Para $x \in [0, 2n]$ se cumple que:

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{-1}{x+1} \leq \frac{\sin(x)}{x+1} \leq \frac{1}{x+1}$$

Como $\displaystyle\int_0^{2n} \frac{1}{1+x} = \ln(2n+1)$ entonces:

$$-\frac{\ln(2n+1)}{2n} \leq \frac{1}{2n}\int_0^{2n} \frac{\sin(x)}{x+1}\, dx \leq \frac{\ln(2n+1)}{2n}$$

Por el *Teorema del Sandwich* como $\lim\limits_{n\to\infty} \pm\dfrac{\ln(2n+1)}{2n} = 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n}\int_0^{2n} \frac{\sin(x)}{x+1}\, dx = 0$$

c) Primero notemos que:

$$\int_a^{(\sqrt{a})^2} f(t)\ln(t)\, dt = 0$$

Para que las dos funciones sean iguales, requerimos que

$$(\sqrt{a})^3\left(\ln(\sqrt{a}) - \frac{1}{3}\right) = 0$$

Resolviendo la ecuación, obtenemos que los valores posibles de a son 0 o $e^{2/3}$. Como $a \neq 0$, entonces $a = e^{2/3}$. Como deseamos que la igualdad se cumpla, derivamos las funciones e igualamos:[1]

$$2xf(x^2)\ln(x^2) = 3x^2\ln x \quad \longleftrightarrow \quad f(x^2) = \frac{3}{4}x \quad \longleftrightarrow \quad f(x) = \frac{3}{4}\sqrt{x}$$

■

(4) Sean

$$F(x) = \int_0^{2x-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \qquad \wedge \qquad G(x) = \int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{dt}{1+t^2}$$

para $0 < x < 1$. Demuestre que:

a) $F'(x) + 2G'(x) = 0$

b) $F(x) + 2G(x) = \dfrac{\pi}{2}$

Solución:

[1] Recurrimos al teorema que asegura que si f, g satisfacen $f' = g'$, entonces $f(x) = g(x) + c$.

a) Derivando, con el teorema Fundamental del Cálculo, tenemos que:

$$F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x - x^2}}$$

y

$$G'(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x - x^2}}$$

Por tanto,

$$F'(x) + 2G'(x) = 0$$

b) El apartado anterior implica que la función $F(x) + 2G(x)$ es constante en el intervalo especificado. Por lo tanto, el valor de esa función es el mismo para todo $x \in (0, 1)$. Así, podemos evaluar en $x = 1/2$ y obtener el valor de la constante:

$$\int_0^0 \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} + 2\int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = 2\arctan(x)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

■

(5) Sean $a > 0$ y $b > 0$. Se define la función f por:

$$f(x) = \int_a^b t^x \, dt$$

Calcule $f(-1)$ y determine si f es continua en $x = -1$.

Solución:

Tenemos que:

$$f(-1) = \int_a^b t^{-1} \, dt = \int_a^b \frac{dt}{t} = \ln(t)\Big|_a^b = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right)$$

Ahora, para todo $x \neq -1$,

$$f(x) = \int_a^b t^x \, dt = \frac{t^{x+1}}{x+1}\Big|_a^b = \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}$$

Para analizar la continuidad en $x = -1$, calculamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to -1} \frac{b^{x+1} - a^{x+1}}{x+1}$$

Como este último es de la forma indeterminada $0/0$, aplicamos la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \to -1} f(x) \underset{L'H}{\longrightarrow} \lim_{x \to -1} \left(b^{x+1}\ln(b) - a^{x+1}\ln(a)\right) = \ln(b) - \ln(a) = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = f(-1)$$

Por tanto, f es continua en $x = -1$. ■

(6) Demostrar que si $f(x)$ es continua y decreciente en $[a, b]$, entonces

$$G(x) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\ dt$$

también es decreciente para $a < x < b$.

Solución:

Dado que f es continua en $[a, b]$ en particular lo es para el sub-intervalo $[a, x]$ con $x \in (a, b]$. Así, podemos aplicar el teorema del valor medio para integrales y afirmar que existe un $c \in (a, x)$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\ dt$$

Ahora, usando el hecho de que f es continua y derivando gracias al T.F.C. tenemos:

$$\begin{aligned} G'(x) &= -\frac{1}{(x-a)^2}\int_a^x f(t)\ dt + \frac{1}{x-a}f(x) \\ &= -\frac{1}{x-a}f(c) + \frac{1}{x-a}f(x) \\ &= \frac{f(x)-f(c)}{x-a} \end{aligned}$$

Luego, como la función f es decreciente, $f(x) - f(c) \leq 0$ pues $c < x$. Además, $x - a > 0$ (pues $a < x$) y concluimos que $G'(x) \leq 0$, de lo que se deduce que $G(x)$ es decreciente. ■

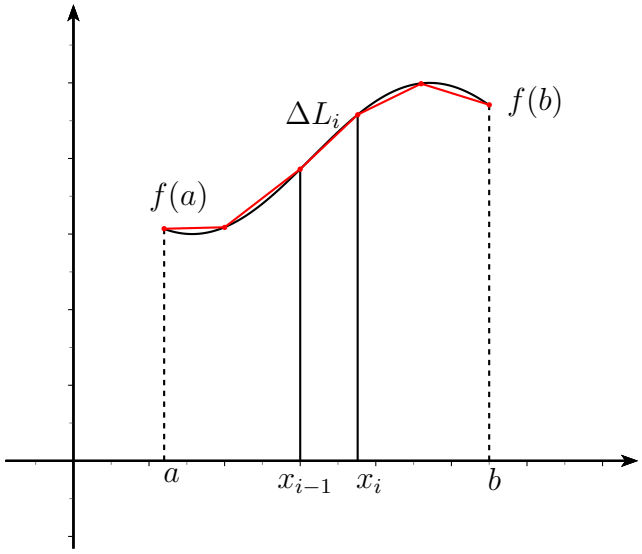
(7) *a*) Utilizando los conceptos de la Integral de Riemann, demuestre que la longitud de una curva regular $y = f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ puede calcularse como sigue:

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\ dx$$

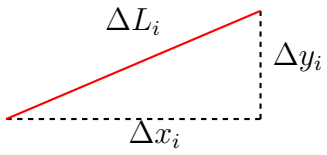
b) Utilice el resultado anterior para comprobar que una semicircunferencia de radio 1 posee largo π. ¿Podría calcular el largo de una semielipse de semiejes mayor y menor 2 y 1, respectivamente?

Solución:

a) Tomemos una partición arbitraria del intervalo $[a, b]$ de la forma $\mathcal{P} : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$. Miremos dos puntos de la curva, digamos $x_i,\ x_{i-1}$. Localmente, dado que la curva es regular entonces posee una buena aproximación lineal. De ésta forma, en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ nuestra función se parece mucho a un segmento de recta de largo ΔL_i:



Analizando el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ podemos establecer una relación entre los segmentos:



Por el T.V.M. tenemos que:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(x_i^*)$$

Por tanto, el largo del segmento puede calcularse como sigue:

$$\Delta L_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + f'(x_i^*)^2(\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}(\Delta x_i)$$

Así, el largo total de los segmentos de recta que aproximan a f corresponde a:

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^{n} \Delta L_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i^*)^2}(\Delta x_i) \end{aligned}$$

Refinando la partición, $||\mathcal{P}|| \to 0$, notemos que la suma de Riemann converge al largo de la curva:

$$L(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

que es lo que se quería probar.

b) En el caso de una semicircunferencia, tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{1-x^2} \qquad x \in [-1,1] \\ f'(x) &= \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \\ 1+f'(x)^2 &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Así,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1+f'(x)^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$$

[Anexo] Una fórmula diferente

La definición anterior para calcular el largo de un segmento requiere que la función radical sea integrable. Además, debemos tener siempre en cuenta que utilizaremos la fórmula anterior para calcular el largo de un segmento de *una función de x o y* por lo que surge la pregunta: ¿cómo es posible calcular el largo de cualquier curva en el plano?

Una solución a este problema es recurrir a la denominada *Fórmula de Cauchy - Crofton*: es posible obtener el largo de una curva plana *contando* el número de intersecciones que posee la curva con todas las rectas del plano.

Definiremos todas las rectas a utilizar por dos parámetros: el ángulo θ que forman con el eje X y el coeficiente de corte x con el eje Y. Además, si definimos la función $n(\theta, x)$ como el número de intersecciones de una recta L con nuestra curva γ, entonces:

$$Largo = L(\gamma) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} n(\theta,x)\, dxd\theta$$

Para una demostración acabada del teorema anterior se sugiere revisar:

- Do Carmo, Manfredo P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.

■

II.ii. Funciones logaritmo y exponencial

(1) Sea $\psi(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$. Demuestre que $\psi'(x) = 1-\psi(x)^2$. Determine la ecuación de la recta tangente al gráfico de ψ que sea paralela a la recta $3x-4y-12=0$.

Solución:

Analicemos las siguientes igualdades:

$$\psi(x)' = \frac{2\cdot e^{2x}(e^{2x}+1)-2\cdot e^{2x}(e^{2x}-1)}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

$$1-\psi(x)^2 = 1-\frac{(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2-(\mathrm{e}^{2x}-1)^2}{(\mathrm{e}^{2x}+1)^2} = \frac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$$

Observe que la pendiente de la recta $3x-4y-12=0$ es $\frac{3}{4}$. Queremos hallar los puntos en el gráfico de ψ en donde la recta tangente tiene pendiente $\frac{3}{4}$, usando la identidad demostrada tomando $y=\psi(x)$ obtenemos la siguiente condición:

$$y'=\frac{3}{4}=1-y^2 \;\Rightarrow\; y^2-\frac{1}{4}=0 \;\Rightarrow\; \left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y+\frac{1}{2}\right)=0$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } y=\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad \frac{1}{2}=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\\
&\Longrightarrow \quad 2\,\mathrm{e}^{2x}-2 = \mathrm{e}^{2x}+1\\
&\Longrightarrow \quad \mathrm{e}^{2x} = 3\\
&\Longrightarrow \quad x = \ln(\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Por lo tanto en $x=\ln(\sqrt{3})$ la recta tangente al gráfico de ψ es paralela a la recta

$$3x-4y-12=0$$

$$\begin{aligned}
\text{Si } y=-\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}\\
&\Longrightarrow \quad 2\,\mathrm{e}^{2x}-2 = -\mathrm{e}^{2x}-1\\
&\Longrightarrow \quad 3\,\mathrm{e}^{2x} = 1\\
&\Longrightarrow \quad x = -\ln(\sqrt{3})
\end{aligned}$$

Por lo tanto en $x=-\ln(\sqrt{3})$ la recta tangente al gráfico de ψ es paralela a la recta

$$3x-4y-12=0$$

■

(2) Calcule, utilizando el método de derivación logarítmica[2], las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^{x^x}$

b) $g(x)=x^{\sin^2(x)}$

c) $h(x)=\left(\dfrac{2}{1+x^2}\right)^{-\ln(x)}$

[2]Recuerde que este método consiste en aplicar logaritmo a la igualdad $y=f(x)$ y derivar hasta obtener $\frac{y'}{y}=\frac{f'(x)}{f(x)}$ y finalmente despejar $f'(x)$

Solución:

a) Notemos que:

$$\ln\left(f(x)\right) = \ln\left(x^{x^x}\right) = x\ln\left(x^x\right) = x^2\ln\left(x\right)$$

Entonces derivando a ambos lados de la igualdad obtenemos que,

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = 2x\ln\left(x\right) + x^2\frac{1}{x} = x(2\ln\left(x\right)+1)$$

Por tanto,

$$f'(x) = f(x)\cdot x(2\ln\left(x\right)+1) = x^{x^x}\left(x(2\ln\left(x\right)+1)\right)$$

b) Igual que en el apartado anterior,

$$\ln\left(g(x)\right) = \ln\left(x^{\sin^2(x)}\right) = \sin^2\left(x\right)\ \ln\left(x\right)$$

$$\Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 2\sin\left(x\right)\cos\left(x\right)\ln\left(x\right) + \sin^2\left(x\right)\ \frac{1}{x}$$

$$\therefore g'(x) = \frac{\left(2\sin\left(x\right)\cos\left(x\right)\ln\left(x\right) + \sin^2\left(x\right)\right)\left(x^{\sin^2(x)}\right)}{x}$$

c)

$$\ln\left(h(x)\right) = \ln\left(x\right)\ \ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) \Longrightarrow \frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + \ x\ \ln\left(x\right)\left(\frac{2}{1+x^2}\right)$$

$$\Longrightarrow h'(x) = \left[\frac{1}{x}\cdot\ln\left(\frac{1+x^2}{2}\right) + x\ \ln\left(x\right)\cdot\left(\frac{2}{1+x^2}\right)\right]\left(\frac{2}{1+x^2}\right)^{-\ln\left(x\right)}$$

■

(3) Demuestre que para todo número natural n se tiene

a) La sucesión $a_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(n\right)$ es convergente.

b) Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma$, entonces $0 < \gamma < 1$.

Solución:

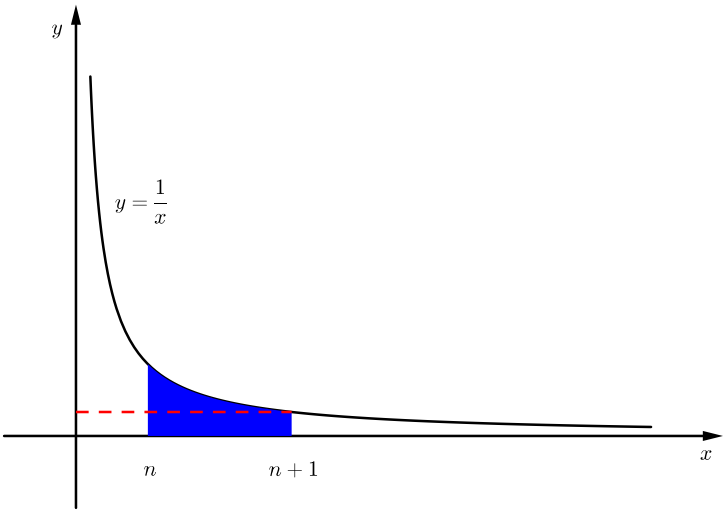
a) Sea

$$a_n = \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(n\right)$$

- Analicemos su crecimiento:

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1)\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} < 0 \end{aligned}$$

La justificación es de tipo geométrica. La expresión racional es el área rectangular, mientras que la integral en cuestión es el área sombreada bajo la hipérbola mayor, que incluye al rectángulo.



Más analíticamente, podemos establecer el siguiente hecho: la función $f(t) = \frac{1}{t}$ es decreciente en el intervalo $[n, n+1]$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} &> (n+1-n) \cdot \text{mín}\left\{f(t) : t \in [n, n+1]\right\} \\ \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} &> \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t} &< 0 \end{aligned}$$

Así, la sucesión es decreciente.

- Como sabemos, la función $f(t)$, por ser decreciente, cumple que:

$$\int_{m-1}^{m} \frac{dt}{t} < \frac{1}{m-1}, \quad m \in \mathbb{N}$$

dado que el largo del intervalo es igual a 1. Ahora, notemos que:

$$\ln(n) = \int_1^n \frac{dt}{t} = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t}$$

por tanto, utilizando la desigualdad inicial,

$$\ln(n) = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

$$\ln(n) = \int_1^2 \frac{dt}{t} + \int_2^3 \frac{dt}{t} + \cdots + \int_{n-1}^n \frac{dt}{t} < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{>0}$$

$$\therefore a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) > 0$$

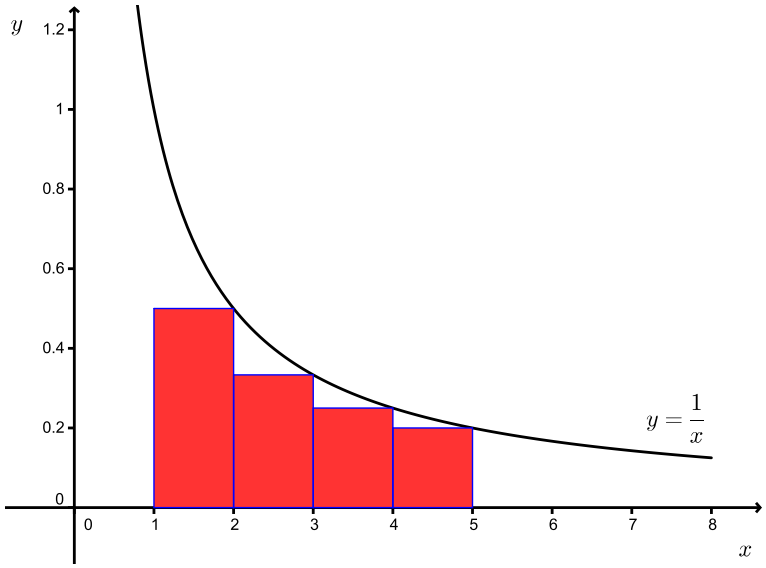
y es acotada. Otra forma de justificar lo anterior es la siguiente: Es fácil probar que la función $g(x) = \frac{1}{x} - \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ es estrictamente creciente en $[1, \infty)$ y, como $g(1) > 0$ entonces es positiva en $[1, \infty)$. En particular, $\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) < \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}$ Así,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} &> \ln(2) + \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ldots + \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln(n+1) \\ a_n &> \ln(n+1) - \ln(n+1) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

Como dicho logaritmo natural es una función estrictamente creciente y, al acotar su dominio a los naturales, tiene un mínimo positivo entonces es claro que $a_n > 0$. Así, la sucesión es acotada inferiormente.

$$\therefore \text{ monótona } + \text{ acotada } \Longrightarrow \text{ convergente}$$

b) Es evidente, como se aprecia en la figura, que la suma de los bloques rectangulares es menor que la correspondiente área bajo la curva. Por consiguiente,



$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{dt}{t} = 1 + \ln(n)$$

De aquí,

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) < 1,\ n > 1$$

Con ello podemos afirmar que: $0 < a_n < 1$. Por el *Teorema del Sandwich*, si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \gamma$ entonces:

$$0 < \gamma < 1$$

■

(4) *a*) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{4x}{\ln(3x)} - \int_e^{3x} \frac{dt}{\ln(t)} \quad \text{para } e \le x \le e^4$$

b) Calcule el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x t^2 \ln(1+4t^2)\ dt}{x^5}$$

Solución:

a) Para estudiar los intervalos de crecimiento/decrecimiento, calculamos la derivada de la función en cuestión:

$$f'(x) = \frac{\ln(3x) - 4}{\Big(\ln(3x)\Big)^2}$$

Así,

$$\begin{aligned} f'(x) < 0 &\leftrightarrow \ln(3x) - 4 < 0 \\ &\leftrightarrow \ln(3x) < 4 \\ &\leftrightarrow 3x < e^4 \\ &\leftrightarrow x < \frac{e^4}{3} \end{aligned}$$

Por lo tanto, la función será **decreciente** en el intervalo $\left]e, \frac{e^4}{3}\right[$ y **creciente** en el intervalo $\left]\frac{e^4}{3}, e^4\right[$.

b) Si intentamos reemplazar directamente, encontraremos una forma indeterminada del tipo $0/0$, por lo que utilizamos la regla de L'Hôpital y el T.F.C. para resolver:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x t^2 \ln(1+4t^2)\, dt}{x^5} &= \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \ln(1+4x^2)}{5x^4} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x^2)}{x^2} \qquad \text{(Hacemos el cambio de variable } u = x^2\text{)} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\ln(1+4u)}{u} \qquad \text{(L'H)} \\
&= \frac{1}{5} \cdot \lim_{u\to 0} \frac{\dfrac{4}{1+4u}}{1} \\
&= \frac{1}{5} \cdot 4 = \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

■

Técnicas de integración

III.i. Teoremas de integración por partes y sustituciones

(1) *a*) Sea $f(x)$ una función estrictamente creciente, positiva y con derivada continua en $[a, b]$ con $0 < a < b$. Demuestre que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\ dx$$

b) Demuestre que:

$$I_n = \int_0^1 x(1-x)^n\ dx$$

satisface la relación de recurrencia:

$$I_n = \frac{n}{n+2}\ I_{n-1}$$

Solución:

a) La derivada de f es continua; luego, si ponemos $f(x) = 1 \cdot f(x)$ podemos utilizar integración por partes para llegar a:

$$\int_a^b f(x)\ dx = xf(x)\Big|_a^b - \int_a^b xf'(x)\ dx$$

Para calcular la segunda integral, sugerimos la sustitución $u = f(x)$. Luego, $du = f'(x)\ dx$ y con ello:

$$\int_a^b xf'(x)\ dx = \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(u)\ du$$

ya que si $u = f(x)$, $x = f^{-1}(u)$. Podemos asegurar la existencia de la inversa puesto que f es continua y estrictamente creciente. Así, reemplazando,

$$\int_a^b f(x)\ dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\ dx$$

b) Utilizando integración por partes: $u = (1-x)^n \ \rightarrow\ du = -n(1-x)^{n-1}\ dx \quad , \quad dv = x\ dx\ \rightarrow$

$v = x^2/2$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2}(1-x)^2\Big|_0^1 &= I_n - \frac{n}{2}\int_0^1 x^2(1-x)^{n-1}\,dx \\
0 &= I_n - \frac{n}{2}\int_0^2 x\Big(1-(1-x)\Big)(1-x)^{n-1}\,dx \\
&= I_n - \frac{n}{2}\int_0^2 x(1-x)^{n-1}\,dx + \frac{n}{2}\int_0^2 x(1-x)^n\,dx \\
&= I_n + \frac{n}{2}\Big(-I_{n-1} + I_n\Big) \\
I_n &= \frac{n}{n+2}\,I_{n-1}
\end{aligned}$$

■

(2) Sea f función derivable, estrictamente creciente en $[0,a]$ con $f(a) = b$ y $f(0) = 0$. Demuestre que

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,dy = ab - \int_0^a f(x)\,dx$$

y utilice este resultado para calcular $\displaystyle\int_0^1 \arcsin(x)\,dx$.

Solución:

La igualdad a demostrar se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\int_0^b f^{-1}(y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx = ab$$

Sea $y = f(x)$, con lo que $dy = f'(x)\,dx$. Se cumple que $y = 0 \to x = 0$ e $y = b \to x = a$. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\int_0^b f^{-1}(y)\,dy + \int_0^a f(x)\,dx &= \int_0^a xf'(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx \\
&= \int_0^a \Big(xf'(x) + f(x)\Big)\,dx \\
&= \int_0^a \Big(xf(x)\Big)'\,dx \\
&= af(a) \;=\; ab
\end{aligned}$$

lo que demuestra lo pedido. Para la integral pedida, denotamos $f(x) = \sin(x)$ tal que $f(\pi/2) = 1$ y $f(0) = 0$. Así,

$$\int_0^1 \arcsin(y)\,dy = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin(x)\,dx = \frac{\pi}{2} - 1$$

■

(3) Utilizando el teorema de Integración por partes:

$$uv\Big|_a^b = \int_a^b u\ dv + \int_a^b v\ du$$

Resuelva las siguientes integrales.

a) $\int \ln(x)\ dx$

b) $\int xe^{-x}\ dx$

c) $\int \cos^2(x)\ dx$

d) $\int e^x \cos(x)\ dx$

e) $\int x \sec(x) \tan(x)\ dx$

f) $\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\ dx$

Solución:

a) Sean

$$\begin{aligned} u &= \ln(x) & dv &= dx \\ \Rightarrow\ du &= \frac{dx}{x} & \Rightarrow\ v &= x \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} x\ln(x) &= \int \ln(x)dx + \int x\frac{dx}{x} = \int \ln(x)dx + \int dx \\ \therefore\ \int \ln(x)dx &= x\ln(x) - x + c \end{aligned}$$

b) Sean

$$\begin{aligned} u &= x & dv &= e^{-x}\ dx \\ \Rightarrow\ du &= dx & \Rightarrow\ v &= -e^{-x} \end{aligned}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} -xe^{-x} &= \int xe^{-x}\ dx + \int -e^{-x}\ dx = \int xe^{-x}\ dx + e^{-x} \\ \therefore\ \int xe^{-x}\ dx &= -(1+x)e^{-x} + c \end{aligned}$$

$c)$ Sean

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} u & = & \cos(x) & dv & = & \cos(x)\ dx \\ \Rightarrow\ du & = & -\sin(x)dx & \Rightarrow\ v & = & \sin(x) \end{array}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} \sin(x)\cos(x) &= \int \cos^2(x)\ dx - \int \sin^2(x)\ dx \\ &= \int \cos^2(x)\ dx + \int (\cos^2(x) - 1)\ dx \\ &= 2\int \cos^2(x)\ dx - \int dx \\ \therefore\ \int \cos^2(x)\ dx &= \frac{\sin(x)\cos(x)}{2} + \frac{x}{2} + c \end{aligned}$$

$d)$ Sean

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} u & = & \cos(x) & dv & = & e^x\ dx \\ \Rightarrow\ du & = & -\sin(x)dx & \Rightarrow\ v & = & e^x \end{array}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$e^x\cos(x) = \int e^x\cos(x)\ dx - \underbrace{\int e^x\sin(x)\ dx}_{(i)}$$

Debemos utilizar nuevamente la integración por partes para hallar (i). Así,

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} u & = & \sin(x) & dv & = & e^x\ dx \\ \Rightarrow\ du & = & \cos(x)dx & \Rightarrow\ v & = & e^x \end{array}$$

Por tanto,

$$e^x\sin(x) = \int e^x\sin(x)\ dx + \int e^x\cos(x)\ dx$$

$$\Longrightarrow \int e^x\sin(x)\ dx = e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\ dx$$

Finalmente, reemplazando en (i) tenemos:

$$\int e^x\cos(x)\ dx = e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\ dx$$

$$\therefore\ \int e^x\cos(x)\ dx = \frac{1}{2}e^x\cos(x) + \frac{1}{2}e^x\sin(x) + c$$

$e)$ Sean

$$\begin{array}{rcl@{\qquad\qquad}rcl} u & = & x & dv & = & \sec(x)\tan(x)\ dx \\ \Rightarrow\ du & = & dx & \Rightarrow\ v & = & \sec(x) \end{array}$$

Entonces, utilizando la fórmula de la integración por partes, tenemos:

$$\begin{aligned} x\sec(x) &= \int x\sec(x)\tan(x)\ dx + \int \sec(x)\ dx \\ \int x\sec(x)\tan(x)\ dx &= x\sec(x) - \underbrace{\int \sec(x)dx}_{(ii)} \end{aligned}$$

Debemos hallar (ii). Así,

$$\begin{aligned} \int \sec(x)\ dx &= \int \sec(x)\left(\frac{\sec(x)+\tan(x)}{\sec(x)+\tan(x)}\right)\ dx \\ &= \int \frac{\sec^2(x)+\sec(x)\tan(x)}{\tan(x)+\sec(x)}\ dx \\ &= \int \frac{dm}{m} = \ln|m| \\ &= \ln(\sec(x)+\tan(x)) \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\therefore\ \int x\sec(x)\tan(x)\ dx = x\sec(x) - \ln|\sec(x)+\tan(x)|$$

$f)$ Modifiquemos el integrando mediante la siguiente sustitución: Sea $m = \sqrt{x}$ y con ello $dm = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$. Así,

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\ dx = 2\int \sqrt{x}\cos\left(\sqrt{x}\right)\frac{dx}{2\sqrt{x}} = 2\int m\cos(m)\ dm$$

Por tanto, aplicamos ahora el método de integración por partes.

$$\begin{aligned} u &= m & dv &= \cos(m)\ dx \\ \Rightarrow\ du &= dm & \Rightarrow\ v &= \sin(m) \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} m\sin(m) &= \int m\cos(m)\ dm + \int \sin(m)\ dm \\ \therefore\ \int m\cos(m)\ dm &= m\sin(m) + \cos(m) + k \end{aligned}$$

Reemplazando,

$$\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\ dx = 2\Big(m\sin(m) + \cos(m) + k\Big) = 2\sqrt{x}\sin\left(\sqrt{x}\right) + 2\cos\left(\sqrt{x}\right) + c$$

■

(4) Utilizando el teorema de cambio de variable o sustitución,

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\ dx = \int_c^d f\Big(g(t)\Big)\,g'(t)\ dt$$

resuelva las siguientes integrales:

$a)$ $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$

$b)$ $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\ dx$

$c)$ $\displaystyle\int \cos(x)\Big(2+\sin(x)\Big)^5\ dx$

$d)$ $\displaystyle\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1-2x^2}}$

$e)$ $\displaystyle\int \cos^{2/3}(t)\sin^5(t)\ dt$

$f)$ $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{1+\sqrt[4]{x}}$

$g)$ $\displaystyle\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\ dx$

$h)$ $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^x\sqrt{e^x-1}\ dx$

$i)$ $\displaystyle\int \tan(x)\ dx$

Solución:

$a)$ Tenemos que:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}}$$

Sea $u = x-1$ y con ello $du = dx$ y, evidentemente, $x+1 = u$. Así,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u)+c = \arcsin(x-1)+c$$

$b)$ Hagamos $x+2 = y^2$. Así, $x = y^2-2,\ dx = 2y\ dy$. Entonces,

$$\int x\sqrt{x+2}\ dx = \int (y^2-2)2y^2\ dy = \int (2y^4-4y^2)\ dy = \frac{2}{5}y^5 - \frac{4}{3}y^3 + c$$

Como $y = (x+2)^{\frac{1}{2}}$, reemplazando tenemos:

$$\int x\sqrt{x+2}\ dx = \frac{2}{5}(x+2)^{5/2} - \frac{4}{3}(x+2)^{3/2} + c$$

$c)$ Sea $s = 2+\sin(x)$ y con ello $ds = \cos(x)\ dx$. Con ello,

$$\int \cos(x)\Big(2+\sin(x)\Big)^5\ dx = \int s^5\ ds = \frac{s^6}{6} + c = \frac{\Big(2+\sin(x)\Big)^6}{6} + c$$

d) Si hacemos $t = 1 - 2x^2$ y $dt = -4x\ dx$ entonces tendremos:

$$\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{1}{8}\int \underbrace{2x^2}_{1-t}\ \underbrace{\frac{-4x\ dx}{\sqrt{1-2x^2}}}_{\frac{dt}{\sqrt{t}}} = -\frac{1}{8}\int (1-t)t^{-1/2}\ dt = -\frac{1}{8}\int t^{-1/2} - t^{1/2}\ dt$$

Así,

$$\int \frac{x^3\ dx}{\sqrt{1-2x^2}} = -\frac{t^{1/2}}{4} + \frac{t^{3/2}}{12} + c = -\frac{(1-2x^2)^{1/2}}{4} + \frac{(1-2x^2)^{3/2}}{12} + c$$

e) Primero que todo, separamos las potencias del seno de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2/3}(t)\sin^5(t)\ dt &= \int \cos^{2/3}(t)\sin^4(t)\sin(t)\ dt \\
&= \int \cos^{2/3}(t)\Big(\sin^2(t)\Big)^2\sin(t)\ dt \\
&= \int \cos^{2/3}(t)\Big(1-\cos^2(t)\Big)^2\sin(t)\ dt
\end{aligned}$$

Con $u = \cos(t)$ y $du = -\sin(t)\ dt$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\int \cos^{2/3}(t)\sin^5(t)\ dt &= -\int u^{2/3}(1-u^2)^2\ du \\
&= -\int u^{2/3}(1-2u^2+u^4)\ du \\
&= -\int u^{2/3} - u^{8/3} + u^{14/3}\ du \\
&= -\frac{3}{5}u^{5/3} + \frac{3}{11}u^{11/3} - \frac{3}{17}u^{17/3} + c \\
&= -\frac{3}{5}\Big(\cos(t)\Big)^{5/3} + \frac{3}{11}\Big(\cos(t)\Big)^{11/3} - \frac{3}{17}\Big(\cos(t)\Big)^{17/3} + c
\end{aligned}$$

f) Sea $x = z^4$ y $dx = 4z^3\ dz$. Así,

$$\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{1+\sqrt[4]{x}} = \int \frac{z^2\cdot 4z^3\ dz}{1+z} = 4\int \frac{z^5\ dz}{1+z} = \Phi$$

Aplicando división de polinomios, obtendremos que

$$z^5 = (z+1)(z^4 - z^3 + z^2 - z + 1) - 1$$

Con ello,

$$\begin{aligned}
\Phi &= 4\int \frac{(z+1)(z^4-z^3+z^2-z+1)-1}{1+z}\ dz \\
&= 4\int (z^4 - z^3 + z^2 - z + 1)\ dz - 4\int \frac{dz}{1+z} \\
&= \frac{4}{5}z^5 - z^4 + \frac{4}{3}z^3 - 2z^2 + 4z - 4\ln(1+z) + c
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int \frac{\sqrt{x}\ dx}{1+\sqrt[4]{x}} = \frac{4}{5}x^{5/4} - x + \frac{4}{3}x^{3/4} - 2\sqrt{x} + 4x^{1/4} - 4\ln\left(1+x^{1/4}\right) + c$$

g) Notemos que:

$$\frac{x^2+5}{x^2+2} = \frac{x^2+2+3}{x^2+2} = 1 + \frac{3}{x^2+2}$$

Por tanto,

$$\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\ dx = x\Big|_0^2 + 3\int_0^2 \frac{1}{x^2+2}\ dx = 2 + 3\int_0^2 \frac{1}{x^2+2}\ dx$$

Esta última integral podemos abordarla desde el siguiente punto de vista

$$\int_0^2 \frac{1}{x^2+2}\ dx = \int_0^2 \frac{1/2}{x^2/2+1}\ dx = \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\ dx$$

Sea $t = x/\sqrt{2}$, donde $\sqrt{2}\ dt = dx$. Cuando $x = 0$, $t = 0$; cuando $x = 2$, $t = \sqrt{2}$. Así,

$$\int_0^2 \frac{1}{(x/\sqrt{2})^2+1}\ dx = \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{t^2+1}\ \sqrt{2}\,dt = \sqrt{2}\Big(\arctan\left(\sqrt{2}\right) - \arctan\left(0\right)\Big)$$

Finalmente,

$$\int_0^2 \frac{x^2+5}{x^2+2}\ dx = 2 + 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\arctan\left(\sqrt{2}\right) = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{2}\right)$$

h) Hacemos $u = e^x - 1$, con lo que $du = e^x\ dx$. Cuando $x = 0$, $u = 0$; mientras que cuando $x = \ln(2)$, $u = 1$. Así,

$$\int_0^{\ln(2)} e^x\sqrt{e^x-1}\ dx = \int_0^1 \sqrt{u}\ du = \frac{2}{3}\left(1^{3/2} - 0^{3/2}\right) = \frac{2}{3}$$

i) Sea $t = \cos(x)$, de modo tal que $dt = -\sin(x)\ dx$. Con ello,

$$\int \tan(x)\ dx = \int \frac{-1}{t}\ dt = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos(x)| + C = \ln|\sec(x)| + C$$

■

(5) *a*) Calcule

$$\int \frac{x^2\arctan(x)}{1+x^2}\ dx$$

b) Sea $f(x)$ una función que admite derivadas continuas hasta el orden 2, tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\ dx = 4$. Calcule:

$$\int_0^1 x^2 f''(x)\ dx$$

Solución:

a) Notemos que es posible *sumar un cero* conveniente de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 \arctan(x)}{1+x^2}\, dx &= \int \frac{x^2 \arctan(x) + \arctan(x) - \arctan(x)}{1+x^2}\, dx \\ &= \int \frac{(1+x^2)\arctan(x) - \arctan(x)}{1+x^2}\, dx \\ &= \int \arctan(x)\, dx - \int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx\end{aligned}$$

Para resolver la primera integral usamos integración por partes, con $u = \arctan(x)$ y $dv = dx$. Entonces, $du = \dfrac{dx}{1+x^2}$ y $v = x$. Así,

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\, dx &= x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx \qquad \text{(Proponemos el cambio } t = 1+x^2\text{)} \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1\end{aligned}$$

Para resolver la segunda integral usamos la sustitución $y = \arctan(x)$, con lo que $dy = \dfrac{dx}{1+x^2}$. Por tanto,

$$\int \frac{\arctan(x)}{1+x^2}\, dx = \int y\, dy = \frac{y^2}{2} + C_2 = \frac{\arctan^2(x)}{2} + C_2$$

Finalmente,

$$\int \frac{x^2 \arctan(x)}{1+x^2}\, dx = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{\arctan^2(x)}{2} + C$$

b) Utilizamos integración por partes: sean $u = x^2$ y $dv = f''(x)\, dx$, con lo que $du = 2x\, dx$ y $v = f'(x)$. Así,

$$\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx = x^2 f'(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x f'(x)\, dx = -1 - 2\int_0^1 x f'(x)\, dx$$

Esta última integral también la realizamos vía integración por partes: $u = x$, $dv = f'(x)\, dx$ $\to du = dx$, $v = f(x)$. Luego,

$$\int_0^1 x f'(x)\, dx = x f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\, dx = 1 - 4 = -3$$

Finalmente,

$$\int_0^1 x^2 f''(x)\, dx = -1 - 2\cdot(-3) = 5$$

■

III.ii. Sustituciones trigonométricas, fracciones parciales y otros teoremas

(1) Calcule la siguiente integral:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \; dx$$

Solución:

Reagrupamos términos:

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \; dx = \int \tan^6 x \sec^2 x \;\; \sec^2 x dx = \int \tan^6 x (1 - \tan^2 x) \;\; \sec^2 x dx = A$$

Sean $u = \tan x$ y $du = \sec^2 x dx$. Así,

$$A = \int u^6 (1 + u^2) \; du = \int u^6 1 + u^8 \; du = \frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C$$

Con ello,

$$\int \tan^6 x \sec^4 x \; dx = \frac{\tan^7 x}{7} + \frac{\tan^9 x}{9} + C$$

■

(2) Considere los siguientes cambios de variable sugeridos, denominados sustitución trigonométrica:

Expresión del integrando	**Sustitución trigonométrica**
$a^2 - u^2$	$u = a \sin \theta$
$a^2 + u^2$	$u = a \tan \theta$
$u^2 - a^2$	$u = a \sec \theta$

donde u es la variable de integración, y a es una constante. Con ello en mente, resuelva las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}}$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2 - 1}$

c) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 5)^2}$

d) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 5}}$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^4} \; dx$

Solución:

a) En este ejercicio la expresión es de la forma $a^2 - u^2$, por lo que la sustitución es:

$$\begin{aligned} x &= \sin\theta, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \Rightarrow\ dx &= \cos\theta\ d\theta \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{1-\sin^2\theta}} \\ &= \int \frac{\cos\theta\ d\theta}{\sqrt{\cos^2\theta}} \\ &= \int d\theta \\ &= \theta + C \end{aligned}$$

Como $\arcsin(x) = \theta$, entonces:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$$

b) Notemos que $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-1} = -\int \frac{dx}{1-x^2}$. Así, hacemos la siguiente sustitución:

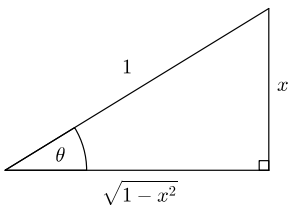
$$\begin{aligned} x &= \sin\theta \\ \Rightarrow\ dx &= \cos\theta\ d\theta \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} -\int \frac{dx}{1-x^2} &= -\int \frac{\cos\theta\ d\theta}{1-\sin^2\theta} \\ &= -\int \sec\theta\ d\theta \\ &= -\ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \end{aligned}$$

Debemos hallar entonces la relación entre dichas funciones trigonométricas y x. La figura de la derecha se construye a partir de la definición de

$$\sin\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = x$$



Entonces,

$$\sec\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{y} \quad \tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2-1} &= -\ln|\sec\theta+\tan\theta|+C \\ &= -\ln\left|\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right|+C \;=\; \ln\left|\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}\right|+C \\ &= \ln\left(\sqrt{\frac{1-x^2}{(1+x)^2}}\right)+C \;=\; \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)+C\end{aligned}$$

c) Trabajemos un poco en la integral original:

$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} = \int \frac{dx}{\Big((x-1)^2+4\Big)^2}$$

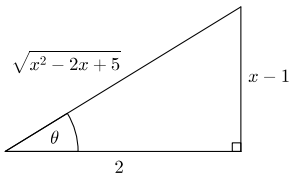
Con ello hacemos,

$$\begin{aligned} x-1 &= 2\tan\theta \\ \Rightarrow\; dx &= 2\sec^2\theta\; d\theta\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} &= \int \frac{2\sec^2\theta\; d\theta}{(4\tan^2\theta+4)^2} = \int \frac{2\sec^2\theta\; d\theta}{(4\sec^2\theta)^2} \\ &= \frac{1}{8}\int \cos^2\theta\; d\theta \qquad \text{recordando que } \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 \\ &= \frac{1}{16}\int \cos 2\theta\; d\theta + \frac{1}{16}\int d\theta = \frac{1}{32}\sin 2\theta + \frac{1}{16}\theta + C \\ &= \frac{1}{16}\left(\cos\theta\sin\theta+\theta\right)+C\end{aligned}$$

Como $x-1 = 2\tan\theta$ entonces $\theta = \arctan\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$. Con estos datos, construimos la figura para deducir las relaciones trigonométricas.



Entonces,

$$\sin\theta = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}} \quad \text{y} \quad \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2-2x+5)^2} &= \frac{1}{16}\left(\cos\theta\sin\theta+\theta\right)+C \\ &= \frac{1}{16}\left[\left(\frac{2}{\sqrt{x^2-2x+5}}\right)\left(\frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+5}}\right)+\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]+C \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x^2-2x+5}\right)+\frac{1}{16}\arctan\left(\frac{x-1}{2}\right)+C\end{aligned}$$

d) En este caso, la expresión es de la forma $u^2 - a^2$, por tanto hacemos:

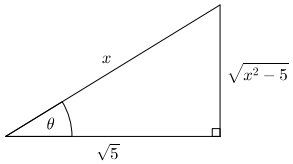
$$\begin{aligned} x &= \sqrt{5}\sec\theta \\ \Rightarrow\ dx &= \sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\ d\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} &= \int \frac{\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{\sqrt{5\sec^2\theta - 5}} \\ &= \int \frac{\sqrt{5}\sec\theta\tan\theta\ d\theta}{\sqrt{5\tan^2\theta}} \\ &= \int \sec\theta\ d\theta \\ &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \end{aligned}$$

Igual que en el problemas anteriores, construimos nuestro triángulo:

De acuerdo a la definición de

$$\sec\theta = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{x}{\sqrt{5}}$$



Obtenemos que:

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-5}} &= \ln|\sec\theta + \tan\theta| + C \\ &= \ln\left(\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{x^2-5}}{\sqrt{5}}\right) + C \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-5}\right) + \ln\left(\sqrt{5}\right) + C \\ &= \ln\left(x + \sqrt{x^2-5}\right) + C' \end{aligned}$$

e) Sea

$$\begin{aligned} x^2 &= \tan\theta \\ \Rightarrow\ 2x\ dx &= \sec^2\theta\ d\theta \end{aligned}$$

Resolvemos:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{1+x^4}\ dx &= \frac{1}{2}\int \frac{2x}{1+x^4}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{1+\tan^2\theta} \\ &= \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2\theta\ d\theta}{\sec^2\theta} = \frac{1}{2}\int d\theta \\ &= \frac{\theta}{2} + C \end{aligned}$$

Como $\theta = \arctan(x^2)$, finalmente:

$$\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\left(x^2\right) + C$$

■

(3) Utilizando el método de las fracciones parciales

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$$

con P, Q polinomios, resuelva:

a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^4-2x^2+4x+1}{x^3-x^2-x+1}\,dx$

c) $\displaystyle\int \frac{2x^2-x+4}{x^3+4x}\,dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}\,dx$

Solución:

a) Nos encontramos con el caso en que $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$. Así, podemos escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

Como $Q(x) = x(2x-1)(x+2)$, hacemos:

$$\begin{aligned}\frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x} &= \frac{A}{x} + \frac{B}{2x-1} + \frac{C}{x+2} \\ &= \frac{A(2x-1)(x+2) + B(x)(x+2) + C(x)(2x-1)}{x(2x-1)(x+2)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(*)\quad &\text{Si } x=0, && \to\ -1 = 2A && \to\ A = \frac{1}{2} \\ (*)\quad &\text{Si } x=-2, && \to\ -1 = 10C && \to\ C = -\frac{1}{10} \\ (*)\quad &\text{Si } x=1/2, && \to\ \frac{1}{4} = \frac{5B}{4} && \to\ B = \frac{1}{5}\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2+2x-1}{2x^3+3x^2-2x}\,dx &= \int \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{5}\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\frac{1}{x+2}\right)\,dx \\ &= \frac{\ln|x|}{2} + \frac{\ln|2x-1|}{10} - \frac{\ln|x+2|}{10} + C\end{aligned}$$

b) Lo primero que debemos notar es que $\text{grad}\,(P) > \text{grad}\,(Q)$. Por tanto, utilizamos la división de polinomios para llevarlos a la forma:

$$\frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1} = (x + 1) + \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

En este caso logramos obtener una fracción de polinomios donde $\text{grad}\,(P') < \text{grad}\,(Q')$ y podemos utilizar las fracciones parciales[3]. Ahora, nos encontramos con el caso en que $Q(x) = (a_1x + b_1)^r$. Así, podemos escribir

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

Como $Q(x) = (x + 1)(x - 1)^2$, hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{4x}{x^3 - x^2 - x + 1} &= \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x - 1} + \frac{C}{(x - 1)^2} \\ &= \frac{A(x - 1)^2 + B(x - 1)(x + 1) + C(x + 1)}{x^3 - x^2 - x + 1} \end{aligned}$$

En este caso es más conveniente utilizar el sistema de ecuaciones para hallar A, B, C. Es decir:

$$A + B = 0\ , \qquad C - 2A = 4\ , \qquad A - B + C = 0$$

Así, $A = -1,\ B = 1,\ C = 2$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \int \frac{x^4 - 2x^2 + 4x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1}\, dx &= \int (x + 1)\, dx + \int \left(-\frac{1}{x + 1} + \frac{1}{x - 1} + \frac{2}{(x - 1)^2} \right)\, dx \\ &= \frac{x^2}{2} + x - \ln|x + 1| + \ln|x - 1| - \frac{2}{x - 1} + C \end{aligned}$$

c) Nos encontramos con el caso en que $Q(x) = (ax^2 + bx + c)$ posee factores cuadráticos irreductibles. Entonces tendremos un factor de la forma

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

Como $Q(x) = x(x^2 + 4)$, hacemos:

$$\begin{aligned} \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 4} \\ &= \frac{A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x)}{x^3 + 4x} \end{aligned}$$

En este caso es más conveniente utilizar el sistema de ecuaciones para hallar A, B, C. Es decir:

$$A + B = 2\ , \qquad 4A = 4\ , \qquad C = -1$$

[3]Recuerde que la base de las fracciones parciales es el hecho de que exista $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ función racional tal que $\text{grad}\,(P) < \text{grad}\,(Q)$.

Así, $A = 1,\ B = 1,\ C = -1$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\right)\, dx \\ &= \ln|x| + \int \frac{x}{x^2+4}\, dx - \int \frac{dx}{x^2+4} \\ &= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C\end{aligned}$$

d) Nos encontramos con el caso en que $Q(x) = (ax^2 + bx + c)^r$. Entonces tendremos factores de la forma

$$\frac{A_1 x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2 x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdots + \frac{A_r x + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

Como $Q(x) = x(x^2+1)^2$, hacemos:

$$\begin{aligned}\frac{1 - x + 2x^2 - x^2}{x(x^2+1)^2} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{(x^2+1)^2} \\ &= \frac{A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x)(x^2+1) + (Dx+E)(x)}{x(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Utilizamos el sistema de ecuaciones para hallar A, B, C, D, E:

$$A + B = 0\ ,\quad C = -1\ ,\quad 2A + B + D = 2\ ,\quad C + E = -1\ ,\quad A = 1$$

Así, $A = 1,\ B = -1,\ C = -1,\ D = 1,\ E = 0$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1 - x + 2x^2 - x^2}{x(x^2+1)^2}\, dx &= \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x-1}{x^2+1} + \frac{x}{(x^2+1)^2}\right)\, dx \\ &= \ln|x| - \int \frac{x}{x^2+1}\, dx - \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{x}{(x^2+1)^2}\, dx \\ &= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - \arctan(x) - \frac{1}{2(x^2+1)} + C\end{aligned}$$

■

(4) Calcule la siguiente integral, utilizando *ambos* métodos analizados anteriormente:

$$\int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos^2 x}$$

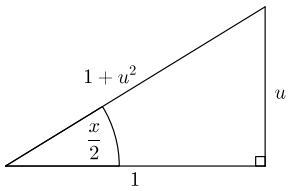
Solución:

En este caso, utilizaremos la siguiente sustitución:

Sea

$$u = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \implies dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

Con ello, construimos la figura para facilitar el entendimiento del cambio de variables. Así, tenemos que:



$$\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2u}{1+u^2}$$

Por tanto,

$$\cos^2(x) = 1-\sin^2(x) = 1-\frac{4u^2}{(1+u^2)^2} = \left(\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2 \Rightarrow \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2}$$

Así, sea $I = \displaystyle\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos^2 x}$.

$$I = \int \frac{(1+u^2)\,du}{u^4+u^3+u+1} = \int \frac{(1+u^2)\,du}{(u+1)^2(u^2-u+1)}$$

Usando fracciones parciales:

$$\frac{1+u^2}{(u+1)^2(u^2-u+1)} = \frac{A}{u+1}+\frac{B}{(u+1)^2}+\frac{Cu+D}{u^2-u+1}$$

Se obtiene $A = C = 0,\ B = \dfrac{2}{3},\ D = \dfrac{1}{3}$. Luego,

$$\begin{aligned} I &= \frac{2}{3}\int \frac{du}{(u+1)^2}+\frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2-u+1} \\ &= \frac{-2}{3(u+1)}+\frac{1}{3}\int \frac{du}{\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} \end{aligned}$$

Sea $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\tan z = u-\dfrac{1}{2}$, entonces

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2}{3(u+1)}+\frac{1}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}\sec^2 z\,dz}{\frac{3}{4}\tan^2 z+\frac{3}{4}} \\ &= -\frac{2}{3(u+1)}+\frac{2}{3\sqrt{3}}\int \frac{\sec^2 z}{\tan^2 z+1}\,dz \;=\; -\frac{2}{3(u+1)}+\frac{2\sqrt{3}}{9}z+C \\ &= -\frac{2}{3(u+1)}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(u-1/2)\right)+C \\ &= -\frac{2}{3\Big(\tan(x/2)+1\Big)}+\frac{2\sqrt{3}}{9}\arctan\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\left[\tan\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{2}\right]\right)+C \end{aligned}$$

■

(5) **[Para profundizar]** La función real f es continua en $[a,b]$ y, para $n = 0, 1, 2, \ldots$,

$$\int_a^b f(x)x^n \, dx = 0$$

Muestre que

$$\int_a^b f^2(x) \, dx = 0$$

y deduzca que $f(x) = 0$ para $a \leq x \leq b$.

Hint: Considere el Teorema de aproximación de Weierstrass, que garantiza la existencia de un polinomio con coeficientes reales, $p(x)$, tal que $\forall \varepsilon > 0$ y para cualquier función f continua sobre un intervalo $[a,b]$ se cumple que:

$$\sup_{x \in [a,b]} |f(x) - p(x)| < \varepsilon$$

Solución:

Dado que trabajamos con una función continua en un compacto (intervalo cerrado y acotado), existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq M$ para $x \in [a,b]$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass, existe un polinomio $p(x) = \sum a_n x^n$ tal que $|f(x) - p(x)| < \varepsilon$ para $x \in [a,b]$. Así,

$$\begin{aligned} \int_a^b f^2(x) \, dx &= \int_a^b f(x)\Big(f(x) - p(x)\Big) \, dx + \int_a^b f(x)p(x) \, dx \\ &= \int_a^b f(x)\Big(f(x) - p(x)\Big) \, dx \\ &\leq M(b-a)\varepsilon \end{aligned}$$

Como el ε es arbitrariamente pequeño, entonces $\displaystyle\int_a^b f^2(x) \, dx = 0$. Si f no es idénticamente cero, entonces existe un $\xi \in [a,b]$ tal que $f(\xi) = \eta \neq 0$. Por continuidad, $f^2(x) > \dfrac{\eta^2}{2}$ para una vecindad de ξ, $\alpha \leq x \leq \beta$. Entonces,

$$\int_a^b f^2(x) \, dx \geq \int_\alpha^\beta f^2(x) \, dx \geq \frac{\eta^2(\beta - \alpha)}{2} > 0$$

lo que es una contradicción.

■

Aplicaciones de la integral

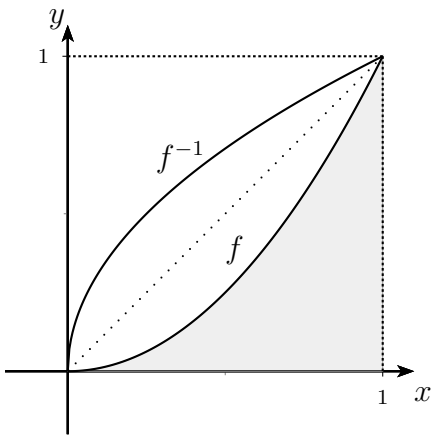
IV.i. Cálculo de áreas

(1) Sea f continua, creciente, con $f(0) = 0,\ f(1) = 1$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{3}$. Calcule

$$\int_0^1 f^{-1}(y)dy$$

Solución:

Es posible obtener la solución al problema de manera geométrica, dado que la función f es continua y creciente (por lo que posee inversa) con $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Entonces, f es de la forma:



Si trazamos la función inversa en el gráfico se deduce que

$$\int_0^1 f^{-1}(y)dy = \frac{2}{3}$$

Determinemos ahora la solución de manera formal, realizando el cambio de variables $y = f(x),\ dy = f'(x)dx$. Así,

$$\int_0^1 f^{-1}(y)dy = \int_0^1 f^{-1}(f(x))f'(x)dx = \int_0^1 xf'(x)dx$$

Integrando por partes, tomando $u = x$ y $dv = f'(x)dx$ entonces $du = dx$ y $v = f(x)$, se obtiene

$$\int_0^1 f^{-1}(y)dy = \int_0^1 xf'(x)dx = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)dx = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

■

(2) Demostrar que la parábola de ecuación $8y^2 = 9x$ divide el área de la región plana encerrada por la elipse de ecuación $3x^2 + 4y^2 = 3$ en la razón:

$$r = \frac{3 + 4\pi\sqrt{3}}{8\pi\sqrt{3} - 3}$$

Solución:

Lo primero que haremos será reescribir la ecuación de la elipse de una manera más conveniente:

$$3x^2 + 4y^2 = 3 \longleftrightarrow x^2 + \frac{y^2}{\frac{3}{4}} = 1 \quad \left(\text{elipse de semiejes } a = 1 \text{ y } b = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

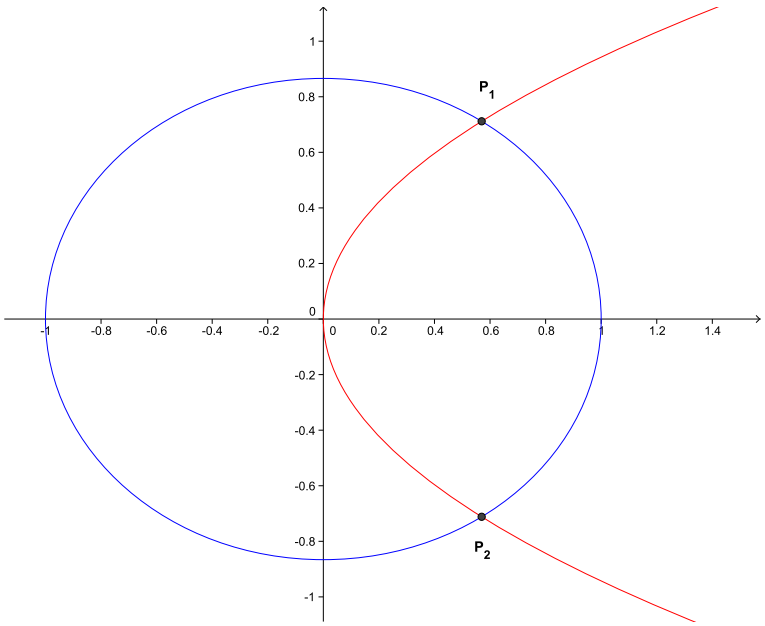
Ahora, buscamos los puntos de intersección entre la elipse y la parábola:

$$\left.\begin{array}{c} y^2 = \frac{9}{8}x \\ \\ x^2 + \frac{y^2}{3/4} = 1 \end{array}\right| \longrightarrow x^2 + \frac{9x}{6} = 1 \longrightarrow x_1 = \tfrac{1}{2} \wedge x_2 = -2$$

La solución correcta (¿por qué?) es $x = \frac{1}{2}$, que posee dos imágenes: $y = \pm\frac{3}{4}$. Es decir, los puntos de intersección de las curvas son:

$$P_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \qquad , \qquad P_2 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$$

Gráficamente,



Calculemos el área entre la elipse y la parábola:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= 2\int_0^{1/2}\sqrt{\frac{9x}{8}}\,dx + 2\int_{1/2}^{1}\sqrt{\frac{3}{4}-\frac{3x^2}{4}}\,dx \\ &= \frac{1}{2}+\sqrt{3}\int_{1/2}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx \\ &= \frac{1}{2}+\sqrt{3}\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\right) \\ &= \frac{3+4\sqrt{3}\pi}{24}\end{aligned}$$

Ahora, calculamos el área al interior de la elipse pero fuera de la parábola (denotada por σ_2). Sabemos que una elipse de semiejes a, b tiene área $A = \pi ab$. Por tanto, como $A = \sigma_1 + \sigma_2$, tenemos:

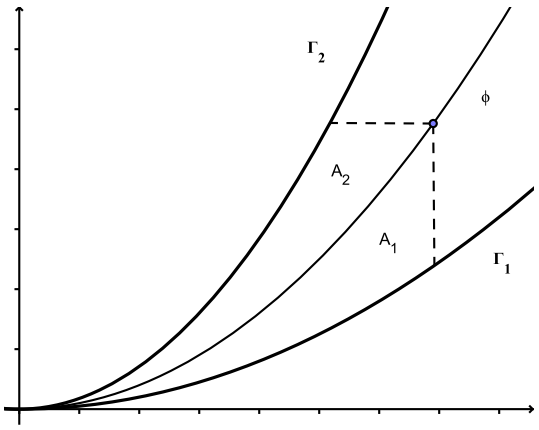
$$\sigma_2 = \pi \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(\frac{3+4\sqrt{3}\pi}{24}\right) = \frac{8\sqrt{3}\pi - 3}{24}$$

Finalmente,

$$r = \frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{3+4\pi\sqrt{3}}{8\pi\sqrt{3}-3}$$

■

(3) Sean $\Gamma_1,\ \Gamma_2$ dos curvas por el origen, como muestra la figura.



Una curva ϕ se dice que *bisecta* la región entre Γ_1 y Γ_2 si, para cada punto $P \in \phi$ las regiones A_1, A_2 poseen la misma área.
Determinar la ecuación $y = f(x)$ de la curva superior, Γ_2, sabiendo que la curva bisectriz tiene ecuación $y = x^2$ y que la curva inferior tiene ecuación $y = x^2/2$.

Solución:

Tenemos que, si $P = (x, x^2)$ es un punto arbitrario de ϕ, entonces

$$A_1(x) = \int_0^x \left(t^2 - \frac{t^2}{2}\right) dt \qquad , \qquad A_2(x) = \int_0^{x^2} \left(\sqrt{t} - g(t)\right) dt$$

donde $g(y) = x$ es la inversa de $y = f(x)$. Igualando ambas áreas y derivando con respecto a x obtenemos[4]:

$$\begin{aligned} \frac{dA_1}{dx} &= \frac{dA_2}{dx} \\ \frac{x^2}{2} &= \left(x - g(x^2)\right) \cdot 2x \\ g(x^2) &= \frac{3}{4}x \\ g(y) &= \frac{3}{4}\sqrt{y} \end{aligned}$$

Así, la curva Γ_2 tiene ecuación

$$x = \frac{3}{4}\sqrt{y} \quad \Longrightarrow \quad y = \frac{16}{9}x^2$$

■

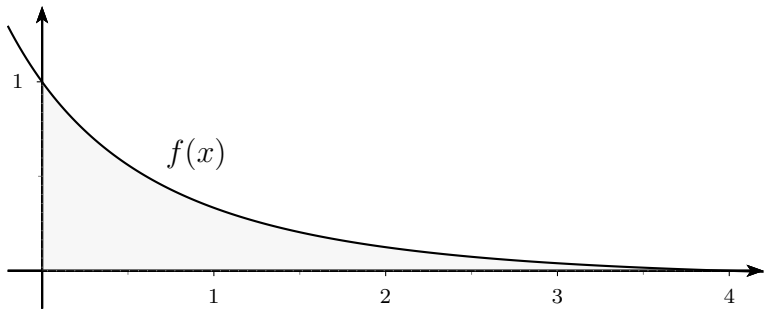
(4) Determine el área de las regiones limitadas por las curvas de ecuaciones

a) $(x+2)^2 y = 4 - x$, con $x, y \geq 0$

b) $y^2 = x^2 - x^4$

Solución:

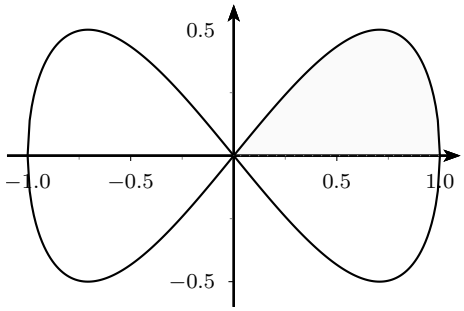
a) Ya sea mediante el análisis gráfico (*ver a continuación*) o por cálculo directo, el área en cuestión es la siguiente:



[4]Recuerde que si $f'(x) = g'(x), \forall x \in A$ y $f(x_0) = g(x_0)$, entonces $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} A = \int_0^4 y\ dx &= \int_0^4 \frac{4-x}{(x+2)^2} dx \\ &= -\int_0^4 \frac{x+2}{(x+2)^2} dx + 6\int_0^4 \frac{dx}{(x+2)^2} \\ &= -\int_0^4 \frac{dx}{x+2} + 6\left[\frac{-1}{x+2}\right]_0^4 \\ &= -\left[\ln 6 - \ln 2\right] + 2 \\ &= 2 - \ln 3 \end{aligned}$$

b) La curva es simétrica con respecto a los ejes coordenados, razón por la cual el área total será cuatro veces la correspondiente al primer cuadrante:



$$\begin{aligned} A = 4\int_0^1 y\ dx &= 4\int_0^1 \sqrt{x^2 - x^4}\ dx \\ &= 4\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\ dx \\ &= \left[-\frac{4}{3}(1-x^2)^{3/2}\right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

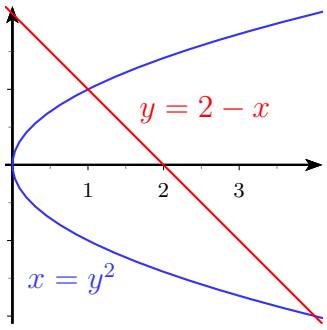
■

(5) *a*) Hallar el área limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = x,\ y = -x + 2$.

b) Hallar el área de la intersección de los círculos $x^2 + y^2 = 4,\ x^2 + y^2 = 4x$.

Solución:

a) La representación gráfica es la siguiente:



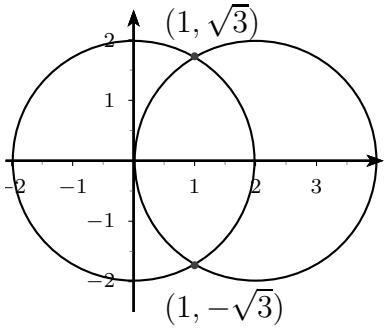
Las curvas se intersecan en los puntos $(1, 1)$ y $(4, -2)$. *Verificar.*

En esta caso podemos tomar y como variable independiente, donde las curvas en cuestión serían $f_1(y) = y^2$ y $f_2(y) = 2 - y$. Así,

$$A = \int_{-2}^{1} [f_2(y) - f_1(y)]dy = \int_{-2}^{1} [2 - y - y^2]dy = \left[2y - \frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3}\right]_{-2}^{1} = \frac{9}{2}$$

Una segunda manera de obtener el área en cuestión es recurriendo a las curvas $y = \sqrt{x},\ y = -\sqrt{x},\ y = 2 - x$. Dicho método queda propuesto.

b) Los círculos se cortan en los puntos $(1, \pm\sqrt{3})$.



$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\sqrt{3}} \left[\sqrt{4 - y^2} - (2 - \sqrt{4 - y^2})\right] dy \\ &= 4\int_0^{\sqrt{3}} \left[2\sqrt{4 - y^2} - 1\right] dy \\ &= \left[\frac{y}{2}\sqrt{4 - y^2} + 2\arcsin\left(\frac{y}{2}\right) - y\right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{8\pi}{3} - 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

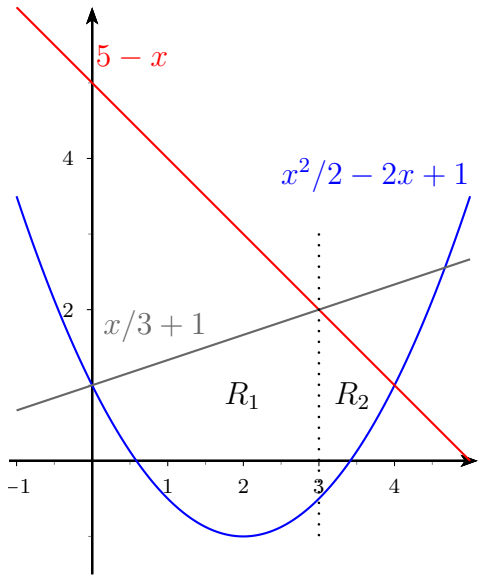
■

(6) Calcule el área de la región Ω, definida como:

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \;\middle|\; y \geq \frac{x^2}{2} - 2x + 1,\ y \leq \frac{x}{3} + 1,\ y \leq -x + 5\right\}$$

Solución:

La región en cuestión puede escribirse como la unión de dos regiones disjuntas, i.e. $\Omega = R_1 \cup R_2$, definidas como sigue:



Las rectas con ecuaciones $y = x/3 + 1,\ y = -x + 5$ se intersecan en el punto $(3, 2)$. La recta con ecuación $y = -x+5$ y la parábola se intersecan en el punto $(4, 1)$. Finalmente, la recta con ecuación $y = x/3 + 1$ y la parábola se intersecan en el punto $(0, 1)$.

$$\begin{aligned} A(R_1) &= \int_0^3 \left[\frac{x}{3} + 1 - \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)\right] dx \\ &= \int_0^3 \left[\frac{7}{3}x - \frac{x^2}{2}\right] dx \\ &= \left(\frac{7}{6}x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^3 = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A(R_2) &= \int_3^4 \left[5 - x - \left(\frac{x^2}{2} - 2x + 1\right)\right] dx \\ &= \int_3^4 \left[4 + x - \frac{x^2}{2}\right] dx \\ &= \left(4x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)\Big|_3^4 = \frac{31}{3} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$A(\Omega) = A(R_1) + A(R_2) \qquad \Longrightarrow \qquad A(\Omega) = 6 + \frac{31}{3}$$

■

(7) Calcule el área de la región plana comprendida entre las curvas

$$C_1:\ y+1=5(x+1)-(x+1)^3 \quad \wedge \quad C_2:\ y=x$$

Solución:

Lo primero que hacemos es hallar los puntos de intersección entre ambas curvas. Si el punto $(x,y)\in C_1\cap C_2$, entonces satisface ambas ecuaciones al mismo tiempo. Por tanto,

$$(x+1)=5(x+1)-(x+1)^3 \qquad \longleftrightarrow \qquad 0=(x+1)\Big[4-(x+1)^2\Big]$$

Las soluciones son $x=-3$, $x=-1$ y $x=1$. Ahora, debemos determinar qué curva está ubicada sobre la otra para realizar la integral. Realicemos las siguientes denotaciones:

$$f(x)=5(x+1)-(x+1)^3-1 \text{ (curva } C_1) \qquad \wedge \qquad g(x)=x \text{ (curva } C_2)$$

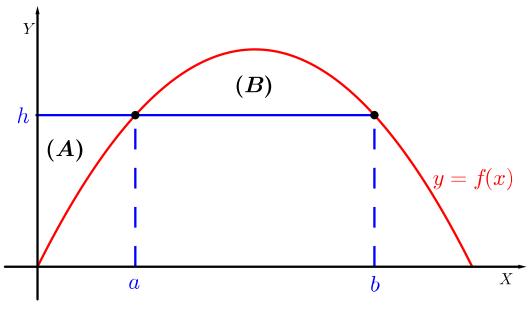
- Si $x\in(-3,-1)$, $g(x)>f(x)$
- Si $x\in(-1,1)$, $f(x)>g(x)$

Por tanto,

$$\begin{aligned} A &= \int_{-3}^{-1}\Big(g(x)-f(x)\Big)\,dx+\int_{-1}^{1}\Big(f(x)-g(x)\Big)\,dx \\ &= \int_{-3}^{-1}\Big(x-[5(x+1)-(x+1)^3-1]\Big)\,dx+\int_{-1}^{1}\Big([5(x+1)-(x+1)^3-1]-x\Big)\,dx \\ &= 4+4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

■

(8) *a*) La curva en la figura corresponde a la función $f(x)=2x-3x^2$. Determine los valores de b y h de modo tal que las áreas A y B sean iguales:



b) Calcule el área limitada por las curvas $y=1/x$, $y=x$ e $y=x/4$ para $x>0$.

Solución:

a) Dado que los puntos de corte de f con el eje X son 0 y 2/3, se cumple que:

$$0 < a < b < \frac{2}{3}$$

Las áreas A y B están dadas por:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^a \Big[h - (2x - 3x^2)\Big]\, dx = ha - a^2 + a^3 \\ B &= \int_a^b \Big[(2x - 3x^2) - h\Big]\, dx = (b^2 - b^3 - hb) - (a^2 - a^3 - ha) \end{aligned}$$

Ahora, como $A = B$, se tiene que:

$$\begin{aligned} ha - a^2 + a^3 &= (b^2 - b^3 - hb) - (a^2 - a^3 - ha) \\ 0 &= b(b - b^2 - h) \qquad\qquad (\text{como } b \neq 0), \\ h &= b - b^2 \end{aligned}$$

Por otra parte, se sabe que $h = f(a) = f(b)$. Usando esta última igualdad,

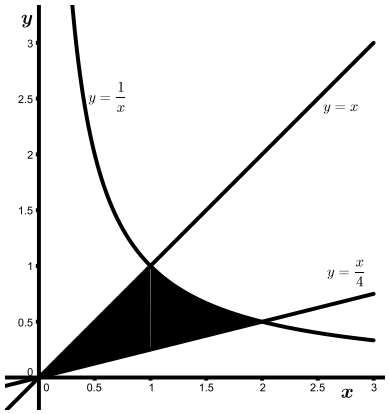
$$h = f(b) = 2b - 3b^2$$

Juntando,

$$b - b^2 = 2b - 3b^2 \iff 2b^2 - b = 0 \iff b(2b - 1) = 0$$

Como $b \neq 0$, se concluye que $b = \dfrac{1}{2}$. Reemplazando, $h = f(1/2) = \dfrac{1}{4}$.

b) Consideremos un gráfico de la situación:



Calculemos la intersección entre $1/x$ y x:

$$\frac{1}{x} = x \quad \longleftrightarrow \quad x^2 = 1 \quad \longleftrightarrow \quad x = \pm 1$$

Como $x > 0$, el único punto de intersección en el dominio es $x = 1$. La intersección entre $1/x$ y $x/4$ es:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{4} \quad \longleftrightarrow \quad x^2 = 4 \quad \longleftrightarrow \quad x = \pm 2$$

Por el mismo argumento anterior, $x = 2$. La intersección entre x y $x/4$ se obtiene fácilmente y es $x = 0$. Así, el área es:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 \left(x - \frac{x}{4}\right)\, dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{4}\right)\, dx \\ &= \frac{3}{4}\int_0^1 x\, dx + \left[\ln|x| - \frac{x^2}{8}\right]_1^2 \\ &= \frac{3}{8} + \left(\ln(2) - \frac{1}{2}\right) - \left(0 - \frac{1}{8}\right) = \ln(2) \end{aligned}$$

■

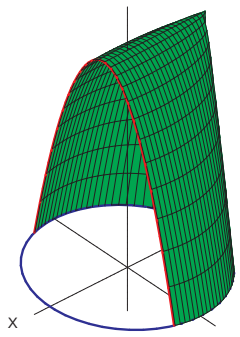
IV.ii. Volúmenes por secciones transversales

(1) *a*) Calcule el volumen de la intersección de los cilindros

$$\mathcal{C}_1 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + z^2 \leq 1\}$$

b) La base de un sólido S es un disco de radio 1. Determine su volumen si las secciones perpendiculares al plano y a un diámetro dan arcos parabólicos de altura 1.



Solución:

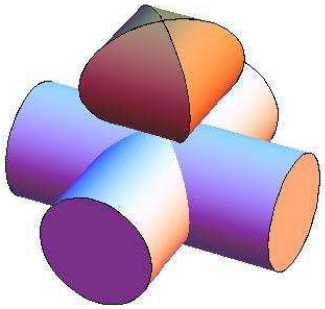
a) Aplicaremos el método de las secciones transversales. Para ello, necesitamos establecer la forma de dichas secciones. Para un x fijo, la región correspondiente corresponde a los puntos (x, y, z) tales que:

$$y^2 \leq 1 - x^2 \quad , \qquad z^2 \leq 1 - x^2$$

Luego,

$$-\sqrt{1 - x^2} \leq y \leq \sqrt{1 - x^2}$$
$$-\sqrt{1 - x^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2}$$

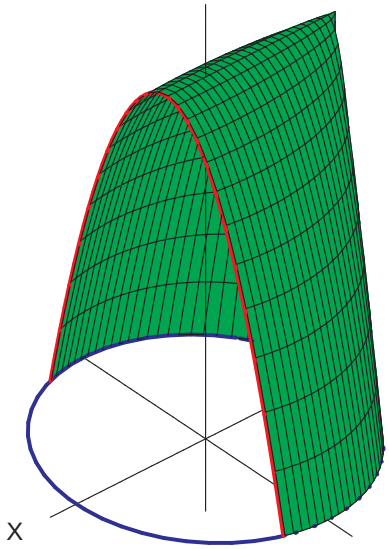
de donde se deduce que la secciones transversales corresponden a cuadrados de lado $2\sqrt{1 - x^2}$, para x fijo. Gráficamente,



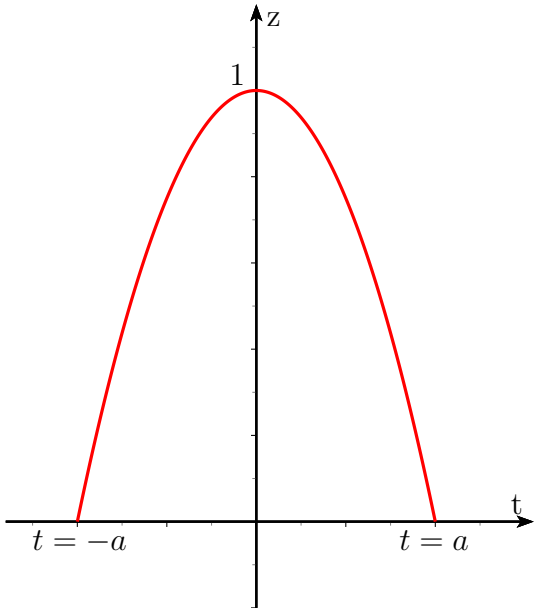
Los límites de integración son $x \in [-1, 1]$ y el volumen es:

$$V = \int_{-1}^{1} A(x)\ dx = \int_{-1}^{1} 4(1 - x^2)\ dx = 4\left(x - \frac{x^2}{3}\right)\Big|_{-1}^{1} = \frac{16}{3}$$

b) Tomamos como diámetro el eje X, recorrido desde -1 a 1. El sólido en cuestión posee la siguiente forma:



con sección transversal



donde los extremos de las parábolas, i.e. $-a$ y a, pertenecen a la circunferencia unitaria. Así, $a = \sqrt{1-x^2}$. La parábola tiene por ecuación $z = 1 - ct^2$, donde la constante c debe ser determinada. Notemos que $z(a) = z(-a) = 0$, y con ello $1 - ca^2 = 0$ y por ende,

$$z(t) = 1 - \frac{t^2}{a^2}$$

Determinemos el área transversal:

$$\sigma(x) = \int_{-a}^{a} 1 - \frac{t^2}{a^2}\, dt = 2\int_{0}^{a} 1 - \frac{t^2}{a^2}\, dt = \frac{4a}{3} = \frac{4}{3}\sqrt{1-x^2}$$

Por tanto, el volumen del sólido es:

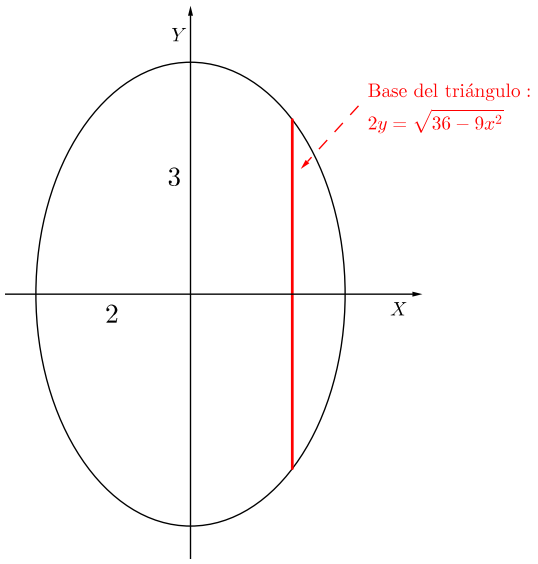
$$V = \int_{-1}^{1} \sigma(x)\, dx = 2\int_{0}^{1} \sigma(x)\, dx = \frac{8}{3} \underbrace{\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\, dx}_{\text{un cuarto de círculo}} = \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{3}$$

■

(2) Considere un sólido S, donde su base es una región elíptica limitada por la curva $9x^2+4y^2 = 36$. Las secciones transversales, perpendiculares al eje X, son triángulos rectángulos isósceles con hipotenusa en la base. Determine el volumen de S.

Solución:

Consideremos la siguiente situación:



Si ℓ es un cateto del triángulo rectángulo isósceles y su hipotenusa es $2y$, entonces:

$$\ell^2 + \ell^2 = (2y)^2 \quad \longleftrightarrow \quad 2\ell^2 = 4y^2 \quad \longleftrightarrow \quad \ell^2 = 2y^2$$

Así,

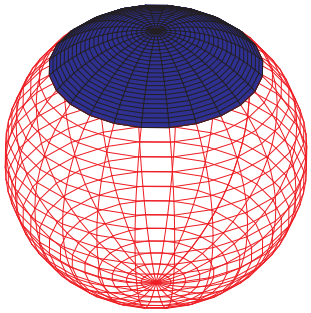
$$\begin{aligned} V &= \int_{-2}^{2} A(x)\, dx = \int_{-2}^{2} \frac{\ell^2}{2}\, dx \\ &= \int_{-2}^{2} y^2\, dx \\ &= \int_{-2}^{2} \frac{36 - 9x^2}{4}\, dx = \int_{0}^{2} \frac{36 - 9x^2}{2}\, dx \\ &= \frac{9}{2}\int_{0}^{2} (4 - x^2)\, dx \\ &= 24 \end{aligned}$$

■

IV.iii. Sólidos de revolución

(1) *a*) La región Ω limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = 4x$ y $x^2 = 4y$ gira alrededor del eje $x = 4$. Determine el volumen del sólido de revolución así generado.

b) Calcula el volumen de un casquete polar de radio r y altura h.

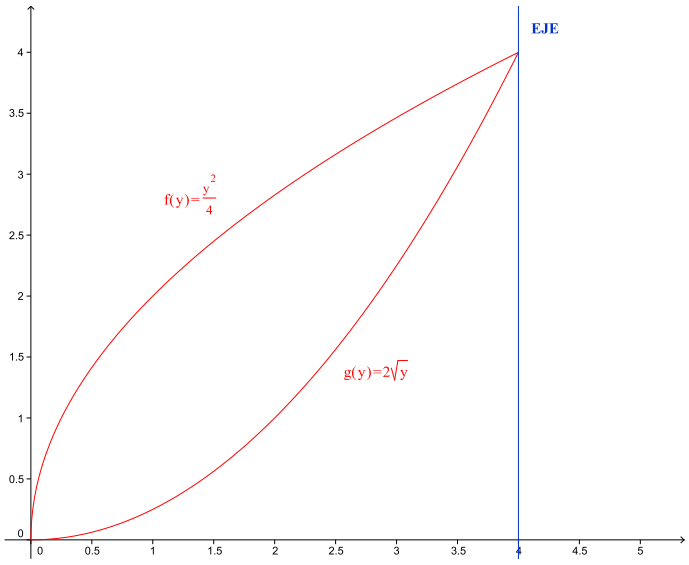


Solución:

a) Recordemos la fórmula del volumen asociado a rotar una región en torno a $x = x_0$ mediante el método de discos:

$$V = \pi \int_c^d \left([f(y) - x_0]^2 - [g(y) - x_0]^2 \right) \, dy$$

La región Ω tiene la siguiente forma:



con $f(y) = \frac{y^2}{4}$ y $g(y) = 2\sqrt{y}$. Reemplazando en las fórmulas,

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^4 \left(\left[\frac{y^2}{4} - 4 \right]^2 - [2\sqrt{y} - 4]^2 \right) \, dy \\ &= \pi \int_0^4 -4y + 16\sqrt{y} + \frac{y^4}{16} - 2y^2 \, dy \\ &= \frac{352\pi}{15} \end{aligned}$$

b) El casquete se generará al girar parte de la circunferencia $x^2 + y^2 = r^2$ en torno al eje Y. Entonces,

$$V = \pi \int_{r-h}^{r} f(y)^2 \, dy = \pi \int_{r-h}^{r} r^2 - y^2 \, dy = \pi \left(r^2 y - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{r-h}^{r} = \frac{\pi h^2 (3r - h)}{3}$$

■

(2) *a*) Calcule el volumen del sólido generado al rotar la región limitada por las curvas $y = \cos(x)$ e $y = \sin(x)$ entre 0 y $\frac{\pi}{4}$ al ser rotada en torno al eje Y.

b) La siguiente suma de integrales representa el volumen generado al rotar una cierta región R del plano en torno al eje X:

$$\pi \int_1^{\sqrt{2}} [x^2 - (x-2)^4]\, dx + \pi \int_{\sqrt{2}}^2 [(4-x^2) - (x-2)^4]\, dx$$

Determine R y escriba como una integral el volumen generado al rotar R en torno al eje $x = -1$.

Solución:

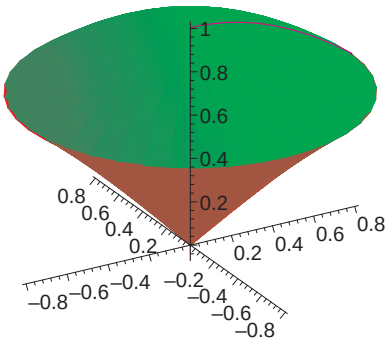
a) Utilizaremos el método de cascarones cilíndricos[5] que posee la siguiente fórmula general:

$$V = 2\pi \int_a^b |x - x_0|[f(x) - g(x)]\, dx$$

En este caso,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\pi/4} x[\cos(x) - \sin(x)]\, dx \\ &= 2\pi \left\{ \int_0^{\pi/4} x\cos(x)\, dx - \int_0^{\pi/4} x\sin(x)\, dx \right\} \\ &= 2\pi \Big(x\big(\cos(x) + \sin(x)\big) + \cos(x) - \sin(x) \Big)\Big|_0^{\pi/4} \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi^2}{2} - 2\pi \end{aligned}$$

Gráficamente, el sólido es:



[5]En el método de cascarones cilíndricos, la variable de integración es distinta a la del eje de rotación.

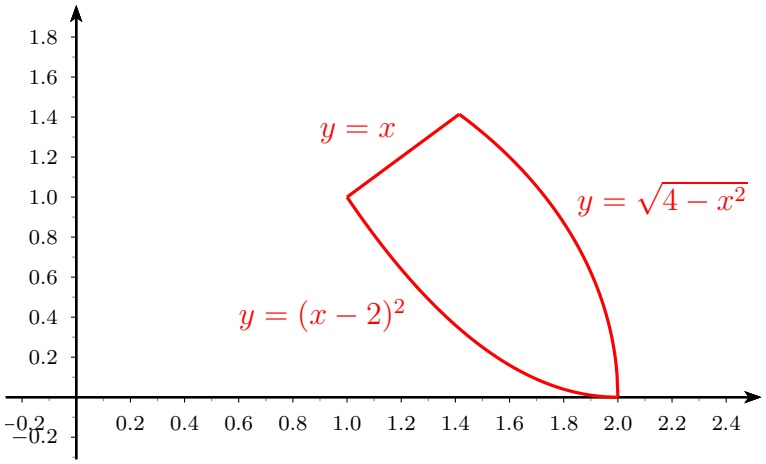
b) Dado que la variable de integración corresponde al eje de rotación, concluimos que dicho volumen fue obtenido mediante el método de discos de la forma:

$$V = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) \, dx$$

Por tanto, basta identificar los extremos del intervalo de integración, así como las funciones f, g asociadas. Así, tenemos que R es la unión de las regiones dadas por:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x,y) \mid 1 \leq x \leq \sqrt{2} \ , \ (x-2)^2 \leq y \leq x\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(x,y) \mid \sqrt{2} \leq x \leq 2 \ , \ (x-2)^2 \leq y \leq \sqrt{4-x^2}\}$$

Es decir,



Ahora, el volumen buscado está dado por:

$$\tilde{V} = 2\pi \int_1^{\sqrt{2}} (x+1) \left[x - (x-2)^2 \right] \, dx + 2\pi \int_{\sqrt{2}}^2 (x+1) \left[\sqrt{4-x^2} - (x-2)^2 \right] \, dx$$

■

(3) La región limitada por la curva $\Gamma : \ 16y^2 = (x+4)^3$, su tangente en el punto $(12, 16)$ y el eje X, gira en torno a dicho eje. Calcule el volumen del cuerpo así generado.

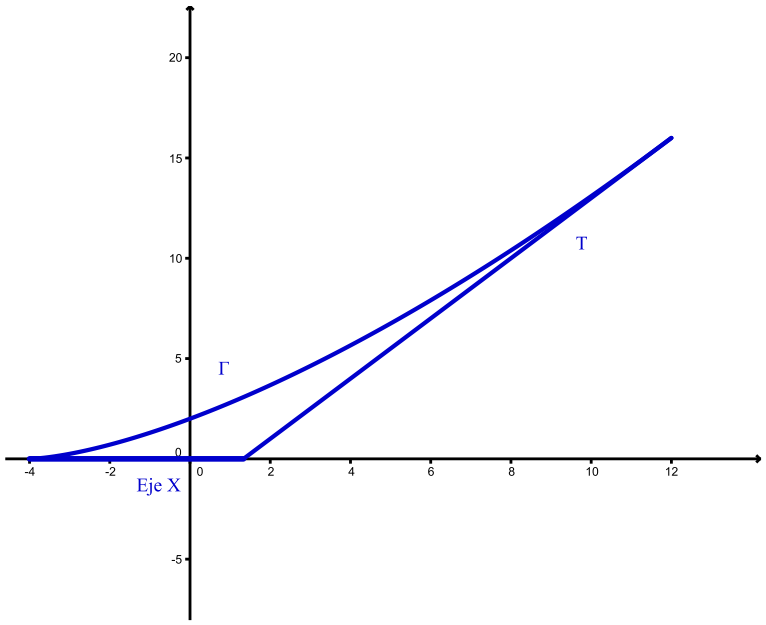
Solución:

Lo primero que hallamos es la recta tangente. Usamos derivación implícita:

$$\begin{aligned} 16y^2 &= (x+4)^3 \ \Big/ \frac{d}{dx} \\ 32y \cdot \frac{dy}{dx} &= 3(x+4)^2 \Big|_{x=12, \ y=16} \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

y por tanto la recta tangente es $T : \ \dfrac{3}{2}x - 2$.

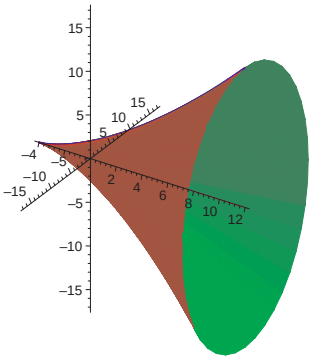
Ya sea que se utilicen las técnicas de Cálculo I para determinar la posición relativa de Γ y T, o bien se realice un esbozo del gráfico de la región, concluiremos que ésta posee la siguiente forma:



Calculando los puntos de intersección entre Γ, T, Eje X, el volumen queda como sigue:

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-4}^{4/3} \left(\frac{(x+4)^3}{16} \right) \, dx + \pi \int_{4/3}^{12} \left(\frac{(x+4)^3}{16} - \frac{(3x-4)^2}{4} \right) \, dx \\ &= \frac{\pi (x+4)^4}{64} \Big|_{-4}^{4/3} + \pi \left(\frac{(x+4)^4}{64} - \frac{(3x-4)^3}{36} \right) \Big|_{4/3}^{12} \\ &= \frac{1024\pi}{9} \end{aligned}$$

La región sólida corresponde a:



■

(4) Considere la región R determinada por las desigualdades

$$x \leq 5 - (y-2)^2 \quad \wedge \quad -\frac{x}{4} + 2 \leq y \leq 2x + 2$$

a) Escriba, en términos de integrales, el volumen generado al rotar R en torno al eje $x = -1$.

b) Escriba, en términos de integrales, el momento ejercido por R con respecto al eje X.

Solución:

La región R queda acotada entre las dos rectas que se cortan en $(0,2)$, y la parábola horizontal abierta hacia la izquierda. Los puntos de corte de la parábola son $(1,4)$ con la recta $y=2x+2$, y $(4,1)$ con la recta $y=-x/4+2$.

a)

$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^1 (x+1)\left(\left[2x+2\right]-\left[-\frac{x}{4}+2\right]\right)\,dx\;+ \\ &\quad 2\pi\int_1^4 (x+1)\left(\left[2+\sqrt{5-x}\right]-\left[-\frac{x}{4}+2\right]\right)\,dx\;+ \\ &\quad 2\pi\int_4^5 (x+1)\left(\left[2+\sqrt{5-x}\right]-\left[2-\sqrt{5-x}\right]\right)\,dx \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} M_x &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\left[2x+2\right]^2-\left[-\frac{x}{4}+2\right]^2\right)\,dx\;+ \\ &\quad \frac{1}{2}\int_1^4 \left(\left[2+\sqrt{5-x}\right]^2-\left[-\frac{x}{4}+2\right]^2\right)\,dx\;+ \\ &\quad \frac{1}{2}\int_4^5 \left(\left[2+\sqrt{5-x}\right]^2-\left[2-\sqrt{5-x}\right]^2\right)\,dx \end{aligned}$$

■

(5) Calcular el volumen de revolución que se genera al rotar la porción de plano encerrada por las curvas de ecuaciones $x=0$ y $x=2y^3-y^4$ en torno a la recta de ecuación $y=-2$.

Solución:

Por el Teorema de Pappus, el volumen viene dado por:

$$V=2\pi A(\bar{y}+2)$$

donde $(\bar{x},\bar{y})$ es el centro de masa de la región y A es su área.

$$\bar{y}=\frac{\displaystyle\int_0^2 y(2y^3-y^4)\,dy}{\displaystyle\int_0^2 (2y^3-y^4)\,dy}\,,\qquad A=\int_0^2 (2y^3-y^4)\,dy$$

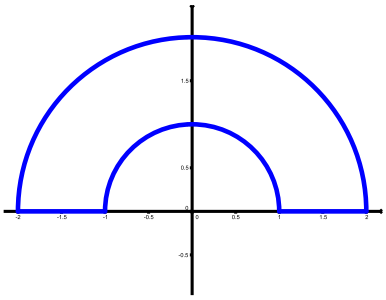
Así,

$$V=2\pi\left(\int_0^2 y(2y^3-y^4)\,dy+2A\right)=\frac{32\pi}{3}$$

■

(6) *a*) Calcula el volumen de un toro macizo o toroide, cuyos radios son r y R.

b) Utilizando el Teorema de Pappus, determine el volumen generado al rotar en torno al eje X la siguiente figura de radios 1 y 2:



Solución:

a) Este problema puede realizarse utilizando el método de disco (Propuesto), pero es más rápido si utilizamos el Teorema de Pappus.

Para generar un toroide, debemos rotar un círculo de radio r y centrado en $(R, 0)$ en torno al eje Y. En ese sentido, el centro de masa del círculo es:

$$(X_R, Y_R) = (R, 0) \qquad \text{(por simetría)}$$

El área del mismo es simplemente $A = \pi r^2$. Por tanto,

$$V = 2\pi X_R A = 2\pi^2 R r^2$$

b) Identificamos tres regiones: $\mathcal{R}_1$ como el semicírculo de radio 1, $\mathcal{R}$ como el semicírculo de radio 2 y $\mathcal{R}_2$ como la medialuna en cuestión. Así, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \bigcup \mathcal{R}_2$.

Calculemos el centro de masa de un semicírculo de radio r. Por simetría, sabemos que $\overline{x} = 0$. Ahora,

$$\overline{y} = \frac{2}{\pi r^2} \int_0^r y \; 2\sqrt{r^2 - y^2} \; dy = \frac{4}{\pi r^2} \cdot \frac{2}{3} \cdot -\frac{1}{2}(r^2 - y^2)\Big|_0^r = \frac{4r}{3\pi}$$

De esta forma, $\left(X_R = 0, \; Y_R = \frac{8}{3\pi}\right)$ y $\left(X_{R_1} = 0, \; Y_{R_1} = \frac{4}{3\pi}\right)$. Por tanto, como $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \bigcup \mathcal{R}_2$, se cumple que:

$$AX_R = A_1 X_{R_1} + A_2 X_{R_2} \qquad , \qquad AY_R = A_1 Y_{R_1} + A_2 Y_{R_2}$$

Entonces, como $A = 2\pi$, $A_1 = \frac{\pi}{2}$ y $A_2 = \frac{3\pi}{2}$,

$$2\pi \cdot \frac{8}{3\pi} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{4}{3\pi} + \frac{3\pi}{2} \cdot Y_{R_2} \quad \Rightarrow \quad Y_{R_2} = \frac{28}{9\pi}$$

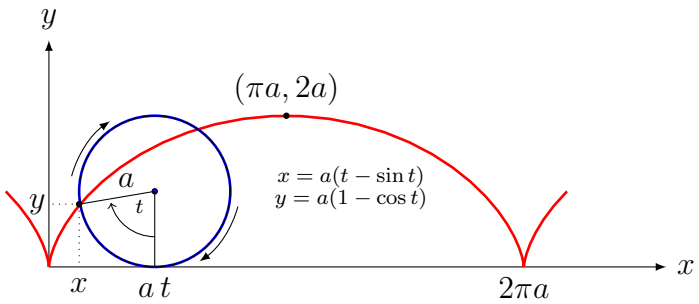
$$2\pi \cdot 0 = \frac{\pi}{2} \cdot 0 + \frac{3\pi}{2} \cdot X_{R_2} \quad \Rightarrow \quad X_{R_2} = 0$$

Por teorema de Pappus, sabemos que el volumen del sólido de revolución será $V = 2\pi Y_{R_2} A_2$, i.e:

$$V = 2\pi \cdot \frac{28}{9\pi} \cdot \frac{3\pi}{2} = \frac{28\pi}{3}$$

■

(7) Considere un arco de cicloide de ecuaciones $x(t) = a(t - \sin t)$ e $y(t) = a(1 - \cos t)$ ubicado entre $x = 0$ y $x = 2\pi a$.



a) Determine el centroide de la región plana R limitada por el arco mencionado y el eje X

b) Utilizando el Teorema de Pappus, calcule el volumen generado al rotar R en torno al eje X

c) Si quisiera obtener el volumen del sólido generado al rotar R en torno a una recta arbitraria de ecuación $ax + by + c = 0$, ¿cómo lo haría?

Solución:

a) Antes que todo, calculamos el área de la región R:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{2\pi a} y \, dx \\ &= \int_0^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 \, dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t) \, dt \\ &= a^2(2\pi + 0 + \pi) \\ &= 3\pi a^2 \end{aligned}$$

Sea $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x}, \overline{y})$ el centroide de la región R. Así,

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{A} \int_0^{2\pi a} \frac{y^2}{2} \, dx \\ &= \frac{1}{2A} \int_0^{2\pi} a^3(1 - \cos t)^3 \, dt \\ &= \frac{a^3}{2A} \int_0^{2\pi} (1 - 3\cos t + 3\cot^2 t - \cos^3 t) \, dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a^3}{2A}(2\pi - 0 + 3\pi - 0) \\
&= \frac{5\pi a^3}{2A} \\
&= \frac{5a}{6}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{A}\int_0^{2\pi a} xy\ dx \\
&= \frac{1}{A}\int_0^{2\pi} a^3(t-\sin t)(1-\cos t)^2\ dt \\
&= \frac{a^3}{A}\int_0^{2\pi} (t - 2t\cos t + t\cos^2 t - \sin t + 2\sin t\cos t - \cos^2 t\sin t)\ dt \\
&= \frac{a^3}{A}(2\pi^2 - 0 + \pi^2 - 0 + 0 - 0) \\
&= \frac{3\pi^2 a^2}{A} \\
&= \pi a
\end{aligned}
$$

b) Por el Teorema de Pappus, el volumen generado al revolucionar una región R en torno a una recta L es

$$V = 2\pi d(\overline{\mathbf{x}}, L)A$$

donde $d(\overline{\mathbf{x}}, L)$ es la distancia entre el centroide de R y la recta L, y A es el área de R. En este caso, es fácil ver que:

$$d(\overline{\mathbf{x}}, L) = \overline{y} = \frac{5a}{6} \qquad \wedge \qquad A = 3\pi a^2$$

Finalmente,

$$V = 2\pi\left(\frac{5a}{6}\right)(3\pi a^2) = 5\pi^2 a^2$$

c) En un caso más general, lo único que cambia respecto al procedimiento anterior es la distancia entre el centroide y la recta. Recordando la ecuación de distancia entre un punto y una recta,

$$d(\overline{\mathbf{x}}, L) = \frac{|a\overline{x} + b\overline{y} + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

■

IV.iv. Centroide de regiones planas y trabajo

(1) *a*) Una lámina plana está encerrada entre la parábola de ecuación $y = x^2$ y la recta de ecuación $y = x + 2$. La densidad en $P(x, y)$ es proporcional al cuadrado de la distancia desde P al eje Y . Determinar el centro de masas de esta lámina.

b) Considere la región del plano limitada por

$$0 \leq y \leq 1 - x^2$$

con densidad de masa $\mu(y) = \sqrt{1-y}$. Determine los momentos con respecto a ambos ejes. ¿Qué puede afirmar sobre su centroide?

Solución:

a) Lo primero que hacemos es encontrar los puntos de intersección de ambas curvas:

$$x^2 = x + 2 \longrightarrow (x-2)(x+1) = 0 \longrightarrow x_1 = -1 \wedge x_2 = 2$$

Ahora, como la densidad es proporcional al cuadrado de la distancia de cualquier punto al eje Y, i.e. la coordenada x de cada punto, entonces:

$$\mu(x) = \alpha x^2 \ , \quad \text{con } \alpha \text{ constante de proporcionalidad}$$

Por definición, sabemos que las coordenadas del centroide (X_R, Y_R) se obtienen mediante:

$$X_R = \frac{M_y}{A} \qquad , \qquad Y_R = \frac{M_x}{A}$$

con,

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{2} \mu(x)\left[x + 2 - x^2\right]\ dx = \alpha \int_{-1}^{2} \left[x^3 + 2x^2 - x^4\right]\ dx = \frac{63}{20}\alpha \\
M_x &= \int_{-1}^{2} \mu(x)\left[x + 2 - x^2\right] \frac{[x + 2 + x^2]}{2}\ dx \\
&= \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^{2} \left[x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x^6\right]\ dx = \frac{531}{70}\alpha \\
M_y &= \int_{-1}^{2} \mu(x)x\left[x + 2 - x^2\right]\ dx = \alpha \int_{-1}^{2} \left[x^4 + 2x^3 - x^5\right]\ dx = \frac{18}{5}\alpha
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$X_R = \frac{\frac{18}{5}\alpha}{\frac{63}{20}\alpha} = \frac{8}{7} \qquad , \qquad Y_R = \frac{\frac{531}{70}\alpha}{\frac{63}{20}\alpha} = \frac{118}{49}$$

b) Dado que la densidad de masa está expresada en términos de la variable y, todas nuestras integraciones deben realizarse en esa variable. Así, los respectivos momentos corresponden a:

$$M_x = \int_c^d y\mu(y)\big[f(y) - g(y)\big]\ dy \qquad , \qquad M_y = \int_c^d \mu(y)\frac{f(y)^2 - g(y)^2}{2}\ dy$$

con $f(y) = \sqrt{1-y}$, $g(y) = -\sqrt{1-y}$ las respectivas ramas de la parábola expresadas en términos de y. Por tanto,

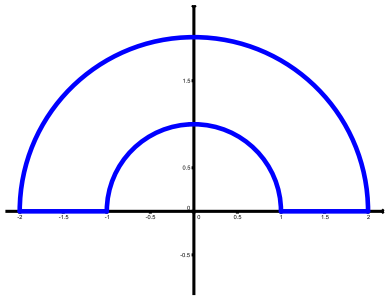
$$M_x = \int_0^1 y\sqrt{1-y}\left[2\sqrt{1-y}\right]\,dy = \frac{1}{3}$$
$$M_y = \int_0^1 0\;dy = 0$$

y con ello,

$$(X_R, Y_R) = \left(0, \frac{1}{3A}\right)$$

■

(2) Determine el centroide de la siguiente figura, donde los semicírculos tienen radios 1 y 2:



Solución:

Identificamos tres regiones: $\mathcal{R}_1$ como el semicírculo de radio 1, $\mathcal{R}$ como el semicírculo de radio 2 y $\mathcal{R}_2$ como la medialuna en cuestión. Así, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \bigcup \mathcal{R}_2$.

Calculemos el centro de masa de un semicírculo de radio r. Por simetría, sabemos que $\overline{x} = 0$. Ahora,

$$\overline{y} = \frac{2}{\pi r^2}\int_0^r y\;2\sqrt{r^2-y^2}\,dy = \frac{4}{\pi r^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot -\frac{1}{2}(r^2-y^2)\Big|_0^r = \frac{4r}{3\pi}$$

De esta forma, $\left(X_R = 0,\; Y_R = \frac{8}{3\pi}\right)$ y $\left(X_{R_1} = 0,\; Y_{R_1} = \frac{4}{3\pi}\right)$. Por tanto, como $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \bigcup \mathcal{R}_2$, se cumple que:

$$AX_R = A_1X_{R_1} + A_2X_{R_2} \qquad , \qquad AY_R = A_1Y_{R_1} + A_2Y_{R_2}$$

Entonces, como $A = 2\pi$, $A_1 = \frac{\pi}{2}$ y $A_2 = \frac{3\pi}{2}$,

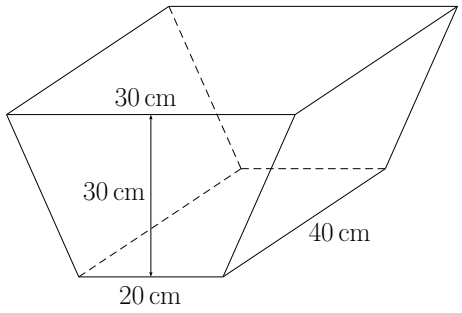
$$2\pi\cdot\frac{8}{3\pi} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{4}{3\pi} + \frac{3\pi}{2}\cdot Y_{R_2} \quad \Rightarrow \quad Y_{R_2} = \frac{28}{9\pi}$$

mientras que,

$$2\pi\cdot 0 = \frac{\pi}{2}\cdot 0 + \frac{3\pi}{2}\cdot X_{R_2} \quad \Rightarrow \quad X_{R_2} = 0$$

■

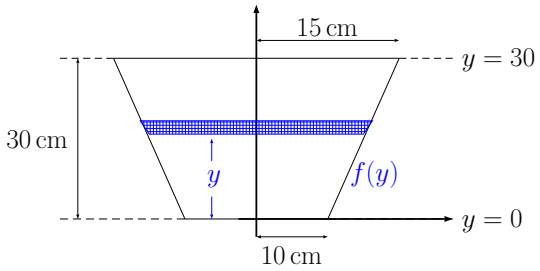
(3) La siguiente figura es un recipiente de base rectangular, dos tapas en forma de trapecios y dos laterales rectangulares:



Si el recipiente es llenado con un líquido de densidad ρ hasta 25 cm de profundidad, calcule el trabajo necesario para sacar el agua fuera del mismo.

Solución:

Consideremos el siguiente sistema coordenado:



El borde derecho puede describirse mediante la ecuación de una recta $f(y) = my + n$, donde:

$$m = \frac{15 - 10}{30 - 0} = \frac{1}{6} \qquad \wedge \qquad n = 10$$

Así,

$$x = \frac{y}{6} + 10$$

¿Cuál es el peso de la franja destacada? El diferencial de peso, dP, corresponde al producto entre la aceleración de gravedad y el diferencial de masa: $dP = g\ dM$. Ahora bien, la masa de la franja de líquido destacado se consigue multiplicando la densidad por el volumen, y este último se calcula como el producto entre el largo ℓ del recipiente por el diferencial de área: $dM = \rho\ell\ dA$. Finalmente, el área de una sección de fluido se calcula como:

$$dA = 2\, f(y)\ dy$$

donde el factor 2 se debe a que $f(y)$ solo describe el borde derecho, y la figura es simétrica. Una franja de líquido que está a una altura y debe desplazarse una distancia $30 - y$ para salir del

recipiente. Por tanto, el trabajo total es:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{25} (\text{desplazamiento}) \times (\text{fuerza}) \\ &= 2\int_0^{25} (30-y) g\rho\ell \left(\frac{y}{6}+10\right)\, dy \\ &= 80g\rho \int_0^{25} (30-y)\left(\frac{y}{6}+10\right)\, dy \\ &= \frac{3650000g\rho}{9} \end{aligned}$$

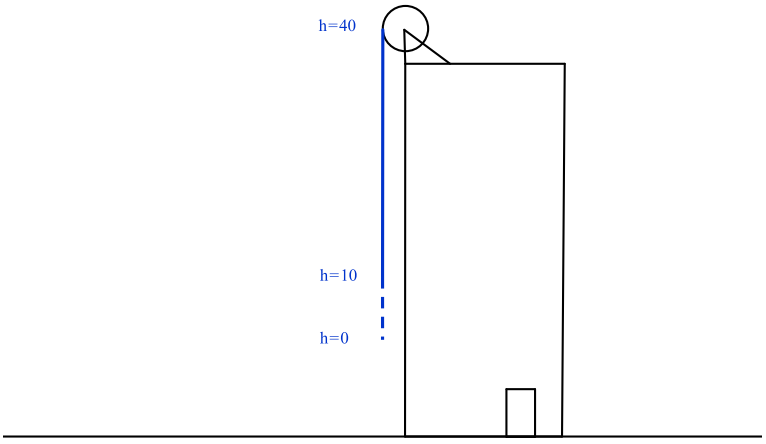
■

(4) Un cable de acero de uniforme, de 40 metros de largo y con una masa total de 60 kilos, cuelga de la azotea de un edificio altura mayor a 40 metros. Hallar el trabajo que se realiza en recoger 10 metros del cable desde la azotea. (Asuma que la única fuerza que actúa sobre el cable es la de gravedad).

Solución:

Consideremos una eje vertical, H, en la dirección del cable y cuya orientación positiva es hacia arriba. Situemos el origen en la posición que ocupa el extremo del cable colgante en el instante inicial, de modo que la azotea del edificio está en la coordenada $h = 40$.

El trabajo total, W se hace contra la gravedad al subir el extremo inferior del cable a la posición $h = 10$:



Cuando el extremo inferior del cable se encuentra en la posición h, donde $0 < h < 10$, la altura de cable que cuelga es de $40 - h$ metros y, como la densidad de masa es de $\lambda = 60/40 = 3/2\,\text{kg/m}$, en ese instante el peso de la porción de cable que aún cuelga es

$$P(h) = \lambda g(40-h)$$

siendo g la aceleración de gravedad. Así, si dh es infinitesimalmente pequeño, el trabajo realizado en llevar el extremo del cable desde h hasta $h + dh$ es

$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dr} = \lambda g(40-h)dh$$

y por tanto, el trabajo total es

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{10} dW = \int_0^{10} \lambda g(40-h)dh = \lambda g \int_0^{10} (40-h)dh \\ &= \lambda g \left(400 - \frac{10^2}{2}\right) \\ &= 350\lambda g \end{aligned}$$

Reemplazando $g = 9.81\,\mathrm{kg\,m/s^2}$, tenemos:

$$W = 5150.25\,\mathrm{J}$$

■

IV.v. Longitud de curvas

(1) *a*) Hallar la longitud del arco de la catenaria $y = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$ desde $x = 0$ hasta $x = a$.

b) Calcule la longitud de la curva $y = x^{3/2}$, $x \in [0, 4]$.

c) Determine la longitud de una arco de cicloide de ecuaciones paramétricas $x(t) = t - \sin(t)$ e $y(t) = 1 - \cos(t)$.

Solución:

a) En este caso,

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx = \sqrt{1 + \frac{1}{4}\left(e^{2x/a} - 2 + e^{-2x/a}\right)}dx = \frac{1}{2}\left(e^{x/a} + e^{-x/a}\right)$$

por tanto,

$$L = \int_0^a ds = \frac{a}{2}\left(e^{x/a} - e^{-x/a}\right)\Big|_0^a = \frac{a}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$$

b) Sea $f(x) = x^{3/2}$, entonces sabemos que la longitud de la curva es:

$$L = \int_0^4 \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9x}{4}}\,dx$$

Haciendo el cambio de variables $z = 1 + 9x/4$, $dz = 9dx/4$ y obtenemos:

$$L = \frac{4}{9}\int_0^{10} z^{1/2}\,dz = \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}\Big|_0^{10} = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - 1\right)$$

c) Se describe un arco cuando $0 \leq t \leq 2\pi$. En este caso, el diferencial de largo corresponde a:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{(1-\cos(t))^2 + \sin^2(t)}dt = \sqrt{2(1-\cos(t))}dt$$

Por tanto, el largo del arco es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1-\cos(t))}dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right)dt = -4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8 \end{aligned}$$

■

(2) Determine la longitud de la curva

$$y = \int_1^x \sqrt{t^3-1}\; dt\;, \qquad 1 \leq x \leq 4$$

Solución:

El diferencial de longitud de arco está dado por:

$$ds = \sqrt{1+y'^2}\; dx$$

En este caso, utilizando el TFC, podemos hallar su valor:

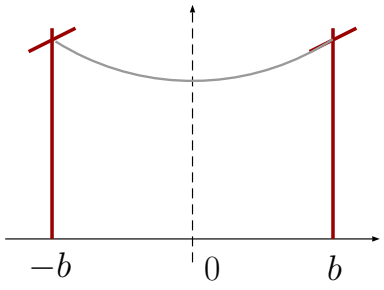
$$\begin{aligned} y' &= \sqrt{x^3-1} \\ y'^2 &= x^3-1 \\ 1+y'^2 &= x^3 \\ \therefore\; ds &= x^{3/2}\; dx \end{aligned}$$

Así, la longitud es:

$$L = \int_1^4 ds = \int_1^4 x^{3/2}\; dx = \frac{2}{5}\left(4^{5/2} - 1^{5/2}\right) = \frac{62}{5}$$

■

(3) En la figura se muestra un cable telefónico que cuelga entre dos postes en $x = -b$ y $x = b$. El cable toma la forma de una catenaria, cuya ecuación es $y = c + a\,\cosh(x/a)$. Halle la longitud del cable.



Solución:

Para determinar el largo del cable, necesitamos conocer la derivada de la función que lo representa:

$$\begin{aligned} y' &= \sinh\left(\frac{x}{a}\right) \\ 1+y'^2 &= 1+\sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

Con ello, el largo queda como sigue:

$$\begin{aligned} L = \int_{-b}^{b}\sqrt{1+y'^2}\,dx &= \int_{-b}^{b}\cosh\left(\frac{x}{a}\right)\,dx \qquad \text{(cambio de variable)} \\ &= 2a\int_0^{b/a}\cosh(t)\,dt \\ &= 2a\,\sinh\left(\frac{b}{a}\right) \end{aligned}$$

■

(4) Encuentre la función longitud de arco para la curva

$$y = \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}\,, \qquad -1 \le x \le 1$$

con inicio en el punto $P(0,1)$.

Solución:

La función longitud de arco nos dice el largo de una curva $y = f(x)$ entre un punto inicial $P_i\Big(x_0, f(x_0)\Big)$ y un punto final $P_f\Big(x, f(x)\Big)$. Su expresión viene dada por:

$$s(x) = \int_{x_0}^{x}\sqrt{1+f'(t)^2}\,dt$$

Lo primero que hacemos es calcular la derivada:

$$f'(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

Así,

$$\begin{aligned} 1+f'(t)^2 &= \frac{(1-t)^2}{1-t^2}+1 \\ &= \frac{(1-t)^2+1-t^2}{1-t^2} \\ &= \frac{2-2t}{1-t^2} = \frac{2(1-t)}{(1-t)(1+t)} \\ &= \frac{2}{1+t} \end{aligned}$$

Con ello,

$$\begin{aligned} s(x) &= \int_0^x \sqrt{\frac{2}{1+t}}\, dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \qquad \text{(hacemos un cambio de variable)} \\ &= \sqrt{2}\int_1^{1+x} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ &= 2\sqrt{2}\Big(\sqrt{1+x}-1\Big) \end{aligned}$$

■

(5) El conjunto de puntos que satisfacen la ecuación $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$, con $a>0$, forman una curva plana cerrada que se denomina **astroide**. En este problema, estudiaremos a fondo las propiedades del astroide:

a) Encuentre una parametrización del astroide y analice la simetría de la curva

b) Determine $\dfrac{dy}{dx}$ y $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, y utilice esta información para esbozar la gráfica de la curva

c) Demuestre que la longitud de la porción de cualquier recta tangente al astroide imitada por los ejes de coordenadas es constante

d) Calcule el largo total del astroide, así como el área encerrada por dicha curva

Solución:

a) Dado que en la ecuación están involucrados dos términos al cuadrado sumados, es razonable pensar en funciones trigonométricas. Además, dado que las variables aparecen asociadas a una raíz cúbica, proponemos una potencia cúbica en la parametrización. Así, una posible parametrización de la curva viene dada por

$$x(t)=a\cos^3(t) \qquad \wedge \qquad y(t)=a\sin^3(t)$$

Notar que el punto $(a,0)$ pertenece al astroide, y que

$$(a,0)=\Big(x(t'),y(t')\Big) \quad \longrightarrow \quad t'=0,2\pi,4\pi,6\pi,\ldots$$

Por tanto, la curva se recorre una vez con $0\leq t<2\pi$. Para analizar la simetría de la curva, sea (x_0,y_0) un punto que pertenece a ella. Puesto que la expresión de la curva posee potencias pares, los puntos $(-x_0,y_0)$, $(x_0,-y_0)$ y $(-x_0,-y_0)$ también pertenecen a la curva, i.e. la curva es simétrica respecto a los ejes X e Y. Independiente de la forma de la curva, cuya gráfica esbozaremos posteriormente, basta estudiarla en el primer cuadrante y luego reflejar, puesto que los demás segmentos serán iguales entre sí dada la simetría. Los puntos de intersección con los ejes coordenados son:

$$(a,0):t=0\,,\ (-a,0):t=\pi\,,\ (0,a):t=\pi/2\,,\ (0,-a):t=3\pi/2$$

b) Como

$$\frac{dx}{dt} = -3a\cos^2(t)\sin(t) \qquad \wedge \qquad \frac{dy}{dt} = 3a\sin^2(t)\cos(t)$$

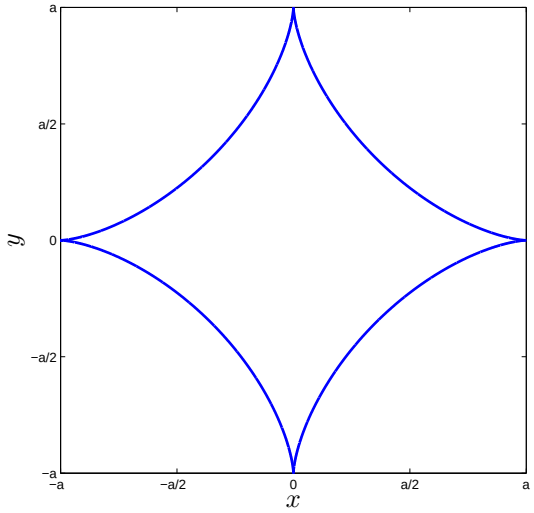
entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\tan(t) \qquad \wedge \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx/dt} = \frac{1}{3a\cos^4(t)\sin(t)}$$

Por la simetría de la curva, estudiaremos el intervalo $(0, \pi/2)$ e inferiremos el comportamiento del resto. En dicho intervalo,

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{0<t<\pi/2} < 0 \qquad \wedge \qquad \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{0<t<\pi/2} > 0$$

y la curva es decreciente y cóncava hacia arriba. Por simetría, en los intervalos $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$ y $(3\pi/2, 2\pi)$ esta debe ser creciente y cóncava hacia arriba, decreciente y cóncava hacia abajo, y creciente y cóncava hacia abajo, respectivamente. Finalmente,



c) Realizaremos nuestra demostración para cualquier recta tangente en el primer cuadrante, resultado que se puede extender gracias a la simetría de la curva. Sea t_0 arbitrario tal que el punto (x_0, y_0) asociado pertenece al primer cuadrante. De acuerdo al apartado anterior, la recta tangente en (x_0, y_0) es:

$$m = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0} = -\tan(t_0)$$

Por tanto, la recta tangente en dicho punto tiene por ecuación

$$y - y_0 = m(x - x_0) \qquad \rightarrow \qquad y = mx + y_0 - mx_0$$

Sean P_x y P_y los puntos de intersección con los ejes X e Y, respectivamente. Entonces,

$$P_x = \left(x_0 - \frac{y_0}{m}, 0\right) \qquad \wedge \qquad P_y = \left(0, y_0 - mx_0\right)$$

Con ello, la longitud del segmento en cuestión viene dada por la distancia entre ambos puntos:

$$\begin{aligned}\ell &= d(P_x, P_y)\\ &= \sqrt{\Big(x_0 - \frac{y_0}{m}\Big)^2 + \Big(y_0 - mx_0\Big)^2}\\ &= \sqrt{\frac{(mx_0 - y_0)^2(1+m^2)}{m^2}}\\ &= \sqrt{a^2\Big(\tan(t_0)\cos^3(t_0) + \sin^3(t_0)\Big)^2 \frac{\sec^2(t_0)}{\tan^2(t_0)}}\\ &= a\end{aligned}$$

y es constante, como se quería demostrar.

d) Necesitamos determinar el largo:

$$L = \int_{t_{inicio}}^{t_{final}} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt$$

donde, en este caso,

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{9a^2\cos^2(t)\sin^2(t)} = 3a|\cos(t)\sin(t)| = \frac{3a}{2}|\sin(2t)|$$

Utilizando la simetría de la curva,

$$L = 4\int_0^{\pi/2} \frac{3a}{2}|\sin(2t)|\ dt = 6a\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\ dt = 6a$$

pues el argumento de la integral es positivo en el intervalo de integración. Para calcular el área encerrada por la curva, recurrimos a la simetría nuevamente:

$$A = 4\int_0^a y\ dx$$

donde $y > 0$ en dicho intervalo. Como $dx = x'(t)\ dt$ y $x(\pi/2) = 0$, $x(0) = a$:

$$A = 4\int_{\pi/2}^0 y(t)x'(t)\ dt = 12a^2\int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos^2(t)\ dt = \frac{3\pi a^2}{8}$$

■

IV.vi. Superficies de revolución

(1) *a*) Calcule el área de la superficie generada al rotar la elipse $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ alrededor del eje X.

b) Hallar el área de la superficie de rotación de un lazo de la curva $32y^2 = 4x^2 - x^4$ en torno al eje X.

Solución:

a) Sabemos que:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \longrightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{4y} \longrightarrow \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{x^2}{16y^2} = \frac{x^2}{4(16 - x^2)}$$

y por tanto,

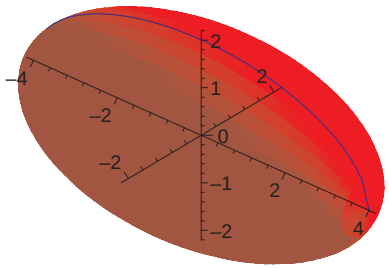
$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{\frac{64 - 3x^2}{4(16 - x^2)}} = \frac{\sqrt{64 - 3x^2}}{2\sqrt{16 - x^2}}$$

$$\therefore\ d\sigma = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{64 - 3x^2}}{2\sqrt{16 - x^2}} = \frac{\sqrt{64 - 3x^2}}{4} dx$$

Así,

$$S = 2\pi \int_{-4}^{4} d\sigma = \frac{\pi}{2} \int_{-4}^{4} \sqrt{64 - 3x^2}\, dx = 8\pi \left(1 + \frac{4\sqrt{3}\pi}{9}\right)$$

Gráficamente,



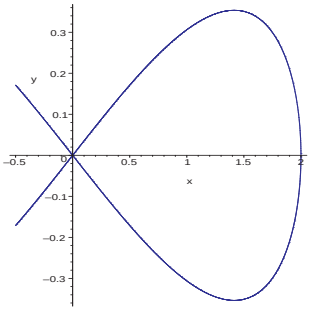
b) Por derivación implícita, tenemos que:

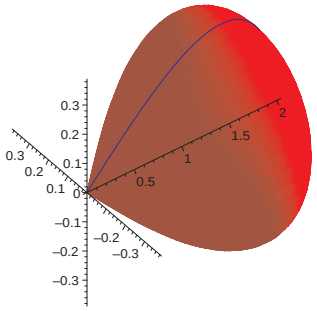
$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - 2x^3}{32y} \qquad \text{y} \qquad 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \frac{(4 - 2x^3)^2}{32(4 - x^2)} = \frac{(12 - 2x^3)^2}{32(4 - x^2)}$$

Así,

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_a^b y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx = 2\pi \int_0^2 \frac{x\sqrt{4 - x^2}}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{12 - 2x^3}{4\sqrt{2}\sqrt{4 - x^2}} dx \\ &= \frac{\pi}{16} \int_0^2 (12 - 2x^3)x\ dx = \pi \end{aligned}$$

La curva y la superficie en cuestión son:





■

(2) *a*) Determine la longitud de una arco de cicloide de ecuaciones paramétricas $x(t) = t - \sin(t)$ e $y(t) = 1 - \cos(t)$.

b) Calcule la superficie de revolución que se obtiene al girar la región acotada por un arco de cicloide $x(t) = t - \sin(t)$, $y(t) = 1 - \cos(t)$, cuando $t \in [0, 2\pi]$, y el eje X en torno a la recta $x = 2\pi$. Utilice el Teorema de Pappus.

Solución:

a) Se describe un arco cuando $0 \leq t \leq 2\pi$. En este caso, el diferencial de largo corresponde a:

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt = \sqrt{\Big(1 - \cos(t)\Big)^2 + \sin^2(t)}dt = \sqrt{2\Big(1 - \cos(t)\Big)}\, dt$$

Por tanto, el largo del arco es:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} ds = \int_0^{2\pi} \sqrt{2\Big(1 - \cos(t)\Big)}\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}dt \\ &= 2\int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = -4\cos\left(\frac{t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = 8 \end{aligned}$$

b) En este caso, el Teorema de Pappus nos dice que $S = 2\pi\widetilde{x}L$, donde $\widetilde{x}$ corresponde a la distancia entre el centroide de la curva y el eje de rotación. Del ejercicio anterior, sabemos que el largo del arco de cicloide corresponde a $L = 8$. Por tanto, solo nos resta hallar el centroide de la misma:

- Notemos que $x(0) = y(0) = 0$, y el origen pertenece a la curva. $x(\pi) = \pi$, $y(\pi) = 2$ el punto más alto. $x(2\pi) = 2\pi$, $y(2\pi) = 0$, punto final del arco.
- Por simetría, sabemos que $\overline{x} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

- Analíticamente,

$$\begin{aligned}
\overline{x} &= \frac{1}{L}\int_a^b x\ ds \\
&= \frac{1}{8}\int_0^{2\pi}\Big(t-\sin(t)\Big)\sqrt{2\Big(1-\cos(t)\Big)}\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\Big(t-\sin(t)\Big)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt \\
&= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} t\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt - \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\sin(t)\sin\left(\frac{t}{2}\right)\ dt \\
&= \pi - 0 = \pi
\end{aligned}$$

Como $\widetilde{x} = 2\pi - \overline{x} = \pi$, el área buscada corresponde a:

$$S = 16\pi^2$$

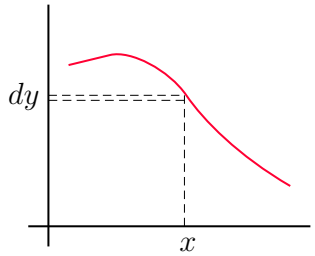
■

(3) Hallar el área de la superficie generada por la rotación, en torno al eje Y, del arco de curva $y = -\ln(x)$ entre $y = 0$ e $y = t > 0$. ¿Qué pasa cuando $t \to \infty$? Ayuda: recuerde la siguiente integral

$$\int \sec^3\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big]$$

Solución:

Consideremos la siguiente situación:



En este caso, dado que la curva está limitada entre $y = 0$ e $y = t$, preferimos integrar en la variable y. Para ello, invertimos la curva:

$$y = -\ln(x) \quad \longleftrightarrow \quad x = e^{-y}$$

Con ello,

$$\begin{aligned}
S &= 2\pi\int_0^t x(y)\sqrt{1+x'(y)^2}\ dy \\
&= 2\pi\int_0^t e^{-y}\sqrt{1+e^{-2y}}\ dy \qquad \text{(Hacemos el cambio } u = e^{-y}\text{)} \\
&= 2\pi\int_1^{e^{-t}} -\sqrt{1+u^2}\ du
\end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\int \sqrt{1+x^2}\; dx = ?$$

Sea $x = \tan\theta$, con lo que $dx = \sec^2\theta\; d\theta$ y $1 + x^2 = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$. Por tanto,

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1+x^2}\; dx &= \int \sec^3\theta\; d\theta \\ &= \frac{1}{2}\Big[\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta + \tan\theta|\Big] \\ &= \frac{1}{2}\Big[x\sqrt{1+x^2} + \ln|x + \sqrt{1+x^2}|\Big]\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}S &= 2\pi\int_{e^{-t}}^{1}\sqrt{1+u^2}\; du \\ &= \pi\Big[u\sqrt{1+u^2} + \ln\left(u + \sqrt{1+u^2}\right)\Big]_{e^{-t}}^{1} \\ &= \pi\Big[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Big] - \pi\, e^{-t}\sqrt{1+e^{-2t}} - \pi\ln\left(e^{-t} + \sqrt{1+e^{-2t}}\right)\end{aligned}$$

En el caso en que t tiende a infinito,

$$S(t\to\infty) = \pi\Big[\sqrt{2} + \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\Big]$$

■

(4) *a*) Encuentre el área de la superficie obtenida al rotar el segmento de la curva $x = a\cos^3(t)$, $y = a\sin^3(t)$ $(a > 0)$ definido por $0 \le t \le \pi/2$ en torno al eje X

b) Encuentre una fórmula para determinar el área de la superficie de revolución de la curva $C:\ y = f(x)$ con $a \le x \le b$ al ser rotada en torno a la recta $y = mx + n$. Utilice su resultado para determinar el área de la superficie de revolución de la curva $y = x^2$, $0 \le x \le 1$ al ser rotada en torno a la recta $y = x$.
Ayuda:

$$\int u^2\sqrt{1+4u^2}\; du = \frac{1}{64}\Big(2u(8u^2+1)\sqrt{1+4u^2} - \operatorname{arcsinh}(2u)\Big) + C$$

Solución:

a) En este caso, el área de la superficie de revolución corresponde a:

$$S = 2\pi\int_{t_1}^{t_2} y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\; dt$$

Como vimos previamente (o mediante cálculo directo),

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \frac{3a}{2}|\sin(2t)|$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} S &= 3\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3(t)|\sin(2t)|\ dt \\ &= 3\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3(t)\sin(2t)\ dt \\ &= 6\pi a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4(t)\cos(t)\ dt \\ &= \frac{6\pi a^2}{5} \end{aligned}$$

b) En términos generales, el área de una superficie de revolución de una curva como la descrita en el enunciado viene dada por:

$$S = 2\pi \int_a^b d(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

donde $d(x)$ corresponde a la distancia entre el punto $\Big(x, f(x)\Big)$ y el eje de giro, que en este caso corresponde a la recta. Sabemos que la distancia entre un punto $P(p_x, p_y)$ y una recta $r:\ ax+by+c=0$ se obtiene mediante la siguiente fórmula:

$$d(P,r) = \frac{|ap_x + bp_y + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Aplicando la fórmula anterior, al punto $\Big(x, f(x)\Big)$ y a la recta $mx - y + n = 0$ tenemos:

$$d(x) = \frac{|mx - f(x) + n|}{\sqrt{1+m^2}}$$

Finalmente,

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{1+m^2}} \int_a^b |mx - f(x) + n|\sqrt{1+f'(x)^2}\ dx$$

Para el caso de la curva en cuestión,

$$f'(x) = 2x \quad \longrightarrow \quad 1 + f'(x)^2 = 1 + 4x^2$$

Así,

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{1+(1)^2}} \int_0^1 |x - x^2|\sqrt{1+4x^2}\ dx$$

Notemos que, para $x \in [0,1]$, $x \geq x^2$ y por tanto $|x - x^2| = x^2 - x$. Reemplazando,

$$S = \frac{2\pi}{\sqrt{2}} \int_0^1 (x-x^2)\sqrt{1+4x^2}\ dx = \sqrt{2}\pi \left(\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\ dx + \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\ dx \right)$$

Para la primera integral, proponemos el cambio de variable $u = 1 + 4x^2$. Entonces,

$$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\ dx = \frac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{u}\ du = \frac{1}{12}\Big(5^{3/2} - 1\Big)$$

En el caso de la segunda integral, utilizamos la ayuda del enunciado:

$$\int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx = \frac{1}{64}\Big(18\sqrt{5} - \operatorname{arcsinh}(2)\Big)$$

Finalmente,

$$S = \sqrt{2}\pi\left(\frac{13\sqrt{5}}{96} - \frac{1}{12} + \frac{1}{64}\operatorname{arcsinh}(2)\right)$$

■

IV.vii. Coordenadas polares

(1) Escriba las siguientes curvas en coordenadas polares:

a) Recta $Ax + By + C = 0$

b) Circunferencia $(x-h)^2 + (y-k)^2 = R^2$

c) Elipse $4x^2 + y^2 = 4$

d) Lemniscata $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$

Solución:

a) Separemos en casos:
Si la recta pasa por el origen, es claro que su ecuación es

$$\theta = \theta_0, \quad \text{con } \theta_0 \text{ el ángulo de la recta con la horizontal.}$$

Si la recta es vertical, i.e. $B = 0$, hacemos la sustitución $x = r\cos\theta$. Así,

$$Ax + C = 0 \longleftrightarrow x = -\frac{C}{A} \longleftrightarrow r\cos\theta = -\frac{C}{A} \longleftrightarrow r = \frac{k}{\cos\theta}$$

Los demás casos nos permiten reescribir la ecuación de la forma $y = mx + n$. Recordando que $y = r\sin\theta,\ x = r\cos\theta$ obtenemos:

$$r\sin\theta = mr\cos\theta + n \quad \longleftrightarrow \quad r = \frac{n}{\sin\theta - m\cos\theta}$$

b) El centro de la circunferencia (h,k) puede escribirse en coordenadas polares de la siguiente forma:

$$h = r_0\cos\varphi \quad , \quad k = r_0\sin\varphi \qquad \text{con } r_0 = \sqrt{h^2+k^2},\ \tan\varphi = \frac{k}{h}$$

Desarrollando la expresión tenemos

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2 &= R^2\\ x^2-2hx+h^2+y^2-2ky+k^2 &= R^2\\ r^2-2(hx+yk)+h^2+k^2 &= R^2\\ r^2-2rr_0(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)+r_0^2 &= R^2\end{aligned}$$

Finalmente,

$$r^2-2rr_0\cos(\theta-\varphi)+r_0^2=R^2$$

c) Notemos que

$$4x^2+y^4=4 \longrightarrow 3x^2+x^2+y^2=4 \longrightarrow 3r^2\cos^2\theta+r^2=4 \longrightarrow r^2(1+3\cos^2\theta)=4$$

Así,

$$r=\frac{2}{(1+3\cos^2\theta)^{1/2}}$$

d) El cambio a coordenadas polares nos permite asegurar que $x^2+y^2=r^2$ y que

$$x^2-y^2=(x+y)(x-y)=r^2(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)=r^2\cos 2\theta$$

Por lo tanto,

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2) \quad\longleftrightarrow\quad r^2=a^2\cos 2\theta$$

■

(2) Considere la curva dada en coordenadas polares por $r=e^{-\theta}$.

a) Esboce el gráfico para $\theta\geq 0$.

b) Calcule el largo de la curva para $\Theta\geq\theta\geq 0$. ¿Qué puede decir acerca de largo total de la curva? (HINT: evalúe el largo cuando $\Theta\to\infty$).

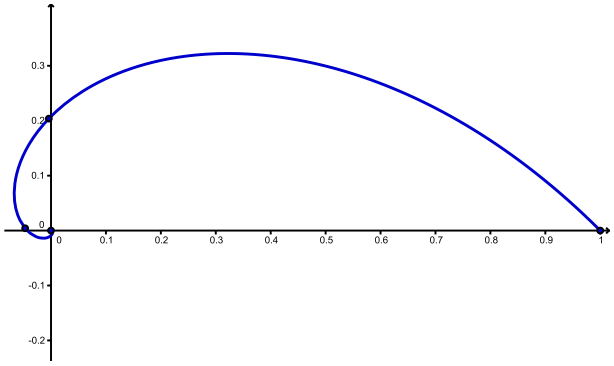
c) Sea A_n el área barrida por el radio polar para $2n\pi\leq\theta\leq 2(n+1)\pi$, $n\in\mathbb{N}$. Pruebe que $\{A_n\}$ es una progresión geométrica.

Solución:

a) Notemos que la función $r=e^{-\theta}$ es decreciente. Por tanto, a mayor ángulo θ, el radio se hace cada vez más pequeño y cercano al origen. Evaluemos algunos puntos:

θ	$r(\theta)$
0	1
$\pi/2$	$e^{-\pi/2}\approx 0.21$
π	$e^{-\pi}\approx 0.04$
$3\pi/2$	$e^{-3\pi/2}\approx 0.01$
2π	$e^{-2\pi}\approx 0.002$
$\theta\to\infty$	0

Entonces,



b) Recordemos la fórmula de longitud de arco en coordenadas polares:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

En este caso,

$$L_{\Theta} = \int_0^{\Theta} \sqrt{e^{-2\theta} + e^{-2\theta}}\, d\theta = \sqrt{2} \int_0^{\Theta} e^{-\theta} d\theta = \sqrt{2}\left(1 - e^{-\Theta}\right)$$

Con ello, el largo total corresponde a:

$$L = \lim_{\Theta \to \infty} \left\{ \sqrt{2}\left(1 - e^{-\Theta}\right) \right\} = \sqrt{2}$$

y es finito.

c) Recordemos la fórmula de área en coordenadas polares:

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 \, d\theta$$

En este caso,

$$A_n = \frac{1}{2} \int_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{-2\theta} d\theta = \frac{1}{4}\left[e^{4\pi} - 1\right] e^{-4\pi(n+1)} = \frac{1}{4}\left[1 - e^{-4\pi}\right] e^{-4\pi n}$$

Se deduce que

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = e^{-4\pi}$$

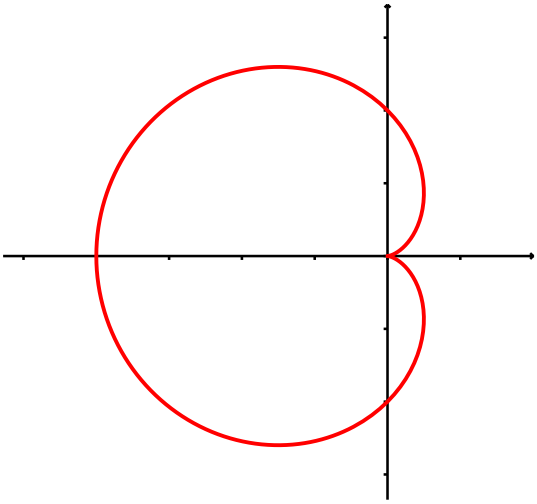
■

(3) *a*) Determine la longitud y el centro geométrico de la cardioide $r = a - a\cos(\theta)$.

b) Halle el área de la superficie generada al rotar la lemniscata $r^2 = a^2\cos(2\theta)$ en torno al eje polar (eje X). Repita el cálculo para la rotación en torno al eje transverso (eje Y).

Solución:

a) Una cardioide posee la siguiente forma:



En coordenadas polares, para hallar la longitud de una curva cerrada, debemos determinar los ángulos de modo tal que $r(\alpha) = r(\beta)$, y cuidando que el integrando sea positivo en dicho intervalo. En este caso, $r(0) = a - a = 0 = r(2\pi)$. Por tanto,

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2\Big(1 - \cos(\theta)\Big)^2 + a^2\sin^2(\theta) = 4a^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Como el integrando asociado corresponde a $\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$, que es mayor o igual a cero[6] en $[0, 2\pi)$, utilizaremos dichos límites de integración. Por tanto,

$$L = \int_0^{2\pi} 2a\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta = 8a$$

Para determinar el centro geométrico, utilizaremos la simetría de la curva. Dado que $r(\theta) = r(-\theta)$, es claro que la curva posee simetría en torno al eje X. Por tanto, $\overline{y} = 0$. Para la coordenada $\overline{x}$, tenemos que:

$$\overline{x}\cdot L = \int_\alpha^\beta r(\theta)\cos(\theta)\, ds$$

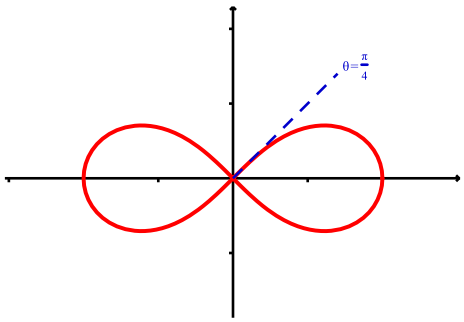
$$\begin{aligned}
\overline{x}\cdot 8a &= 2a^2\int_0^{2\pi}[1-\cos(\theta)]\cos(\theta)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\, d\theta \\
&= 4a^2\int_0^{\pi}[1-\cos(2t)]\cos(2t)\sin(t)\, dt \\
&= 4a^2\int_0^{\pi}\left[6\cos^2(t) - 2 - 4\cos^4(t)\right]\sin(t)\, dt \\
&= 4a^2\int_{-1}^{1}\left[6u^2 - 2 - 4u^4\right]\, du = -\frac{32a^2}{5}
\end{aligned}$$

Por tanto, el centro geométrico es $\left(-\frac{4a}{5}, 0\right)$.

[6]Note la importancia de los intervalos de integración para no llevar a equívocos.

b) El área pedida corresponde al doble de la generada en la rotación del arco en el primer cuadrante.

Si $r = 0$, entonces $\cos(2\theta) = 0$ y con ello, uno de los lazos de la lemniscata está comprendido en el intervalo $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$



$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2\cos(2\theta) + \left(-\frac{a^2\sin(2\theta)}{r}\right)^2 = \frac{a^4}{r^2}$$

Recordando las fórmulas de superficies de revolución,

$$S_x = 2\pi\int_\alpha^\beta r\sin(\theta)ds$$

tenemos que:

$$S_x = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} r\sin(\theta)\frac{a^2}{r}d\theta = 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\sin(\theta)d\theta = 2\pi a^2(2-\sqrt{2})$$

Para el caso de la segunda rotación, donde el área corresponde a

$$S_y = 2\pi\int_\alpha^\beta r\cos(\theta)ds$$

se cumple el área pedida corresponde al doble de la generada en la rotación del arco en el primer cuadrante.:

$$S_y = 2\cdot 2\pi\int_0^{\pi/4} r\cos(\theta)\frac{a^2}{r}d\theta = 4\pi a^2\int_0^{\pi/4}\cos(\theta)d\theta = 2\sqrt{2}\pi a^2$$

■

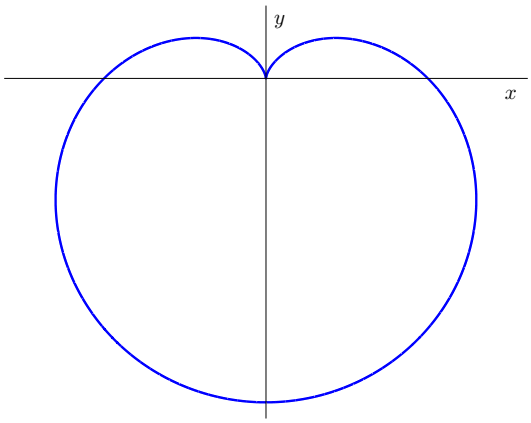
(4) Determine la longitud de las siguientes curvas en coordenadas polares:

a) $r = a\Big(1-\sin(\theta)\Big)$

b) $r^2 = a^2\cos(2\theta)$

Solución:

a) Esta curva corresponde a una cardiode, cuya gráfica se muestra a continuación:



Notemos que la cardiode se obtiene a partir del mapeo $r = r(\theta)$ con $\theta \in [0, 2\pi)$. Ahora bien,

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2\Big(1 - \sin(\theta)\Big)^2 + a^2\cos^2(\theta) = 2a^2\Big(1 - \sin(\theta)\Big)$$

Pero, antes de proseguir, notamos la siguiente identidad trigonométrica:

$$\begin{aligned} 1 - \sin(x) &= 1 - 2\sin(x/2)\cos(x/2) \\ &= \cos^2(x/2) - 2\sin(x/2)\cos(x/2) + \sin^2(x/2) \\ &= \Big[\cos(x/2) - \sin(x/2)\Big]^2 \end{aligned}$$

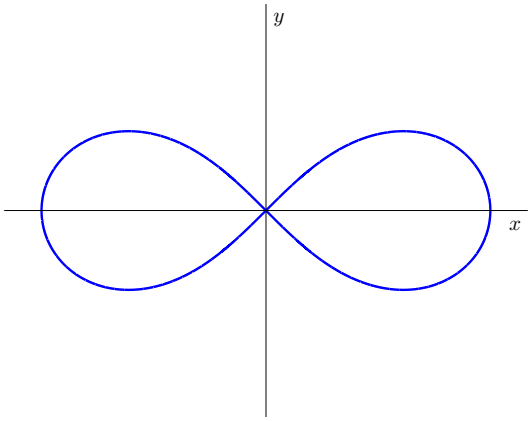
Con ello,

$$L = \sqrt{2}a\int_{\alpha}^{\beta}\left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\, d\theta$$

Ahora, como la curva es simétrica respecto al eje Y, podemos utilizar el intervalo de integración $[-\pi/2, \pi/2]$ (donde el integrando es positivo), y luego multiplicar por dos:

$$L = 2\sqrt{2}a\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right]\, d\theta = 2\sqrt{2}a\cdot 2\sqrt{2} = 8a$$

b) En este caso, la curva corresponde a una lemniscata con la siguiente gráfica:



Dicha curva se obtiene a partir del mapeo $r = r(\theta)$ con $\theta \in [0, \pi]$. Es claro que:

$$\begin{aligned} r^2 &= a^2 \cos(2\theta) \\ 2r\frac{dr}{d\theta} &= -2a^2 \sin(2\theta) \\ \frac{dr}{d\theta} &= -\frac{a^2 \sin(2\theta)}{a\sqrt{\cos(2\theta)}} \\ \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 &= \frac{a^2 \sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)} \end{aligned}$$

Así,

$$r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = a^2 \cos(2\theta) + \frac{a^2 \sin^2(2\theta)}{\cos(2\theta)} = \frac{a^2}{\cos(2\theta)}$$

Como la curva es simétrica respecto a los ejes X e Y, podemos utilizar el intervalo de integración $[0, \pi/4]$ (donde el integrando es positivo), y luego multiplicar por cuatro:

$$L = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos(2\theta)}} = 4a \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - 2\sin^2(\theta)}}$$

y esa integral no tiene primitiva en término de funciones elementales. Pese a ello, esta integral está asociada a una función especial denominada **Integral elíptica incompleta de primer tipo**, definida como:

$$F(k, \phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}}$$

con $0 < k < 1$ y $0 \leq \phi \leq \pi/2$. Finalmente, podemos afirmar que:

$$L = 4a\, F\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

■

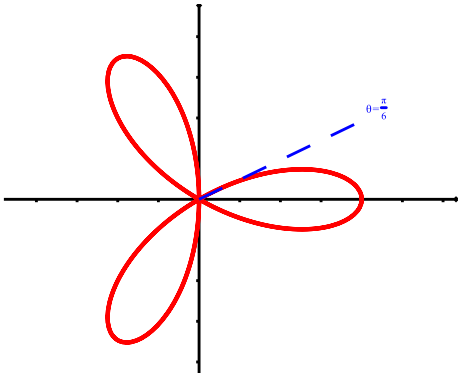
(5) *a*) Determine el área limitada por los tres lazos de la curva $r = a\cos(3\theta)$.

b) Hallar el área interior a la cardioide $r = 1 + \cos(\theta)$ y exterior al círculo $r = 1$.

c) Hallar el área común entre la cardioide $r = 1 + \cos(\theta)$ y el círculo $r = 3\cos(\theta)$.

Solución:

a) Por comodidad, realizaremos los cálculos en el primer cuadrante. Si $r = 0$, entonces $\cos(3\theta) = 0$ y con ello un bucle de la curva está contenido en el intervalo $[-\pi/6, \pi/6]$. Así, dichos extremos serán los límites de integración.



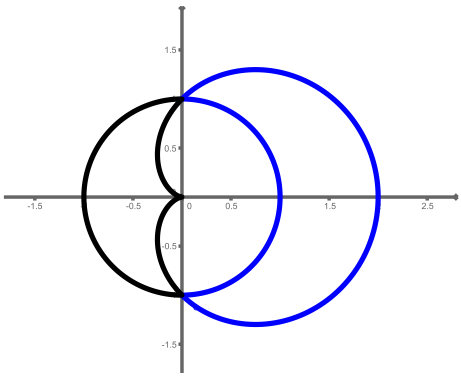
Por tanto,

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6} a^2\cos^2(3\theta)d\theta = 3a^2\int_{0}^{\pi/6}\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(6\theta)d\theta = \frac{\pi a^2}{4}$$

b) Lo primero que hacemos es calcular los puntos de intersección entre ambas curvas. Si $r = 1$ (círculo), entonces:

$$1 = 1+\cos(\theta) \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{2}$$

Dada la simetría de ambas curvas, el área buscada A corresponde al doble del área no común comprendida entre 0 y $\pi/2$, A_n. Esquemáticamente,

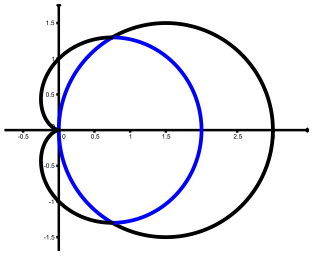


Por tanto, A_n corresponde al área interior a la cardioide menos el área interior del círculo:

$$\begin{aligned} A &= 2\cdot A_n = 2\cdot\left(\frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}[1+\cos(\theta)]^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d\theta\right) \\ &= \int_0^{\pi/2}[2\cos(\theta)+\cos^2(\theta)]d\theta = 2+\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

c) Igual que en el apartado anterior, calculamos los puntos de intersección entre ambas curvas:

$$3\cos(\theta) = 1+\cos(\theta) \Longrightarrow \cos(\theta) = \frac{1}{2} \Longrightarrow \theta = \pm\frac{\pi}{3}$$



Entonces, el área buscada se ubica entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Por simetría, calcularemos el área entre 0 y $\pi/2$ y luego duplicamos. Esta sección barrida por el radio vector de la siguiente forma: entre 0 y $\pi/3$, está limitada superiormente por la cardioide; y entre $\pi/3$ y $\pi/2$, por el círculo. Así,

$$A = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} [1 + \cos(\theta)]^2 d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/3}^{\pi/2} 9\cos^2(\theta) d\theta \right) = \frac{5\pi}{4}$$

■

(6) Determine el centroide de la región limitada por el lazo en el primer cuadrante de la curva $r = \sin(2\theta)$ y calcule el volumen de revolución generado al rotar dicho lazo en torno al eje polar y al eje transverso. Verifique con el Teorema de Pappus.

Solución:

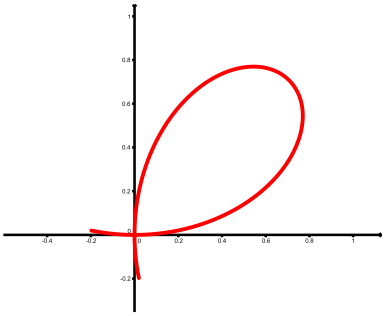
La curva cumple con las siguientes propiedades: $r(0) = r(\pi/2) = 0$ y es simétrica en torno a $\theta = \pi/4$. Así,

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^2(2\theta) d\theta = \frac{1}{4} \left[\theta - \frac{\sin(4\theta)}{4} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{8}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \overline{x} \cdot \frac{\pi}{8} &= \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} r^3 \cos(\theta) d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3(2\theta) \cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta) \cos^4(\theta) d\theta \\ &= \frac{8}{3} \int_0^{\pi/2} [1 - \cos^2(\theta)] \cos^4(\theta) \sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{16}{105} \end{aligned}$$

Por simetría, el centroide es $\left(\frac{128}{105\pi} , \frac{128}{105\pi} \right)$.



Los volúmenes requeridos pueden calcularse utilizando las siguientes fórmulas:

$$V_x = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} r^3 \sin(\theta) ds$$

$$V_y = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} r^3 \cos(\theta) ds$$

Así,

$$\begin{aligned} V_x &= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} r^3 \sin(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3(2\theta)\sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^4(\theta)\cos^3(\theta) d\theta \\ &= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/2} [1-\sin^2(\theta)]\sin^4(\theta)\cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{32\pi}{105} \end{aligned}$$

El Teorema de Pappus nos dice que $V_x = 2\pi\overline{y}A$. Como

$$2\pi \cdot \frac{128}{105\pi} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{32}{105\pi}$$

se verifica el cálculo obtenido. Por otra parte,

$$\begin{aligned} V_y &= \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} r^3 \cos(\theta) d\theta = \frac{2\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3(2\theta)\cos(\theta) d\theta \\ &= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta)\cos^4(\theta) d\theta \\ &= \frac{16\pi}{3}\int_0^{\pi/2} [1-\cos^2(\theta)]\cos^4(\theta)\sin(\theta) d\theta \\ &= \frac{32\pi}{105} \end{aligned}$$

El Teorema de Pappus nos dice que $V_y = 2\pi\overline{x}A$. Como

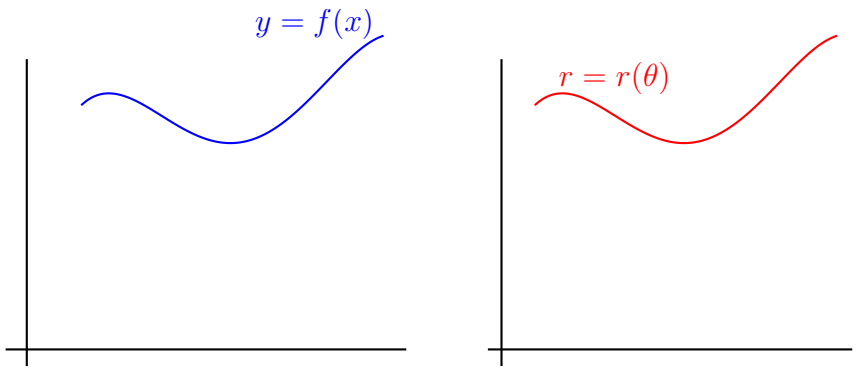
$$2\pi \cdot \frac{128}{105\pi} \cdot \frac{\pi}{8} = \frac{32}{105\pi}$$

igualmente se cumple. ■

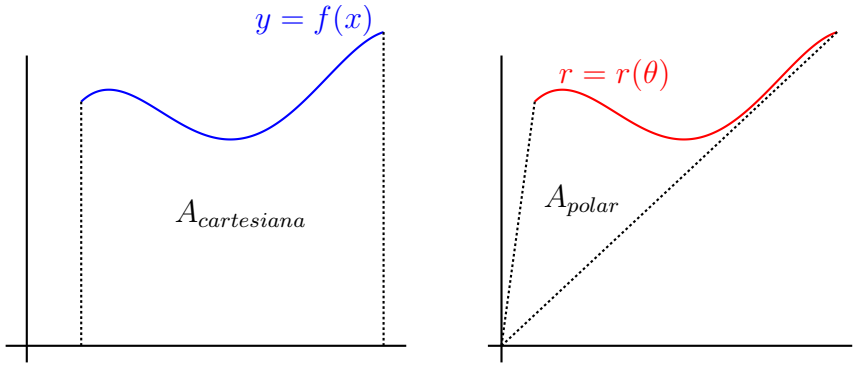
Apéndice a la sección

- *Sobre las diferencias entre áreas*:

  Consideremos las siguientes curvas, donde la primera de ellas está escrita en coordenadas cartesianas, mientras que la segunda lo está en coordenadas polares:



Si calculamos el área entre los extremos de la curva, tanto en cartesianas como en polares, éstas corresponden a:



Se concluye entonces que, aun cuando un par de curvas posean igual traza (dibujo), las áreas calculadas con las fórmulas estudiadas en clase son claramente disímiles. No confundir una con otra.

- *¿Cómo transformar* $\left\{\sin^3(2\theta)\cos(\theta) \;\rightarrow\; 8\sin^3(\theta)\cos^4(\theta)\right\}$*?*

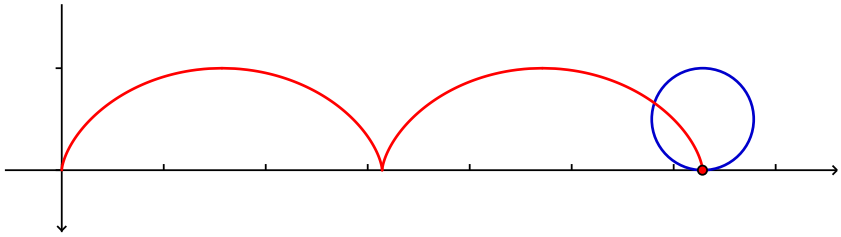
Recordemos que $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$. Por tanto, $\sin^3(2\theta) = 8\sin^3(\theta)\cos^3(\theta)$. Así,

$$\sin^3(2\theta)\cos(\theta) = 8\sin^3(\theta)\cos^3(\theta)\cos(\theta) = 8\sin^3(\theta)\cos^4(\theta)$$

- *Sobre la cicloide*

Una cicloide es una curva generada por un punto perteneciente a una circunferencia generatriz al rodar sobre una línea recta directriz, sin deslizarse.

Dicha curva sido considerada durante mucho tiempo una curva muy especial, tanto por sus fascinantes propiedades como por las disputas científicas que promovió principalmente a lo largo del siglo XVII. Tal es así que es conocida en la literatura como la *Helena de la Geometría*. Galileo, en el año 1599, estudió la curva y fue el primero en darle su nombre actual. Entre las demostraciones



acerca de sus propiedades destaca la de René Descartes, quien obtuvo la fórmula de la recta tangente en un punto cualquiera del arco de la cicloide, empleando técnicas que luego se desarrollaría bajo el nombre de geometría diferencial.

En junio de 1696, Johann Bernoulli propone el llamado *Problema de la braquistocrona*, dando como pista la curva solución es bien conocida entre los matemáticos:

Dados dos puntos A y B en un plano vertical, hallar el camino AMB por el que una partícula móvil M, descendiendo por su propio peso, iría de A a B en el menor tiempo posible.



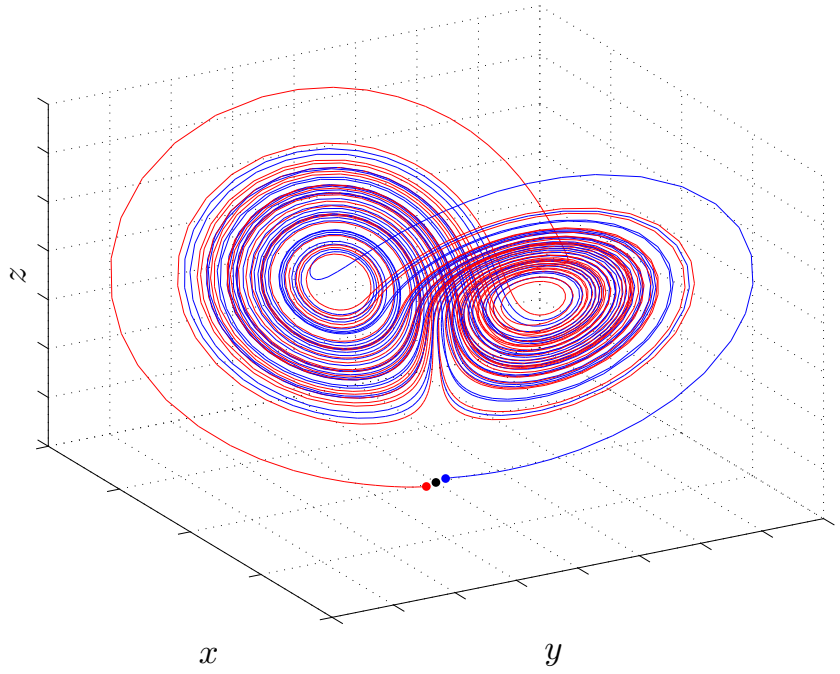
La novedad del problema en sí era notoria: no se trataba de encontrar extremos relativos de una curva, sino que la misma incógnita buscada es una curva que debe minimizar cierta cantidad. Se daban los primeros pasos en el desarrollo del Cálculo de Variaciones, disciplina matemática desarrollada con los aportes fundamentales de Euler y Lagrange y dedicada a la búsqueda de extremos relativos de funcionales definidos sobre algún espacio de funciones.

Leibniz, Newton, ambos hermanos Bernoulli y L'Hôpital encontraron la solución del problema enunciado, siendo el aporte de Newton el más anecdótico dado que fue hecho de forma anónima. Johann Bernoulli, impresionado por la elegancia de las soluciones propuestas en el artículo anónimo, no tuvo dificultad en identificar al autor y lo expresó con la histórica frase: *se reconoce al león por sus garras.*

3

Procesos infinitos

Atractor de Lorenz (Edward Lorenz, 1963)



Sección I

Integrales impropias

I.i. Integrales impropias de primer y segundo tipo

(1) Considere la función *Gamma de Euler*, definida de la siguiente forma para $x > 0$:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\ dt$$

a) Pruebe que dicha función converge absolutamente para todo $x > 0$.

b) Demuestre que $\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x)$ y estudie la relación de dicha propiedad con los factoriales.

Solución:

a) Dado que el integrando cumple que $|f(t)| = f(t)$, ya que corresponde a una función únicamente de términos reales positivos, bastará probar la convergencia de f para asegurar convergencia absoluta.

Separemos por casos: Para $x = 1$, la integral converge trivialmente. Para $x > 1$, se satisface que $x - 1 > 0$ y

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}e^{-t}}{e^{-t/2}} = \lim_{t\to\infty} \frac{t^{x-1}}{e^{t/2}} = 0$$

y como $\displaystyle\int_0^\infty e^{-t/2}dt$ converge, la función Γ también lo hace.

Para $0 < x < 1$, $0 < 1 - x < 1$. Nuestra integral queda entonces como

$$\int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt + \int_1^\infty \frac{e^{-t}}{t^{1-x}}dt$$

donde la segunda integral converge al compararse con $g(t) = e^{-t/2}$. Notemos que para $f(t) = t^{x-1}e^{-t}$,

$$\lim_{t\to 0} t^{1-x} f(t) = 0$$

y por tanto, como el límite es finito y $p = 1 - x$ satisface que $0 < p < 1$, la primera integral converge.

Con ello, la función Gamma converge para todo $x > 0$ y posee una gráfica como sigue:

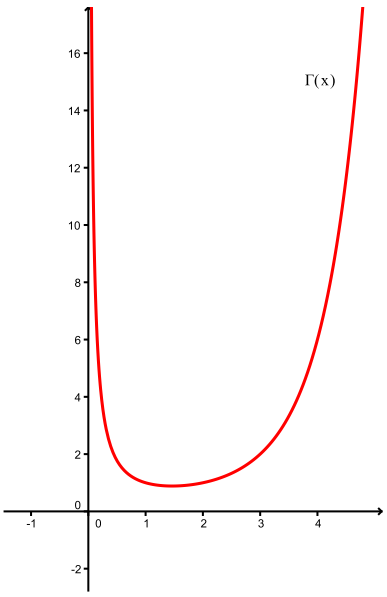


Figura 3.1: *Gráfico de la función Gamma de Euler de variable real.*

Más precisamente, esta función puede extenderse como una función de variable compleja con la siguiente forma:

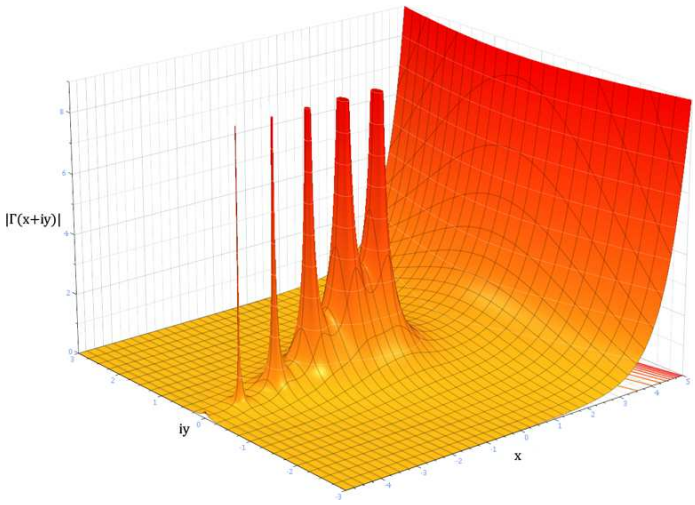


Figura 3.2: *Valor absoluto de la función Gamma en el plano complejo.*

b) Notemos que:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{(x+1)-1} e^{-t}\, dt = \int_0^\infty t^x e^{-t}\, dt$$

integrando por partes, haciendo $u = t^x \ \rightarrow \ du = xt^{x-1}\ dt$ y $dv = e^{-t}\ dt \ \rightarrow \ v = -e^{-t}$, tenemos:

$$-\frac{t^x}{e^t}\bigg|_0^\infty = \Gamma(x+1) - x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\ dt$$

y como

$$-\frac{t^x}{e^t}\bigg|_0^\infty = -\lim_{t\to\infty}\frac{t^x}{e^t} - 0 = 0$$

es claro que:

$$0 = \Gamma(x+1) - x\Gamma(x) \Longrightarrow \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

Ahora, calculemos $\Gamma(n),\ n \in \mathbb{N}$:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty t^{1-1}e^{-t}\ dt = \int_0^\infty e^{-t}\ dt = 1$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(2) &= \Gamma(1+1) = 1\Gamma(1) = 1 = 1! \\
\Gamma(3) &= \Gamma(2+1) = 2\Gamma(2) = 2\cdot 1 = 2 = 2! \\
\Gamma(4) &= \Gamma(3+1) = 3\Gamma(3) = 3\cdot 2 = 6 = 3! \\
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n\cdot(n-1)! = n!
\end{aligned}$$

es decir, la función Gamma es una generalización del concepto de factorial para valores reales.

■

(2) Establezca criterios sobre r tales que las siguientes integrales converjan:

a) $\displaystyle\int_1^\infty \left[1 - \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]^r\ dx$

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{dx}{x[\ln(x)]^r}$

c) $\displaystyle\int_a^b \frac{a}{(b-x)^r}\ dx \qquad , a < b$

Solución:

a) Tenemos que

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-\cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{2x^2}}\right) = 1$$

luego, la integral pedida converge si y solo si

$$\int_1^\infty \left[\frac{1}{2x^2}\right]^r\ dx$$

converge. Esta última converge para $2r > 1 \ \rightarrow \ r > \frac{1}{2}$. Por tanto, la integral original converge para $r > \frac{1}{2}$.

b) Hagamos el siguiente cambio de variables: $u = \ln(x) \;\rightarrow\; du = \frac{dx}{x}$. Así,

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x[\ln(x)]^r} = \int_{\ln(2)}^{\infty} \frac{du}{u^r}$$

y por el criterio$-p$, la integral converge si y solo si $r > 1$.

c) Si $r = 1$ tenemos,

$$\int_a^b \frac{a}{(b-x)}\, dx = \int_b^a \frac{a}{(x-b)}\, dx = \lim_{\varepsilon \to b^-} \ln(x-b)\Big|_a^{\varepsilon} = +\infty$$

Por otra parte, para $r \neq 1$ una primitiva del integrando corresponde a $a\frac{(b-x)^{1-r}}{r-1}$, de esta forma se tiene lo siguiente:

$$\int_a^b \frac{a}{(b-x)^r}\, dx = \lim_{\varepsilon \to b^-} a\frac{(b-x)^{1-r}}{r-1}\Big|_a^{\varepsilon} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1-r > 0 \to r < 1 \\ +\infty & \text{si } 1-r < 0 \to r > 1 \end{cases}$$

Por tanto, la integral converge si y solo si $r < 1$.

■

(3) Determine si las siguientes integrales impropias son convergentes o no. Justifique su respuesta.

a) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}{\ln(x)}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}$

c) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{e^x - \cos x}$

d) $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln(x)}{x\sqrt{2x+3}}\, dx$

Solución:

a) Notemos que:

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}{\ln(x)}\, dx = \int_2^{\infty} \frac{dx}{(\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1})\ln(x)}$$

Además, $\sqrt{x^2+2} + \sqrt{x^2+1} \leq 2x+1$. Así,

$$\int_2^{\infty} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+1}}{\ln(x)}\, dx \geq \int_2^{\infty} \frac{dx}{(2x+1)\ln(x)}$$

y por tanto diverge.

b) Para resolver esta integral, utilizaremos el desarrollo de Taylor de $\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)$ en torno a $x_0 = 1$:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + -\frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\Big|_{x=1}(x-1) + \cdots = \frac{\pi}{2}(1-x) + O((x-1)^3)$$

por lo cual el límite

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}}{\sqrt{\pi/2(1-x)}} = 1$$

Así, por el criterio de comparación, como

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\pi/2(1-x)}} < \infty$$

concluimos que la integral pedida es convergente.

c) Buscamos un valor de p para el cual

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{e^x-\cos x}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^p}{e^x-\cos x} = L, \quad L \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Usando la Regla de L'Hôpital, vemos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^p}{e^x-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{p\ x^{p-1}}{e^x+\sin x}$$

y este último límite es 1 si $p = 1$. Por tanto, por el criterio de comparación al límite, la integral en cuestión tiene el mismo comportamiento que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ y por tanto diverge.

d) El punto $x = -3/2$ se encuentra fuera del intervalo de integración. Luego, la integral es impropia de primer tipo. Notemos que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \text{ para cualquier } \alpha > 0$$

Por ejemplo, digamos $\alpha = 1/4$. Se deduce entonces que $\left|\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}\right|$ es acotada en $[1,\infty)$. Así,

$$0 \le \left|\frac{\ln(x)}{x^{1/4}}\right| \le K, \qquad x \ge 1$$

De esta manera se tiene que para todo $x \ge 1$,

$$0 \le \frac{\ln(x)}{x\sqrt{2x+3}} = \frac{\ln(x)}{x^{1/4}}\cdot\frac{1}{x^{3/4}\sqrt{2x+3}} \le \frac{K}{x^{5/4}}$$

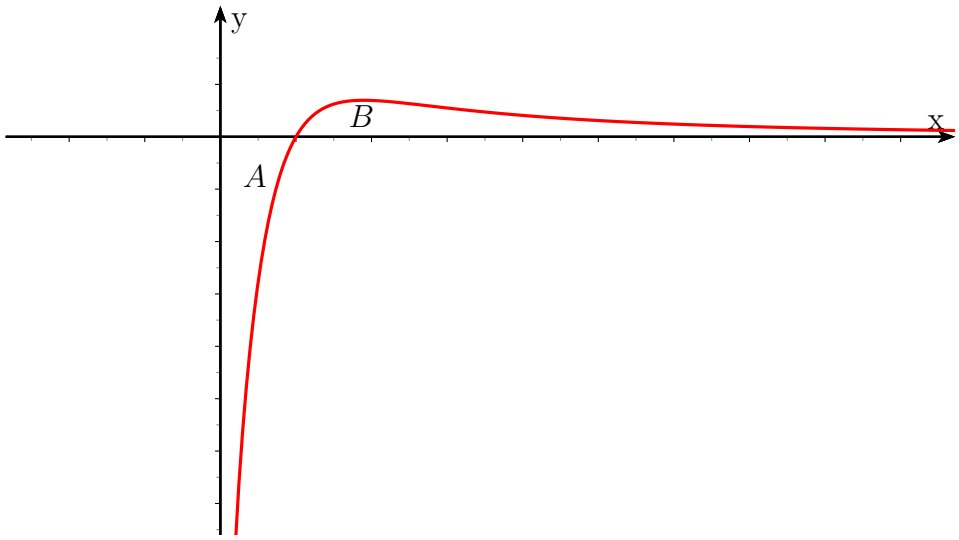
La integral impropia, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^{5/4}}$ es convergente porque es del tipo p-potencia, con $p > 1$.
Por el Teorema de Comparación se obtiene que la integral impropia analizada es convergente.

■

(4) Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{1+x^2}$$

Probar que las áreas A y B son finitas e iguales.



Solución:

La función f se anula en $x = 1$, entonces

$$A = \left| \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \right|, \qquad B = \left| \int_1^\infty \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx \right|$$

Haciendo el cambio de variables $x = \frac{1}{u}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx \right| = \left| \int_\infty^1 \frac{\ln(1/u)}{1+(1/u)^2} \left(-\frac{1}{u^2}\right)\, du \right| \\ &= \left| -\int_1^\infty \frac{\ln(u)}{1+u^2}\, du \right| \\ &= B \end{aligned}$$

Ahora, para probar que estas áreas son finitas, basta probar que una de ellas lo es. Observemos que:

$$\begin{aligned} A &= \left| \int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx \right| = -\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2}\, dx \\ &\leq \int_0^1 \ln(x)\, dx = -(x\ln(x) - x)\Big|_0^1 = 1 < \infty \end{aligned}$$

Que son los elementos que se buscaban probar. ■

(5) Estudie la convergencia de las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2}$

Solución:

a) Notemos que

$$\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}} + \int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x(1+x^2)}}$$

Para $x \in (0,1)$ tenemos que

$$1 \leq 1+x^2 \;\rightarrow\; 1 \leq \sqrt{1+x^2} \;\rightarrow\; \sqrt{x} \leq \sqrt{x(1+x^2)} \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Como $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ converge, por comparación nuestra integral también converge. Ahora, para $x \in (1,\infty)$ se cumple que

$$x^2 \leq 1+x^2 \;\rightarrow\; x \leq \sqrt{1+x^2} \;\rightarrow\; x^{3/2} \leq \sqrt{x(1+x^2)} \;\rightarrow\; \frac{1}{\sqrt{x(1+x^2)}} \leq \frac{1}{x^{3/2}}$$

Sabemos que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ converge, por lo que la segunda parte de la integral inicial converge. Así, la integral en su conjunto converge.

b) Haciendo el cambio de variables $x = \frac{1}{y}$ implica que $dx = -\frac{dy}{y^2}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\,dx &= \int_\infty^1 \frac{\ln(1/y)}{1-1/y}\left(-\frac{dy}{y^2}\right) \\ &= -\int_1^\infty \frac{\ln y}{y(y-1)}\,dy\end{aligned}$$

Para $y \in [a,\infty)$ con $a > 1$ tenemos que

$$\frac{\ln y}{y(y-1)} \leq \frac{\sqrt{y}}{y(y-1)} = \frac{1}{\sqrt{y}(y-1)} \leq \frac{1}{(y-1)^{3/2}}$$

En efecto, basta notar que

$$y-1 \leq y \to \sqrt{y-1} \leq \sqrt{y} \to (y-1)^{3/2} \leq \sqrt{y}(y-1) \to \frac{1}{\sqrt{y}(y-1)} \leq \frac{1}{(y-1)^{3/2}}$$

Como $\displaystyle\int_a^\infty \frac{dy}{(y-1)^{3/2}}$ converge, tenemos que por comparación

$$\left|-\int_a^\infty \frac{\ln y}{y(y-1)}\, dy\right| \leq \int_a^\infty \left|\frac{\ln y}{y(y-1)}\right|\, dy \leq \int_a^\infty \frac{dy}{(y-1)^{3/2}} < \infty$$

Por otro lado, la función $f : [1, a] \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(y) = \frac{\ln y}{y(y-1)}$$

es continua, ya que aplicando la regla de L'Hôpital tenemos que

$$\lim_{y\to 1} f(y) = \lim_{y\to 1} \frac{\ln y}{y(y-1)} = \lim_{y\to 1} \frac{\frac{1}{y}}{2y-1} = 1$$

entonces existe $\displaystyle\int_1^a \frac{\ln y}{y(y-1)}\, dy$ y por lo tanto la integral dada inicialmente es convergente.

c) Es claro que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\, dx = \int_{-\infty}^0 \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\, dx + \int_0^\infty \frac{x^3+x^2}{x^6+1}\, dx$$

Dada la paridad de la función, nos limitaremos a analizar uno de los casos (el otro es idéntico). Notemos que

$$g(x) = \frac{x^3+x^2}{x^6+1} = \frac{x^3(1+1/x)}{x^3(x^3+1/x^3)} = \frac{1+\frac{1}{x}}{x^3+\frac{1}{x^3}}$$

Para valores grandes de x, i.e. $x \to \infty$, nuestra función $g \sim \frac{1}{x^3}$, la cual es convergente. Entonces, si comparamos con $h(x) = \frac{1}{x^3}$, la integral en cuestión será convergente.

d) Separamos la integral:

$$\int_{-3}^3 \frac{dx}{x^2} = \int_{-3}^0 \frac{dx}{x^2} + \int_0^3 \frac{dx}{x^2}$$

Entonces,

$$\int_0^3 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon\to 0} \int_\epsilon^3 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\epsilon\to 0} \left(\frac{1}{\epsilon} - \frac{1}{3}\right) = \infty$$

Además, haciendo el cambio de variable $u = -x$ obtenemos que

$$\int_{-3}^0 \frac{dx}{x^2} = -\int_3^0 \frac{du}{u^2} = \int_0^3 \frac{du}{u^2} = \infty$$

Por lo tanto, la integral dada inicialmente diverge.

■

(6) **[Propuesto]** Estudie la paradoja asociada a la *Trompeta de Torricelli*, que se consigue al rotar la curva $y = \frac{1}{x},\ x \geq 1$ en torno al eje X:

a) Calcule el superficie de la trompeta comprendida entre 1 y L con la fórmula asociada:

$$S = 2\pi \int_1^L f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}dx$$

con $L \to \infty$.

b) Calcule el volumen de la trompeta comprendida entre 1 y L con la fórmula asociada:

$$V = \pi \int_1^L f(x)^2 dx$$

con $L \to \infty$.

c) Analice sus resultados, ¿qué puede concluir de ellos?

Solución:

a) En este caso, tenemos que $f'(x)^2 = \frac{1}{x^4}$. Por tanto,

$$S = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}\ dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\sqrt{1 + x^4}\ dx$$

dado que integramos para valores positivos de la variable. Ahora, para $x \geq 0$ se cumple que $x^4 + 1 \leq x^4$. Por tanto,

$$2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\sqrt{1 + x^4}dx \geq 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x^3}\sqrt{x^4}dx = 2\pi \int_1^\infty \frac{1}{x}\ dx$$

y esta última integral diverge por el criterio$-p$. Así, es claro que S también es divergente, i.e. la *Trompeta de Torricelli* posee superficie infinita.

b) En este caso, notemos que:

$$V = \pi \int_1^\infty f(x)^2 dx = V = \pi \int_1^\infty \frac{dx}{x^2} = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = \pi$$

Por tanto, la *Trompeta de Torricelli* posee un volumen finito.

c) En el momento de su descubrimiento, fue considerado una paradoja. La idea es la siguiente: se desea pintar la superficie interior de la trompeta y queremos calcular cuánta pintura requerimos. Una posibilidad es directamente pintar el interior de esta superficie, pero como ésta es infinita se necesitaría una cantidad ilimitada de material. Por otra parte, si optamos por rellenar la trompeta completamente con pintura (con lo que evidentemente se cumpliría nuestra misión) requeriríamos una cantidad limitada de material para cumplir con el objetivo.

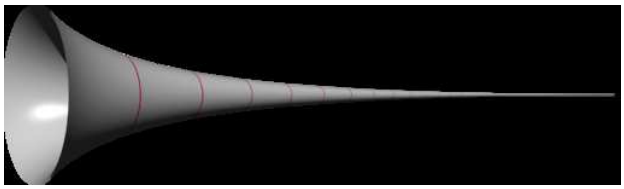


Figura 3.3: *La trompeta de Torricelli.*

La solución de la paradoja es que la primera afirmación sobre un área infinita presupone que la capa de pintura posee un grosor constante. Esto no se cumple en el interior de la trompeta, ya que gran parte de la figura no es accesible a la pintura, especialmente cuando el diámetro de la misma es menor que el de una molécula de pintura. Ahora, si se considera una pintura sin grosor, efectivamente sería necesaria una cantidad infinita de tiempo para que ésta llegase hasta el *final* del cuerno para poder pintarlo.

■

Apéndice a la sección

- *Cómo calcular algunas integrales impropias*[1]

  Una técnica para calcular ciertas integrales impropias proviene de la teoría de Variable Compleja para funciones meromorfas[2]. La idea básica tras la técnica radica en hallar una curva cerrada simple en la cual sea posible aplicar el *Teorema del Residuo* de modo tal que podamos determinar nuestra integral buscada a partir de dicho resultado.

  Para emplear esta técnica se requiere un manejo conceptual que incluya los siguientes tópicos:

  - Funciones de variable compleja
  - Singularidades aisladas y su clasificación
  - Teorema de Cauchy para integrales de línea

[1] Solo para personas muy interesadas.

[2] En la gran complejidad de la teoría que sustenta el método radica el hecho nuestro análisis se limita únicamente al estudio de la convergencia y no a determinar el valor de las integrales

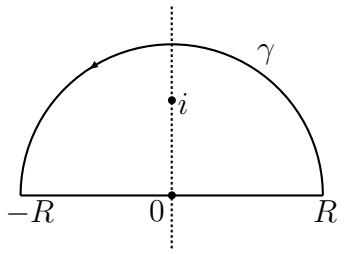
- Teorema del residuo para funciones complejas

Se recomienda al lector revisar dichos conceptos para entender la aplicación de la técnica. Para ello, se sugiere revisar algún texto del tema, tales como *Complex Analysis* de Bak & Newman o *Análisis de Variable Compleja* de Ahlfors. Una vez comprendidos dichos conceptos, veamos un ejemplo:

Se desea calcular la siguiente integral

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx$$

Para ello, sea γ la curva que se presenta en la figura y C_R su parte semicircular:



Por el Teorema de Cauchy, $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{2iz}}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f,i) = \pi e^{-2}$. Así,

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{1+x^2}\, dx + \int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2}\, dz = \pi e^{-2}$$

Recordando que $(e^{ix})^2 = (\cos x + i \sin x)^2 = 1 + i \sin 2x - 2\sin^2 x$,

$$\begin{aligned}\int_{-R}^{R} \frac{e^{2ix}}{1+x^2}\, dx &= \int_{-R}^{R} \frac{1}{1+x^2}\, dx + i\int_{-R}^{R} \frac{\sin 2x}{1+x^2}\, dx - 2\int_{-R}^{R} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx \\ &= 2\arctan R - 2\int_{-R}^{R} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx\end{aligned}$$

dado que la función de la segunda integral es impar, y por tanto ésta tiene un valor igual a cero. Por otra parte,

$$\int_{C_R} \frac{e^{2iz}}{1+z^2}\, dz = \int_{C_R} \frac{\cos 2z}{1+z^2}\, dz + i\int_{C_R} \frac{\sin 2z}{1+z^2}\, dz$$

haciendo $C_R : z = Re^{i\theta}$ tenemos

$$\left| iR\int_0^\pi \frac{e^{2iz(\theta)}}{(Re^{i\theta})^2+1}\, e^{i\theta}\, d\theta \right| \leq \frac{R\,\varphi(\theta)}{|R^2-1|}\pi \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

con φ una función acotada. Si aplicamos límite cuando $R \to \infty$ a nuestra expresión original, finalmente descubrimos que

$$\pi - 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx = \pi e^{-2} \longrightarrow \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 x}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{4}\left(1 - e^{-2}\right)$$

dado que el integrando es par.

Series

II.i. Series de términos positivos

(1) *a*) Demuestre que la serie armónica diverge.

b) Determine el valor de las siguientes series:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^k \sin^2\left(\frac{2}{k}\right)$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+k-1}{(k+1)^2(k+2)^2}$

c) Utilizando el *criterio de comparación*, estudie la convergencia de las siguientes series:

i. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k)}{k^2}$

ii. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$

iii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(5^n+1)}{(2^n-1)}$

iv. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k^\alpha \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)$, $\alpha < 1/2$

Solución:

a) Recordemos que

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e \Longrightarrow n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 \Longrightarrow \ln(n+1) - \ln(n) < \frac{1}{n}$$

Por tanto,

$$\begin{array}{rcrcl} \ln(2) & - & \ln(1) & < & \dfrac{1}{1} \\ \ln(3) & - & \ln(2) & < & \dfrac{1}{2} \\ \ln(4) & - & \ln(3) & < & \dfrac{1}{3} \\ & & \cdots & & \\ \ln(n+1) & - & \ln(n) & < & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

sumando, término a término, obtenemos:

$$\ln(n+1) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

y, al tender n a infinito, sabemos que $\ln(n+1) \to \infty$ con lo que la serie armónica diverge.

b) i. El término general a_n cumple que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left\{ n^n \sin^2\left(\frac{2}{n}\right)\right\} = \infty$$

con lo que la serie considerada diverge a infinito.

ii. Notemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{k^2+k-1}{(k+1)^2(k+2)^2} &= \frac{(k+1)^2-(k+2)}{(k+1)^2(k+2)^2} = \frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+1)^2(k+2)} \\
&= \frac{1}{(k+2)^2} - \frac{(k+2)-(k+1)}{(k+1)^2(k+2)} \\
&= \frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}
\end{aligned}$$

Entonces,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k+2)^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) = \frac{1}{4} - \frac{n+1}{(n+2)^2}$$

y con ello $\lim_{n\to\infty} S_n = \dfrac{1}{4}$.

c) i. Se cumple que

$$\ln(n) \leq \sqrt{n} \longrightarrow \frac{\ln(n)}{n^2} \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}}$$

Como la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$ converge para $r > 1$, entonces por comparación la serie analizada también lo hace.

ii.

$$k(k+1) < (k+1)^2 \longrightarrow \frac{1}{k+1} < \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$

y como el lado izquierdo de la desigualdad diverge, por ser armónica, entonces la serie planteada diverge.

iii. Mediante inducción, es posible probar que $2^n(5^n+1) > 5^n(2^n-1)$, y con ello:

$$\frac{(5^n+1)}{(2^n-1)} > \frac{5^n}{2^n} = \left(\frac{5}{2}\right)^n$$

y por tanto ambas series divergen.

iv. Usamos que

$$\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k(k+1)}} = \frac{1}{(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})\sqrt{k^2+k}}$$

de modo tal que comparamos con la serie $b_n = \dfrac{1}{k^{3/2-\alpha}}$. Como $\alpha < 1/2$, entonces $3/2-\alpha > 1$ y por tanto ambas series convergen.

■

(2) Utilizando el *criterio de comparación con paso al límite*, estudie el comportamiento de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+k}{2k^4+\sqrt{k}}$ *c)* $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln(k)}$ *e)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right)$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3k+\ln(k)}$ *d)* $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \tan^3\left(\frac{1}{k}\right)$

Solución:

Recordemos el criterio. Sean $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ dos series de términos positivos y sea

$$\mathcal{L} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Entonces,

- Si $0 < \mathcal{L} < \infty$, entonces o ambas convergen o ambas divergen.
- Si $\mathcal{L} = 0$ y b_k converge, entonces a_k converge.
- Si $\mathcal{L} = \infty$ y b_k diverge, entonces a_k diverge.

a) Comparamos con la serie convergente $b_k = \frac{1}{k^2}$. Es claro que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{3k^2+k}{2k^4+\sqrt{k}}}{1/k^2} = \lim_{k\to\infty} \frac{3k^4+k^3}{2k^4+\sqrt{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{3+\frac{1}{k}}{2+\frac{2}{k^{3/2}}} = \frac{3}{2}$$

y la serie converge.

b) Comparemos con la serie armónica:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{3k+\ln(k)}}{1/k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{3k+\ln(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{}{3+\frac{\ln(k)}{k}} = \frac{1}{3}$$

y la serie diverge.

c) Si comparamos con $b_k = \frac{1}{k^2}$, tendremos que:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^2 \ln(k)} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\ln(k)} = 0$$

y como b_k converge, la serie analizada también lo hace.

d) Comparemos el término general con $b_k = \frac{1}{k^3}$, así:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\sin^3(1/k)/\cos^3(1/k)}{1/k^3} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\cos^3(1/k)} \left(\frac{\sin(1/k)}{1/k}\right)^3 = 1$$

y con ello la serie original converge.

e) Vemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - e^{-n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - ne^{-n^2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Comparamos con la serie armónica $b_n = 1/n$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} 1 - ne^{-n^2} = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{n}{e^{n^2}} = 1 - 0 = 1 > 0$$

Por tanto, la serie en cuestión diverge.

■

(3) Utilizando el *criterio del cociente o de d'Alembert*, estudie el comportamiento de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$, $x \in \mathbb{R}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n^n}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{3^n}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

f) $\displaystyle 1 + \frac{1\cdot 2}{1\cdot 3} + \frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5} + \cdots$

Solución:

Sea $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos positivos y

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Entonces,

- Si $r < 1$, entonces a_k converge.
- Si $r > 1$, entonces a_k diverge.
- Si $r = 1$, el criterio no es concluyente.

a) Notemos que

$$r = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{x^k}{k!}} = \lim_{k\to\infty} \frac{x}{k+1} < 1$$

ya que la propiedad arquimediana asegura que siempre existirá un natural $n = k + 1$ que es mayor al real x. Así, la serie converge para todo valor de $x \in \mathbb{R}$.

b) Sea a_n el término general

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{e^n}{n^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \\
&= 0 \cdot e^{-1} = 0
\end{aligned}$$

y la serie converge.

c)

$$r_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n} = \frac{\ln(n+1)}{n+1} \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n$$

El primer factor tiene converge a cero; el segundo, a e^{-1}. Luego, basta probar que el tercer factor está acotado. Para $n \geq 3$ tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{n+1}\right)^n < n &\Rightarrow (n+1)^n < n^{n+1} \\
&\Rightarrow n\ln(n+1) < (n+1)\ln(n) \\
&\Rightarrow \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} < \frac{n+1}{1} \\
&\Rightarrow \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n < \left(\frac{n+1}{1}\right)^n < e
\end{aligned}$$

así, $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$ y la serie converge.

d) Notemos que la serie diverge. Es claro que:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{3\cdot 3^n}}{\frac{n!}{3^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3} = \infty$$

y como $r > 1$, el criterio señala la divergencia de la serie.

e) Calculemos la razón entre los términos:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{(2[n+1])!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(n+1)n!}{n!}\right)^2 \frac{(2n)!}{(2n+2)(2n+1)(2n)!} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4} < 1
\end{aligned}$$

y por el criterio de d'Alembert, la serie converge.

f) Usaremos el criterio de d'Alembert para probar que la serie converge. En efecto,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n\cdot(n+1)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}}{\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\cdot(2n+1)}}{\frac{n!}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1
\end{aligned}$$

■

(4) Utilizando el *criterio de la raíz o de Cauchy*, estudie el comportamiento de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right)^n$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\ln(n)}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}} x^n$, $x > 0$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}}$

Solución:

Este criterio nos dice que: Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos positivos y

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

Entonces,

- Si $r < 1$, entonces a_k converge.
- Si $r > 1$, entonces a_k diverge.
- Si $r = 1$, el criterio no es concluyente.

a) Notemos que

$$r = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\ln(n)}{n}\right) = 0 < 1$$

Así, la serie converge.

b) Sea a_n el término general

$$r = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt[n]{n} - 1\right) = 0 < 1$$

y la serie converge.

c)

$$r_n = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n\ln(n)}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{\ln(n)}}$$

Sabemos que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Ahora bien, para $n \geq 3$ se cumple que:

$$1 \leq \ln(n) \leq n \longrightarrow 1 \leq \sqrt[n]{\ln(n)} \leq \sqrt[n]{n}$$

y por el teorema del sandwich, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\ln(n)} = 1$. Finalmente,

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} = 1$$

y el criterio no es concluyente. Necesitaremos utilizar otra herramienta para estudiar esta serie.

d) Notemos que:

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{-\sqrt{n}} x^n} = x \cdot \left(\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}\right)^{1/n} = x \cdot \frac{1}{2^{\sqrt{n}/n}}$$

Como $\sqrt{n}/n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, entonces $\dfrac{1}{2^{\sqrt{n}/n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$ y finalmente

$$\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} x$$

Luego, la serie será convergente si $x < 1$. Analicemos el caso en que $x = 1$: $b_n = 2^{-\sqrt{n}}$. Comparemos con $c_n = \dfrac{1}{n^2}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{-\sqrt{n}}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^{\sqrt{n}}} = 0$$

Por el criterio de comparación con paso al límite, sabemos que si $L = 0$ entonces el numerador converge si el denominador es convergente. Por tanto, b_n es convergente.
Así, la serie original es convergente para todo $x \leq 1$.

e) Sea a_n el término general, que puede ser reescrito de la siguiente forma:

$$a_n = \frac{2^{3n+1}}{3^{2n-1}} = \frac{2 \cdot 2^{3n}}{3^{-1} \cdot 3^{2n}} = 6\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

Por tanto,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{8}{9} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{6} = \frac{8}{9} < 1$$

y la serie converge.

■

(5) Utilizando el *criterio integral de Maclaurin-Cauchy*, estudie la convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, $p > 0$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p}$, $p > 0$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n^2}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$

f) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\arctan(k)}}{k^2+1}$

Solución:

Sea $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ una función continua, positiva y decreciente a cero. Entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge } \iff \int_1^{\infty} f(x)dx \text{ converge}$$

a) Para aplicar el criterio de la integral debemos demostrar que f es monótona decreciente y positiva para $x \geq 1$. En efecto,

$$f(x) = \frac{1}{x^p} > 0,\ \forall x > 0 \ \longrightarrow\ f'(x) = -\frac{p}{x^{p+1}} < 0,\ \forall x > 0$$

Calculamos la integral impropia:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^p} < \infty \Longleftrightarrow p > 1$$

y la serie es convergente si $p > 1$.

b) Verificamos las hipótesis del teorema:

$$f(x) = \frac{1}{x \ln(x)} > 0,\ \forall x > 2 \ \longrightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln^2(x)}\right) < 0,\ \forall x > 2$$

Comparamos con

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln(x)} = \ln(\ln x)\Big|_2^\infty = \infty$$

y por tanto la serie -y la integral- divergen.

c) La demostración de que $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^p}$ es positiva y monótona decreciente queda propuesta al lector.
Comparamos con la integral respectiva:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^p} = \int_{\ln 2}^\infty \frac{du}{u^p} < \infty \iff p > 1$$

y con ello obtenemos el criterio para la serie en cuestión.

d) Es claro que $f(x) = xe^{-x^2}$ es positiva para $x > 0$. Ahora,

$$f'(x) = e^{-x^2} - 2x^2e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2) > 0\ \forall x > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

y cumple las hipótesis. Por tanto,

$$\int_1^\infty xe^{-x^2}dx = -\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_1^\infty = \frac{1}{2}e^{-1}$$

Esto garantiza la convergencia de la serie dada.

e) Sean $f(x) = (1+\sqrt{x})^{-1}$ y $g(x) = (1+x)^{-1}$. Claramente se cumple que $g(x) < f(x)$. Notemos que

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_1^\infty = \infty$$

Por comparación se tiene que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ diverge y por el criterio de la integral, se obtiene que la serie dada es divergente.

f) Estudiemos la función:

$$f(x) = \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1} > 0,\ \forall x > 0 \longrightarrow f'(x) = \frac{(1-2x)e^{\arctan(x)}}{(1+x^2)^2}$$

vemos que para $x \geq 1$ la derivada $f'(x)$ es negativa, luego $f(x)$ es continua, positiva y decreciente. Así,

$$\int_1^\infty \frac{e^{\arctan(x)}}{x^2+1}dx = \int_1^\infty d\left(e^{\arctan(x)}\right) = e^{\arctan(x)}\Big|_1^\infty = e^{\pi/2} - e^{\pi/4}$$

y, por tanto, la serie planteada converge.

■

(6) Sea $g : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ continua y creciente en $[0,1]$, con $g(0) = 0$. Pruebe que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right)$ converge ssi la integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}dx$ converge.

Solución:

Haciendo el cambio de variables $\dfrac{1}{x} = u$, implica que $-\dfrac{1}{x^2}dx = du$ y obtenemos que

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x^2}dx = -\int_\infty^1 g\left(\frac{1}{u}\right)du = \int_1^\infty g\left(\frac{1}{u}\right)du$$

Además, como g es creciente entonces $g'(x) \geq 0$ para todo x en $[0,1]$ entonces

$$\frac{d}{du}g\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}g'\left(\frac{1}{u}\right) \leq 0$$

es decir, $g(1/u)$ es monótona decreciente. Además, como g es continua,

$$\lim_{u\to\infty} g\left(\frac{1}{u}\right) = g\left(\lim_{u\to\infty}\left(\frac{1}{u}\right)\right) = g(0) = 0$$

entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} g\left(\frac{1}{n}\right) \text{ converge } \Leftrightarrow \int_1^{\infty} g\left(\frac{1}{x}\right) dx \text{ converge}$$
$$\Leftrightarrow \int_0^1 \frac{g(x)}{x^2} dx \text{ converge}$$

■

(7) Sea $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ una serie de términos positivos convergente, con $a_n \neq 0$. ¿Qué se puede decir sobre la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$? Justifique.

Solución:

Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces el término general de la serie tiene límite cero. Es decir, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ y se sabe que las sucesiones convergente son acotadas; luego, existe $c > 0$ tal que:

$$a_n \leq c \longrightarrow \frac{1}{c} \leq \frac{1}{a_n}$$

Por comparación, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c}$ diverge, se deduce la divergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$.

■

(8) Sea $\ell = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$

a) Determine, en términos de ℓ, el valor de $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3}$

b) Demuestre que $\frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$

Solución:

a) Tenemos que

$$\frac{\ell}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3}$$

Por otra parte, para todo k se cumple que

$$\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n^3} = \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(2n-1)^3}}_{\text{números impares}} + \underbrace{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(2n)^3}}_{\text{números pares}}$$

Tomando límite cuando k tiende a infinito nos queda

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(2n-1)^3} &= \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{2k} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{(2n)^3} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} \\ &= \ell - \frac{\ell}{8} = \frac{7}{8}\ell \end{aligned}$$

b) La función $f(x) = \frac{1}{x^3}$ es decreciente en $[1, \infty)$. Por tanto, para todo n se cumple que

$$\frac{1}{(n+1)^3} < \int_n^{n+1} f(x)dx < \frac{1}{n^3}$$

Luego,

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{n=2}^{k} \frac{1}{n^3} < \lim_{k\to\infty} \int_1^{k+1} \frac{1}{x^3}dx < \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3}$$

Pero

- $\lim\limits_{k\infty} \int_1^{k+1} \frac{1}{x^3}dx = \lim\limits_{k\infty} \left(-\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=2}^{k} \frac{1}{n^3} = \lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{k} \frac{1}{n^3} - 1$

Entonces,

$$\ell - 1 < \frac{1}{2} < \ell \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} < \ell < \frac{3}{2}$$

Note que la cota inferior $\ell > 1/2$ resulta directamente de la definición de la serie con término general decreciente, tomando el primer término.

■

II.ii. Series alternantes

(1) *a*) Utilizando el *criterio de Leibniz*, estudie la convergencia de las siguientes series alternantes:

i. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+1)}}$

ii. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\ln(n)}$

iii. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-n}$

iv. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

b) Se sabe que una serie $\sum a_n$ es absolutamente convergente si todo reordenamiento de ella converge al mismo valor. Verifique que la serie armónica converge condicionalmente a través del reordenamiento de la serie alternante.

Solución:

a) El criterio de Leibniz nos dice que: Si los términos de la serie alternante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} a_n$ satisfacen:

$$(*)\ 0 < a_{n+1} < a_n \qquad y \qquad (**)\ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Entonces, la serie alternante converge.

i. Es inmediato que todos los términos de a_n son positivos y que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} = 0$$

Por tanto, basta probar el carácter decreciente de a_n:

$$\begin{aligned} 0 < n < n+2 \ &\rightarrow\ n(n+1) < (n+1)(n+2) \\ &\rightarrow\ \sqrt{n(n+1)} < \sqrt{(n+1)(n+2)} \\ &\rightarrow\ \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} > \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}} \\ &\rightarrow\ a_n > a_{n+1} \end{aligned}$$

Entonces, por el criterio de Leibniz, la serie alternante converge.

ii. Nuevamente, es claro el carácter positivo de los términos. Además,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\ln(n)} = 0$$

Utilizaremos las propiedades de $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$ para demostrar el carácter decreciente de a_n:

- $f'(x) = -\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{\ln(x)} + \frac{1}{\ln^2(x)}\right) < 0,\ \forall x > 2$
- Si es estrictamente decreciente, en particular cumple que $f(n) > f(n+1),\ n \geq 2$
- Como $a_n = f(n)$, se cumple lo pedido

Finalmente, la serie converge.

iii. Es evidente que $a_n \to 0$ cuando $n \to \infty$ y que $a_n > 0$. Para probar el carácter decreciente, utilizaremos inducción. $P(n):\ a_n$ es decreciente

- $P(1)$: $a_1 = \frac{1}{e} > a_2 = \frac{1}{e^2}$
- Suponemos que $P(n):\ a_n > a_{n+1}$
- $e^{-n} > e^{-(n+1)} \longrightarrow e \cdot e^{-n} > e \cdot e^{-(n+1)} \longrightarrow e^{-(n+1)} > e^{-(n+2)}$
- Por tanto, $P(n) \longrightarrow P(n+1)$, i.e. $a_{n+1} > a_{n+2}$

y la serie es convergente.

iv. Se sabe que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, y que $n+1 > n$ para todo n. Por tanto,

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \longrightarrow a_{n+1} < a_n$$

y, por el criterio de Leibniz, la serie *armónica alternante* es convergente.

b) Sabemos que la serie armónica alternante converge. Por tanto, sea:

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

Tratemos a S en una forma algebraica común, y calculemos $\tilde{S} = S + \frac{1}{2}S$:

$$\begin{array}{rcccccccccccccccccc}
\frac{1}{2}S & = & & & \frac{1}{2} & & & - & \frac{1}{4} & & & + & \frac{1}{6} & & & - & \frac{1}{8} & + & \cdots \\
+\,S & = & 1 & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{8} & + & \cdots \\
\hline
\frac{3}{2}S & = & 1 & & & + & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{5} & & & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{4} & + & \cdots
\end{array}$$

Ahora, miremos cuidadosamente el resultado. La suma $\tilde{S}$ consiste precisamente en los mismos términos que aquellos en la suma S original, solo en un orden diferente. Específicamente, la serie en $\tilde{S}$ es un reordenamiento de S.

Como existe un reordenamiento $\tilde{S}$, el cual converge a $\frac{3}{2}$ del valor de la serie original S, entonces la serie armónica no es absolutamente convergente.

■

(2) Demuestre que $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$ es convergente y determine el número de términos a sumar para aproximar S con un error menor que $0,001$.

Solución:

Si $a_n = \frac{1}{2n-1}$, entonces

- $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de términos positivos.
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n-1} = 0$.

Entonces, por el Criterio de Leibniz la serie dada, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, converge.

Sea ahora $N-1$ el menor número de sumandos requerido para aproximar la suma total, S, con un error menor que un milésimo.

Sabemos entonces que $\left|\sum_{n=1}^{N-1}(-1)^{n+1}a_n - S\right| < a_N = \frac{1}{2N-1}$.

Buscamos pues, el menor entero positivo, N tal que

$$\frac{1}{2N-1} \leq \frac{1}{1000} \quad \longleftrightarrow \quad 2N-1 \geq 1000 \quad \longleftrightarrow \quad N \geq \frac{1001}{2}$$

El menor entero positivo que verifica lo anterior es $N = 501$. Como la suma incluye solo $N-1$ sumandos, basta sumar **500 términos**.

■

(3) Indique si las siguientes series convergen absolutamente, condicionalmente o divergen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

b) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[n]{n}}$

c) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k k!}{k^k}$

d) $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}k}{\ln(k)}$

Solución:

a) Primero estudiamos la convergencia absoluta. Esto es,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$$

Si comparamos con la serie armónica,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{m\to 0}\frac{\sin(m)}{m} = 1$$

Luego, la serie de los valores absolutos se comporta como la serie armónica; por tanto, ésta diverge y la serie original no es absolutamente convergente.

Por otro lado, la sucesión $a_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es positiva, tiende a cero cuando $n \to \infty$ y es decreciente, ya que

$$\frac{d}{dx}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x^2}\cos\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

si $x \geq 1$. Luego, por el criterio de Leibniz, la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge y, como no lo hace en valores absolutos, la serie converge **condicionalmente**.

b) Sea $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}$. Es fácil ver que $a_n > 0$ y que

$$\frac{d}{dx}\, x \cdot x^{1/x} = \frac{d}{dx}\, x^{\frac{x+1}{x}} = -x^{-\frac{x-1}{x}} \left(\ln(x) - x - 1\right) > 0,\ x \geq 2$$

Por tanto, $x \cdot x^{1/x}$ es creciente, y $\dfrac{1}{x \cdot x^{1/x}}$ decrece para $x \geq 2$. Entonces, la serie converge por criterio de la seria alternante.
No converge absolutamente ya que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n\sqrt[n]{n}}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Por tanto, la serie converge **condicionalmente**.

c) Primero estudiamos la convergencia absoluta. Esto es,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k k!}{k^k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

Por el criterio del cociente,

$$r_k = \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\dfrac{(k+1)k!}{(k+1)(k+1)^k}}{\dfrac{k!}{k^k}} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{-k}$$

es fácil ver que $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = e^{-1} < 1$. Por tanto, la serie converge **absolutamente**.

d) La serie es de la forma $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+2} a_k$, con $a_k = \dfrac{k}{\ln(k)}$. Ahora bien, si tiene que:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{\ln(k)} = \infty$$

y por tanto, independiente del signo de los términos, la serie **diverge**.

■

(4) Demuestre que, para todo $\alpha > 0$, la serie $1 - \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} - \ldots$ converge y que su suma es siempre positiva.

Solución:

Para cualquier α positivo, la sucesión $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$ forman una sucesión decreciente que tiende a cero.

Luego, por el Criterio de Leibniz, la serie alternante $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^\alpha}$ converge.

Por otro lado, si $S_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^\alpha}$ tenemos, por propiedades de las series alternantes, que

$$1 - \frac{1}{2^\alpha} < S_\alpha \ (< 1) \qquad \text{y como} \qquad 0 < 1 - \frac{1}{2^\alpha}$$

concluimos que las sumas son siempre positivas. ■

II.iii. Series de potencias

(1) Determine el intervalo de convergencia para cada una de las siguientes series de potencias:

a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

b) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)\left(x^2-x+1\right)^n$

c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}(x-3)^n$

d) $\sum_{n=0}^{\infty}n!(x-x_0)^n$

e) $\sum_{n=1}^{\infty}a^{n^2}x^n$

f) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(n+2)8^n}\left(\frac{8x-4}{x^2+2}\right)^{3n}$

Solución:

a) Sabemos que

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

Entonces,

$$L = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{|x^{n+1}|}{n+1}}{\frac{|x^n|}{n}} = \lim_{n\to\infty}|x|\,\frac{n}{n+1} = |x|$$

Por tanto, existe convergencia absoluta si $|x| < 1$. Si $x = 1$, la serie diverge (serie armónica). Si $x = -1$, la serie converge (armónica alternante). Por tanto, el intervalo de convergencia es:

$$I = [-1, 1)$$

b) Calculemos el límite L:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sin\left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)(x^2-x+1)^{n+1}}{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)(x^2-x+1)^n}\right| &= \left|x^2-x+1\right|\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)}\\ &= \left|x^2-x+1\right|\lim_{m\to 0}\frac{\sin\left(\frac{1}{2}m\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}m\right)\cos\left(\frac{1}{2}m\right)}\\ &= \left|x^2-x+1\right|\lim_{m\to 0}\frac{1}{2\cos\left(m/2\right)}\\ &= \frac{|x^2-x+1|}{2}\end{aligned}$$

Por lo tanto, nuestra serie converge absolutamente ssi $|x^2-x+1|<2$. Resolviendo la inecuación, lo que es muy fácil ya que se trata de una parábola, se obtiene que

$$\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Evaluamos los extremos y ambos arrojan la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{1}{2^n}\right)2^n$, cuyo término general tiende a 1 cuando $n\to\infty$. Así, el intervalo de convergencia es:

$$I=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2},\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$$

c) Para obtener el radio de convergencia usamos la expresión:

$$\frac{1}{R}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-2)^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{2^n}\right|=2$$

Así, la serie converge para $|x-3|<1/2$ o lo que es lo mismo converge para

$$\frac{5}{2}<x<\frac{7}{2}$$

Ahora debemos analizar separadamente los extremos del intervalo.

- Para $x=5/2$, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

  Esta es la serie armónica y, consecuentemente, diverge.

- Para $x=7/2$, tenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$

  Esta es la serie armónica alternada y, luego,converge.

Por tanto, el intervalo de convergencia es:

$$I = \left(\frac{5}{2}, \frac{7}{2}\right]$$

d) Si $x \neq x_0$,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n!(n+1)(x-x_0)(x-x_0)^n}{n!(x-x_0)^n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}|(n+1)(x-x_0)| = |x-x_0|\cdot\lim_{n\to\infty}(n+1) \\ &= \infty \end{aligned}$$

Por lo tanto, el radio de convergencia R vale cero, lo que significa que la serie converge solamente para

$$x = x_0$$

e) Utilizando el criterio de la raíz, tenemos

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a^{n^2}x^n|} = \lim_{n\to\infty}|a^n x| = \begin{cases} 0 & \text{, si } |a|<1 \\ |x| & \text{, si } |a|=1 \\ \infty & \text{, si } |a|>1,\ x\neq 0 \end{cases}$$

Por lo tanto, si $|a| < 1$ el intervalo de convergencia es

$$I = (-\infty, \infty)$$

Si $|a| > 1$, el intervalo de convergencia es

$$x = 0$$

Si $|a| = 1$, la serie es $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n$ o $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^n$, ambas con radio de convergencia $R = 1$. Claramente divergen en 1 y -1, por lo tanto el intervalo de convergencia si $|a| = 1$ es

$$I = (-1, 1)$$

f) Aplicamos el criterio del cociente. Sea

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}}{(n+3)8\cdot 8^n}\left(\frac{8x-4}{x^2+2}\right)^{3n+3}\cdot\frac{(n+2)8^n}{(-1)^{n+1}}\left(\frac{x^2+2}{8x-4}\right)^{3n}\right| \\ &= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)(n+2)}{8(n+3)}\left(\frac{8x-4}{x^2+2}\right)^3\right| \\ &= \frac{1}{8}\left|\frac{8x-4}{x^2+2}\right|^3\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3} \\ &= \left|\frac{8x-4}{2x^2+4}\right|^3 \end{aligned}$$

La serie converge si

$$L<1 \quad\Leftrightarrow\quad |8x-4| < 2x^2+4 \quad\Leftrightarrow\quad -2x^2-4 < 8x-4 < 2x^2+4$$

- $-2x^2 - 4 < 8x - 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 4x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < -4 \ \vee \ x > 0$
- $8x - 4 < 2x^2 + 4 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 4 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x-2)^2 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \neq 2$

Por lo tanto, la serie converge si $x < -4 \cup 0 < x < 2 \cup x > 2$; diverge si $-4 < x < 0$ y aún no podemos decidir cuando $x = -4$, $x = 0$ o $x = 2$

Sustituyendo $x = -4$ queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)8^n}{(-1)^{n+1}} \left(\frac{-36}{18}\right)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+2} = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+2}$$

la cual diverge (es la serie armónica sin sus primeros dos términos).

Sustituyendo $x = 2$ queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)8^n}{(-1)^{n+1}} \left(\frac{12}{6}\right)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$$

la cual converge pues es una serie alternante cuyos términos decrecen a cero (Leibniz).

Sustituyendo $x = 0$ queda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)8^n}{(-1)^{n+1}} \left(\frac{-4}{2}\right)^{3n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{n+2}$$

la cual diverge, siendo la misma que en el caso $x = -4$.

Luego, el intervalo de convergencia es

$$I = (-\infty, -4) \cup (0, \infty)$$

■

(2) *a*) Demuestre el siguiente teorema (Test-M de Weierstrass): *Sean las funciones a_1, a_2, ..., a_n de variable real. Si, para cada n, existe una constante real M_n tal que*

$$|a_n(x)| \leq M_n$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge absolutamente[3] *en $\mathbb{R}$.*

b) Use el Test-M de Weierstrass para mostrar que la serie $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right)$ converge absolutamente en $\mathbb{R}$.

Solución:

a) Sabemos que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se cumple que:

$$|a_n(x)| \leq M_n$$

[3] De hecho, converge uniformemente.

Sumando sobre todos los términos,

$$s_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq M_1 + M_2 + \cdots + M_n = S_n$$

Pero, sabemos que $\lim_{n\to\infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} M_n = M$, con $M \in \mathbb{R}$ (puesto que es convergente). Entonces,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq M$$

y por tanto es convergente. Con ello se deduce que $\sum_{n=a}^{\infty} a_n$ converge absolutamente.

b) Tenemos que:

$$\left| \frac{1}{3^n} \cos\left(\frac{x}{2^n}\right) \right| \leq \frac{1}{3^n} = M_n$$

Ahora,

$$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$$

Entonces, por el Test-M, la serie converge absolutamente en $\mathbb{R}$.

■

(3) **[Propuesto]** Una función importante definida mediante series es la función de Bessel de orden n, donde n es un entero no negativo, definida mediante,

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \; x^{2k+n}}{k! \; \Gamma(k+n+1) \; 2^{2k+n}}$$

a) Demuestre que el dominio de J_n es $\mathbb{R}$.

b) Demuestre que la función de Bessel de primer orden J_1 satisface la ecuación diferencial

$$x^2 J_1''(x) + x J_1'(x) + (x^2 - 1) J_1(x) = 0$$

en todo su dominio de definición.

Solución:

a) Sea $a_k = \dfrac{(-1)^k \; x^{2k+n}}{k! \; \Gamma(k+n+1) \; 2^{2k+n}}$, $a_{k+1} = \dfrac{-(-1)^k \; x^{2k+2+n}}{(k+1)k! \; \Gamma(k+n+2) \; 2^{2k+2+n}}$. Aplicando el criterio del cociente tenemos:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{-(-1)^k\ x^{2k+2+n}}{(k+1)k!\ \Gamma(k+n+2)\ 2^{2k+2+n}}\cdot\frac{k!\ \Gamma(k+n+1)\ 2^{2k+n}}{(-1)^k\ x^{2k+n}}\right| \\
&= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{-x^2\ \Gamma(k+n+1)}{(k+1)\ \Gamma(k+n+2)\ 2^2}\right| \\
&= \frac{1}{4}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2\ \Gamma(k+n+1)}{(k+1)\ (k+n+1)\Gamma(k+n+1)}\right| \\
&= \frac{1}{4}\lim_{k\to\infty}\left|\frac{x^2}{(k+1)\ (k+n+1)}\right| \\
&= 0<1
\end{aligned}$$

Luego, el radio de convergencia es $R=\infty$, por lo tanto, $Dom(J_n)=\mathbb{R}$.

b) Como J_1 es una serie de potencias convergente en todo $\mathbb{R}$, sus derivadas también son series de potencias convergentes en todo $\mathbb{R}$ y corresponde a la derivación término a término. Es decir,

$$J_1'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)(-1)^k\ x^{2k}}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}$$

$$J_1''(x)=\sum_{1=0}^{\infty}\frac{(2k+1)(2k)(-1)^k\ x^{2k-1}}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}$$

Escribimos el lado izquierdo de la EDO en término de las series de potencia:

$$x^2J_1''(x)+xJ_1'(x)+(x^2-1)J_1(x)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k+1)(2k)(-1)^k\ x^{2k+1}}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+1)(-1)^k\ x^{2k+1}}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\ x^{2k+3}}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\ x^{2k+1}}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}$$

Separamos el coeficiente de x^1 del resto:

$$\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k+1}\left\{\frac{(2k+1)(2k)(-1)^k}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}+\frac{(2k+1)(-1)^k}{k!\ (k+1)!\ 2^{2k+1}}+\frac{(-1)^{k-1}}{k!\ (k-1)!\ 2^{2k-1}}-\frac{(-1)^k}{k!\ (k+1)!2^{2k+1}}\right\}+x^1\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k+1}(-1)^{k-1}}{k!(k-1)!2^{2k-1}}\left\{\frac{-(2k+1)(2k)}{k(k+1)\cdot 4}-\frac{(2k+1)}{k(k+1)\cdot 4}+1+\frac{1}{k(k+1)\cdot 4}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}(-1)^{k-1}}{k!(k-1)!2^{2k-1}} \left\{ \frac{1}{4k(k+1)} \Big(-2k(2k+1) - 2k - 1 + 1 \Big) + 1 \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}(-1)^{k-1}}{k!(k-1)!2^{2k-1}} \left\{ \frac{1}{4k(k+1)} \Big(-4k^2 - 4k \Big) + 1 \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k+1}(-1)^{k-1}}{k!(k-1)!2^{2k-1}} \{0\}$$

Como cada coeficiente se anula, deducimos que el lado izquierdo representa una función idénticamente nula.

■

(4) *a*) Utilizando series de potencias, calcule: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$

b) Obtenga la representación en series de potencia de la función $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$ y con ella calcule: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$

c) Calcule: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$

Solución:

a) Recordemos la serie geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

Entonces, se cumple que para todo $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x} \Big/ \int \, dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = \ln(1+x)$$

Evaluando en $x = 1$,

$$\ln(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

b) Sabemos que

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Entonces, la representación en series de potencia de f es:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Derivando obtenemos,

$$f'(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n-1)x^{n-2}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Es claro que $f'(1) = \left.\dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\right|_{x=1} = 1$, y con ello

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1$$

c) Consideremos $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, para $|x| < 1$. Así,

$$\begin{aligned} \Rightarrow\ f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow\ x \cdot f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2} \\ \Rightarrow\ \frac{1}{2} \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = \left.\frac{x}{(1-x)^2}\right|_{x=1/2} = 2 \end{aligned}$$

■

(5) Encuentre el desarrollo en series de las siguientes funciones en torno a $x = x_0$:

a) $f(x) = \arctan(x),\ x_0 = 0$

b) $f(x) = \dfrac{1}{(2+x)^2},\ x_0 = 1$

c) $f(x) = \sqrt{1-x^2},\ x_0 = 0$

d) $f(x) = \arcsin(x),\ x_0 = 0$

e) $f(x) = e^{\sin(x)},\ x_0 = 0$

f) $f(x) = \tan(x),\ x_0 = 0$

Solución:

a) Se sabe que para $-1 < x < 1$ se cumple que:

$$\begin{aligned} g(x) = \frac{1}{1-x} &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ h(x) = g(-x^2) = \frac{1}{1+x^2} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \\ f(x) = \int_0^x h(t)dt &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

y con ello

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

b) Obtenemos primero el desarrollo de $g(x) = \dfrac{1}{2+x}$ y luego derivamos:

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{3+(x-1)} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+t} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n$$

donde $t = (x-1)/3$ debe satisfacer $|t| < 1$ para la convergencia. Es decir, $|x-1| < 3$. Tenemos entonces que:

$$f(x) = -g'(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n(x-1)^{n-1}}{3^n} = \frac{1}{9}\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)(x-1)^n}{3^n}$$

c) Recordemos la serie binomial

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n, \quad |x| < 1$$

Es claro que

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \binom{1/2}{2}x^2 + \binom{1/2}{3}x^3 + \cdots$$

Ahora, trabajemos un poco más sobre $\binom{1/2}{n}$

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-j\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1-2j}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots(-1)\left(\frac{2j-1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!} \\ &= (-1)^{n+1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\ n!} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-3)}{2^n\ n!} x^{2n}$$

d) Recordemos que

$$\begin{aligned}\arcsin(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} &= \int_0^x (1-u^2)^{-1/2}\, du \\ &= \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} u^{2n} \right\} du \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-1/2}{n} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}\end{aligned}$$

Entonces,

$$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \cdots$$

e) Sea $t = \sin(x)$, entonces

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \cdots$$

Dado que,

$$t = \sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

entonces:

$$e^{\sin(x)} = 1 + \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right) + \frac{1}{2!}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right)^2 + \cdots$$

Como ambas series tienen radio de convergencia $R = \infty$, la serie resultante también lo posee. Reagrupando los primeros términos,

$$e^{\sin(x)} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + \cdots$$

f) Por trigonometría, $\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Entonces, $\cos(x) \cdot \tan(x) = \sin(x)$. Así, si suponemos que $\tan(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$ podemos hacer

$$\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) \cdot \left(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots\right) = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \right)$$

y, por comparación de coeficientes de la misma potencia de x, resulta: $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$, $a_3 = \frac{1}{3}$, $a_4 = 0$, $a_5 = \frac{2}{15}$, $a_6 = \frac{17}{315}$, etcétera. Por lo tanto,

$$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots$$

■

(6) *a*) Probar que para $|a| < 1$ se tiene

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1 - a\sin^2(t)}\, dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{2k+1}$$

b) Dada la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{2k+1}$, encontrar su radio de convergencia absoluta y también la función h que ella representa.

c) Idem para $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k(2x-1)^k$

Solución:

a) Hacemos $u = \sin(t)$ para llevar la integral a

$$\int_0^1 \frac{du}{1-au^2}$$

Como $|au^2| = |a||u|^2 \leq |a| < 1$ podemos desarrollar

$$\frac{1}{1-au^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (au^2)^n$$

lo cual tras integración término a término da el resultado.

b) Calculemos el intervalo de convergencia

$$\lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|x^4\right| \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{2k+1}{2k+3} = |x|^4 < 1$$

Así, para $|x| < 1$ se tiene que:

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k}}{2k+1} = 1 + \frac{x^4}{3} + \frac{x^8}{5} + \cdots \quad \Big/ \cdot \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{x^2}{2}h(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^{10}}{10} + \cdots \quad \Big/ \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}h(x)\right) = x + x^5 + x^9 + \cdots = x\left(\underbrace{1 + x^4 + x^8 + \cdots}_{\text{serie geométrica}}\right)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}h(x)\right) = \frac{x}{1-x^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \frac{x}{1-x^2}\right)$$

e integrando resulta,

$$\frac{x^2}{2}h(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int_0^x \frac{2u}{1+u^2}\,du - \frac{1}{2}\int_0^x \frac{2u}{1-u^2}\,du\right) = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right)$$

Por lo tanto, obtenemos:

$$h(x) = \frac{1}{2x^2}\ln\left(\frac{1+x^2}{1-x^2}\right), \quad x \neq 0, |x| < 1$$

c)

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |2x-1|\cdot\lim_{k\to\infty}\frac{k+1}{k} = |2x-1| < 1$$

Resolviendo la inecuación se deduce que el intervalo de convergencia absoluta es: $0 < x < 1$. Si $x = 0$, entonces la serie toma la siguiente forma:

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(2\cdot 0-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k(-1)^k$$

, cuyo término general no converge a cero. Por otra parte, si $x = 1$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k(2\cdot 1-1)^k = \sum_{k=1}^{\infty} k$$

que también diverge. Por tanto, el intervalo de convergencia es

$$I = (0,1)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad &\rightarrow \quad \frac{1}{1-(2x-1)} = \frac{1}{2(1-x)} = \sum_{k=0}^{\infty}(2x-1)^k \;\Big/ \frac{d}{dx} \\
&\rightarrow \quad \frac{1}{2(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2x-1)^{k-1} \;\Big/ \cdot(2x-1) \\
&\rightarrow \quad \frac{2x-1}{2(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} 2k(2x-1)^k \;\Big/ : 2 \\
&\rightarrow \quad \frac{2x-1}{4(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} k(2x-1)^k
\end{aligned}$$

Que es lo que se buscaba.

■

(7) Desarrollar la función:

$$\varphi(x) = \frac{1}{3}\left[\ln\left(\frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}}\right) + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{3}}\right]$$

en serie de potencias en torno a $x_0 = 0$. Además, demostrar que la serie alternante:

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \frac{1}{13} - \cdots ,$$

converge y encontrar su valor.

Solución:

Tenemos:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\left[\frac{\sqrt{1-x+x^2}}{1+x}\left(\frac{\sqrt{1-x+x^2}-\dfrac{(x+1)(2x-1)}{2\sqrt{1-x+x^2}}}{1-x+x^2}\right)+\sqrt{3}\frac{1}{1+\dfrac{(2x-1)^2}{3}\dfrac{2}{\sqrt{3}}}\right] \\ &= \frac{1}{3}\left[\frac{2(1-x+x^2)-(x+1)(2x-1)}{2(1+x^3)}+\frac{3}{2(x^2-x+1)}\right] \\ &= \frac{1}{1+x^3} \\ &= 1-x^3+x^6-x^9+x^{12}-\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}, \quad |x|<1 \end{aligned}$$

Luego,

$$f(x)=\int_0^x\left\{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n u^{3n}\right\}du=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{3n+1}}{3n+1}=x-\frac{x^4}{4}+\frac{x^7}{7}-\frac{x^{10}}{10}+\frac{x^{13}}{13}-\cdots$$

Es fácil ver que la serie alternante en cuestión converge por el criterio de Leibniz. Por tanto,

$$f(1)=1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\frac{1}{13}-\cdots=\frac{1}{3}\left[\ln 2+\frac{\pi}{\sqrt{3}}\right]$$

■

(8) *a*) Encuentre la serie de Taylor que converja a $\displaystyle\int_0^1\frac{\sin t}{t}\,dt$ e indique cuántos términos debe sumar como mínimo para que el error cometido en la aproximación sea menor que 10^{-3}.

b) Determinar una representación en serie de potencias de la siguiente función utilizando la integración término a término:

$$\int_0^x\frac{1-e^{-u^2}}{u^2}du$$

Solución:

a) Sabemos que, $\forall t\in\mathbb{R}$,

$$\sin(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\quad\Longrightarrow\quad\frac{\sin(t)}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

Integrando entre 0 y 1 obtenemos,

$$\int_0^1\frac{\sin t}{t}\,dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int_0^1 x^{2n}\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

Como se trata de una serie alternante, el error cometido al aproximar el valor exacto de la serie por la suma infinita

$$\sum_{n=0}^{m} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!}$$

es menor que $\dfrac{1}{(2m+3)(2m+3)!}$. Luego, para obtener la precisión requerida, debemos hallar m tal que

$$\frac{1}{(2m+3)(2m+3)!} < \frac{1}{1000} \qquad \longleftrightarrow \qquad (2m+3)(2m+3)! > 1000$$

Observamos que esto se cumple ya para $m = 2$. Por lo tanto,

$$\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\, dt \approx \sum_{n=0}^{2} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{3\cdot 3!} + \frac{1}{5\cdot 5!} = \frac{1703}{1800}$$

b) Hacemos los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\
e^{-u^2} &= 1 - u^2 + \frac{u^4}{2!} - \frac{u^6}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \\
1 - e^{-u^2} &= u^2 - \frac{u^4}{2!} + \frac{u^6}{3!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{n!} \\
\frac{1 - e^{-u^2}}{u^2} &= 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{3!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2(n-1)}}{n!} \\
\int_0^x \frac{1 - e^{-u^2}}{u^2} du &= x - \frac{x^3}{3\cdot 2!} + \frac{u^5}{5\cdot 3!} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)n!}
\end{aligned}$$

■

(9) Una partícula de masa m está contenida en un pozo de potencial de largo ℓ. La partícula está descrita por su *función de onda*, que satisface la ecuación de Schrödinger

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) = E\psi(x)$$

con la condición de que ψ se anule en los bordes (i.e. $\psi(0) = \psi(\ell) = 0$). Encuentre los valores posibles de la energía $E > 0$.

Solución:

Hagamos el siguiente cambio de variables, $k^2 = \dfrac{2mE}{\hbar^2}$. Así, la ecuación de Schrödinger queda como sigue:

$$\psi'' + k^2\psi = 0$$

Usando series de potencias, proponemos la existencia de ψ de la forma:

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \longrightarrow \quad \psi''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n n(n-1)x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n$$

Así,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2}(n+2)(n+1)x^n + k^2 a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(a_{n+2}(n+1)(n+2) + k^2 a_n\Big)x^n = 0$$

Como la expresión anterior es válida para todo $x \in [0, \ell]$, es claro que:

$$a_{n+2}(n+1)(n+2) + k^2 a_n = 0 \quad \longrightarrow \quad a_{n+2} = \frac{-k^2}{(n+1)(n+2)} a_n$$

y por tanto, dados a_0 y a_1, es posible hallar los coeficientes de índice par e impar respectivamente. Como $\psi(0) = a_0 = 0$, es claro que $a_{2m} \equiv 0$. Ahora, sea $a_1 = C$. Así:

$$\begin{aligned}
a_1 &= C \\
a_3 &= -\frac{k^2}{2\cdot 3} a_1 = -\frac{k^2}{3!} C \\
a_5 &= -\frac{k^2}{4\cdot 5} a_3 = \frac{k^4}{5!} C \\
a_7 &= -\frac{k^2}{6\cdot 7} a_5 = -\frac{k^6}{7!} C \\
&\vdots \\
a_{2m+1} &= \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} k^{2m} C = \frac{C}{k} \frac{(-1)^m k^{2m+1}}{(2m+1)!}
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\psi(x) = \frac{C}{k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n k^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{C}{k} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (kx)^{2n+1}}{(2n+1)!}}_{\sin(kx)}$$

Como $\psi(\ell) = 0$,

$$\frac{C}{k} \sin(k\ell) = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin(k\ell) = 0 \quad \longrightarrow \quad k\ell = n\pi \quad \longrightarrow \quad k_n = \frac{n\pi}{\ell},\ n = 1, 2, 3, \ldots$$

Finalmente, los valores permitidos de la energía son:

$$E_n = \frac{\hbar^2 {k_n}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2m\ell^2}$$

y la energía está **cuantizada**. ■

(10) [**Propuesto**]

a) Mediante integración, demuestre que:

$$\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}$$

b) Demuestre que

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{\pi^2}{8} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

c) Considerando que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$

Demuestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Solución:

a) Si hacemos el siguiente cambio de variables, $1-x^2=u$, obtendremos

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \int_0^1 \frac{x^{2^n}}{\sqrt{1-x^2}}x\ dx \\ &= -\frac{1}{2}\int_1^0 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-u)^n}{\sqrt{u}}du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-u)^n u^{-1/2}\ du\end{aligned}$$

Si observamos con cuidado, reconoceremos a la integral anterior como la función Beta de Euler $\mathcal{B}(1/2, n+1)$. Utilizando las propiedades de dicha función,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{1}{2}\mathcal{B}(1/2, n+1) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(n+1)}{\Gamma(3/2+n)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{n!}{\Gamma(3/2+n)}\end{aligned}$$

Recordando que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, notamos que

$$\begin{aligned}\Gamma(3/2+n) &= (1/2+n)\Gamma(1/2+n) \\ \Gamma(1/2+n) &= (1/2+n-1)\Gamma(1/2+n-1) \\ \therefore\ \Gamma(3/2+n) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdots\left(\frac{2j+1}{2}\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+n\right)\Gamma(1/2) \\ &= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2^{n+1}}\sqrt{\pi}\end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\frac{n!}{\Gamma(3/2+n)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot\frac{n!}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{n+1}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \\ &= \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}\end{aligned}$$

Que es lo que se buscaba.

b) Sea $u = \arcsin x$, $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. Así,

$$\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int_0^{\pi/2} u\ du = \frac{u^2}{2}\bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Lo que demuestra la primera igualdad. Para la segunda, utilizaremos el desarrollo en serie del arcoseno:

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-1/2}{n}\int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{1-x^2}}\ dx \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\binom{-1/2}{n}\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\frac{(-1)^n(1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1))}{n!\ 2^n}\frac{n!\ 2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = 1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots\end{aligned}$$

Lo que demuestra la segunda igualdad.

c) Sabemos que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. Ahora,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

O sea,

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad\Longrightarrow\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^2}{6}$$

■

Apéndice a la sección

- *Sobre convergencia uniforme y el Test-M*

La definición formal de convergencia uniforme está referida a cualquier espacio métrico (Y, d), pero en este apartado trataremos solo el caso de sucesiones en $\mathbb{R}$ con la métrica euclidiana usual.

Definición: Supongamos que $f_n : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una sucesión de funciones. La sucesión $\{f_n\}$ se dice convergente uniforme si

$$\sup_{x \in A} |f_n(x) - f(x)| \to \quad si\ n \to \infty$$

Si recordamos la definición usual de convergencia para cada x por separado notaremos que, dado $\varepsilon > 0$, existe $N = N(\varepsilon, x)$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$. Esto implica que, en principio, para cada punto deberemos encontrar un N que depende de dónde estamos (el valor de x) y de la diferencia máxima requerida (ε). La convergencia es uniforme si y solo si es posible escoger $N = N(\varepsilon)$ *independiente* del punto x tal que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{para todo } n \geq N \text{ y todo } x \in A$$

Si $f_n \to f$ uniformemente en A, el gráfico de $y = f_n(x)$ para todo n mayor que $N(\varepsilon)$ yace dentro de la franja de los puntos (x, y) del plano entre las curvas $y = f(x) + \varepsilon$ e $y = f(x) - \varepsilon$. El hecho de que la presencia de convergencia puntual no implique convergencia uniforme significa que la cercanía entre $f_n(x)$ y $f(x)$ para cada x individual no implica la cercanía "global" del la curva $y = f_n(x)$ a la curva $y = f(x)$.

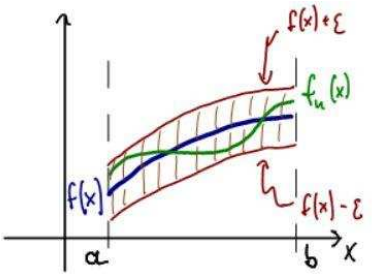


Figura 3.4: *Ejemplo de convergencia uniforme.*

Tomemos por ejemplo la sucesión $f_n(x) = \dfrac{nx}{n+x}$ para $x \geq 0$. Notemos que $f_n(x) \to x$. Ahora, $f_n(x) - f(x) = -\dfrac{x^2}{n+x}$. En cualquier intervalo *finito*, digamos $[0, a]$,

$$\sup_{0 \leq x \leq a} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{a^2}{n} \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

y con ello $f_n \to f$ uniformemente en $[0, a]$.

Supongamos, de todos modos, que x es libre de tomar cualquier valor en $[0, \infty)$. Dado que

$$\sup_{0 \leq x} |f_n(x) - f(x)| = \infty$$

y la convergencia es no uniforme en el intervalo infinito $[0, \infty)$.

Ahora bien, ¿qué ganamos al asegurar convergencia uniforme? Entre las propiedades aseguradas por dicha condición, destacan los siguientes teoremas:

1. **Teorema.** Sea la sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ que converge uniformemente a f en A. Si c es un punto de A en el cual f_n es continua, entonces f es continua en c.
2. **Teorema.** Sea la $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales integrables en $[a, b]$. Si $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente a f en $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f_n \to \int_a^b f$.

El Test-M posee una relación íntima con la convergencia uniforme, dado que señala: *Sean las funciones a_1, a_2, ..., a_n en $A \subset \mathbb{R}$. Si, para cada n, existe una constante real M_n tal que*

$$|a_n(x)| \leq M_n$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge (absolutamente y) uniformemente en A.

Demostración. Sea $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Dado que $\sum M_n$ converge, dado $\varepsilon > 0$, existe un n_0 tal que

$$M_{n+1} + \cdots + M_m < \varepsilon \quad \text{cuando } m > n \geq n_0$$

Por lo tanto, para $m > n \geq n_0$,

$$\sup_{x \in A} |s_m(x) - s_n(x)| \leq M_{n+1} + \cdots + M_m < \varepsilon$$

Con ello, $\sum a_n$ converge uniformemente en A.

Para mayores detalles acerca de este tópico, se sugiere revisar

[1] Burkill, J.C. and Burkill, H., *A Second Course in Mathematical Analysis*. Cambridge Mathematical Library, chap. 5, (1970).

- *Sobre el radio de convergencia en series de potencia*

El radio de convergencia de una serie de potencias es una cantidad, ya sea un número real no negativo infinito, que representa el dominio en el cual la serie convergerá. El radio de convergencia también puede ser caracterizado por el siguiente teorema:

El radio de convergencia de una serie de potencia f centrada en un punto a es igual a la distancia desde a al punto más cercano donde f se indefine.

Veamos el caso de la función

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

desarrollada en torno a $x_0 = 0$ y con radio de convergencia igual a 1, de acuerdo a los ejercicios anteriores. Esta función se indefine en $x = 1$ y es de variable real, por lo que la distancia en cuestión es simplemente $R = |x - x_0| = 1$, que es justamente lo calculado anteriormente.

Analicemos ahora la función

$$g(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - \cdots$$

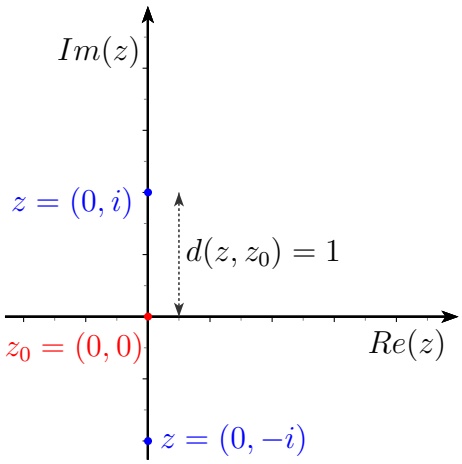
De acuerdo a la fórmula clásica para calcular radios de convergencia tenemos:

$$R_g = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(-1)^n} \right|} = 1$$

¿Qué ocurrió aquí? Aparentemente la función g no tiene problemas de discontinuidad, por lo que debiese tener un radio infinito de convergencia. La razón radica en que el teorema anterior está orientado a funciones de variable compleja. Si tomamos ahora

$$g(z) = \frac{1}{1+z^2}, \quad z \in \mathbb{C}$$

entonces veremos que dicha función tiene problemas en $z = \pm\, i$. Si analizamos el plano complejo

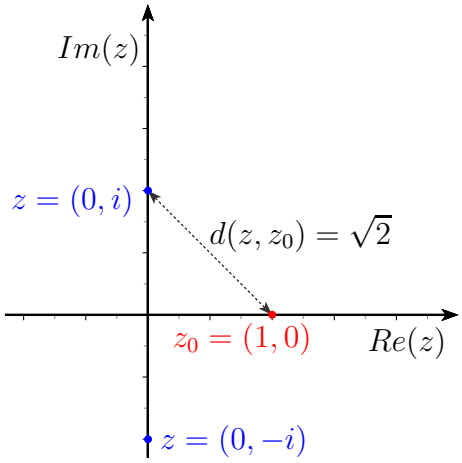


notaremos que dichos puntos están a distancia 1 del origen, lo que es consistente con el radio antes calculado.

Un último ejemplo para ejemplificar este concepto es el siguiente. Tomemos la misma función g, desarrollada en torno a $z_0 = 1$

$$g(z) = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{8}(x-1)^4 + \cdots$$

Deseamos calcular su radio de convergencia, sin recurrir a su término $n-$ésimo. Nuevamente, analicemos el plano complejo



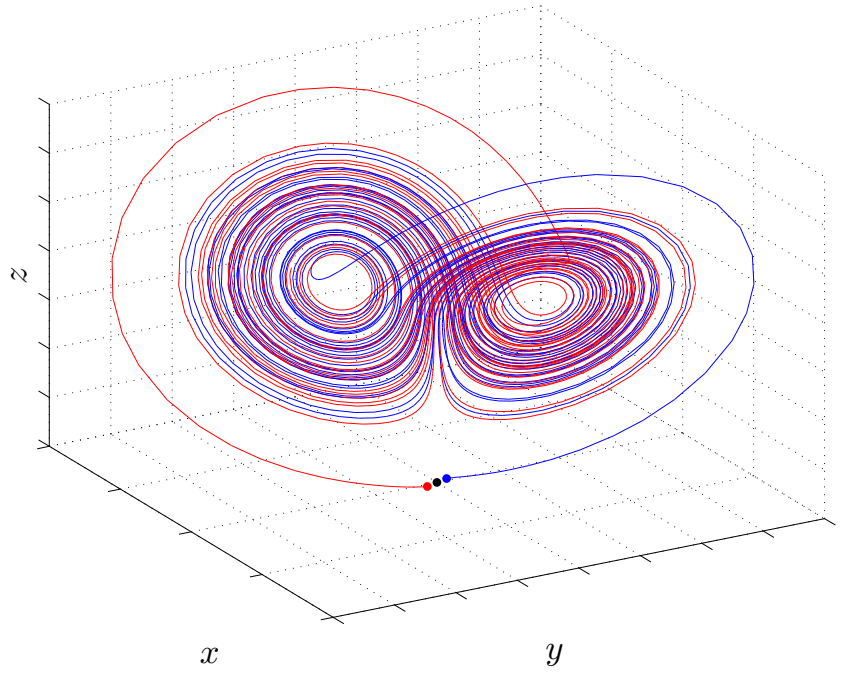
notaremos que la distancia entre los polos y el punto de desarrollo es:

$$d(z, z_0) = \|(-1, i)\| = \sqrt{(-1, i) \cdot (-1, -i)} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

y por tanto, el nuevo radio de convergencia $R = \sqrt{2}$.

4 Geometría vectorial

Atractor de Lorenz (Edward Lorenz, 1963)



Geometría euclidiana en el espacio

I.i. Vectores geométricos

(1) *a*) Hallar el lugar geométrico de los puntos $P \in \mathbb{R}^2$ que equidistan de los puntos $A(2,3)$ y $B(-4,-1)$.

b) Siendo M y N los puntos medios de los trazos AB y CD, respectivamente, demostrar las siguientes igualdades:

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{MN} \qquad \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{MN}$$

c) Demostrar que el punto G es el centro de gravedad de un triángulo $\triangle ABC$ si y solo si $\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}$

Solución:

a) Si el punto P tiene coordenadas (x, y), entonces la condición $\overline{PA} = \overline{PB}$ nos dice que:

$$\sqrt{(3-y)^2 + (2-x)^2} = \sqrt{(-1+y)^2 + (-4-x)^2}$$

luego,

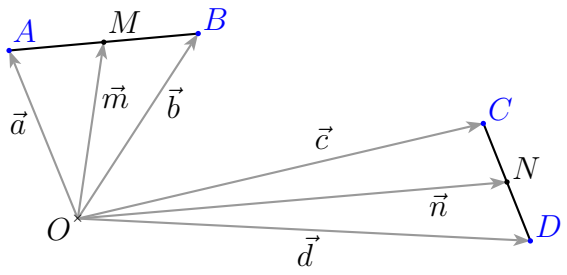
$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 + 8x + 16 + y^2 + 2y + 1$$

de donde:

$$3x + 2y + 1 = 0$$

Es decir, el lugar geométrico es una recta.

b) Realicemos un esquema de la situación:



Por construcción, sabemos que $\vec{m} = \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)$ y $\vec{n} = \frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right)$.

Luego, $\overrightarrow{AC} = \vec{c} - \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{d} - \vec{b}$ y por tanto:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} &= \vec{c} - \vec{a} + \vec{d} - \vec{b} = \vec{c} + \vec{d} - \left(\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= 2\left[\frac{1}{2}\left(\vec{c} + \vec{d}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right] \\ &= 2\left(\vec{n} - \vec{m}\right) = 2\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Para la segunda igualdad,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} &= \vec{c} - \vec{a} + \vec{d} - \vec{b} + \vec{d} - \vec{a} + \vec{c} - \vec{b} \\ &= 2\left(\vec{c} + \vec{d}\right) - 2\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \\ &= 4\left(\vec{n} - \vec{m}\right) = 4\overrightarrow{MN}\end{aligned}$$

Que es lo que se buscaba demostrar.

c) Si G es el centro de gravedad del triángulo, entonces $\vec{g} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right)$. Así,

$$\begin{aligned}\vec{g} = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}\right) &\leftrightarrow 3\vec{g} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \\ &\leftrightarrow \vec{g} - \vec{a} + \vec{g} - \vec{b} + \vec{g} - \vec{c} = \vec{0} \\ &\leftrightarrow \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \vec{0}\end{aligned}$$

■

(2) *a*) Sea $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ un conjunto de vectores en $\mathbb{R}^n$ linealmente independientes. Establezca condiciones sobre a y b de modo tal que el conjunto $\{av_1 + bv_2, v_2, \ldots, v_m\}$ también sea linealmente independiente.

b) Sean $\vec{u},\ \vec{v}$ vectores en $\mathbb{R}^n$ tales que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 4$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2$. Sea $\vec{a} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$ tal que $\vec{a} \cdot \vec{u} = -2,\ \vec{a} \cdot \vec{v} = 2$. Calcule $\|a\|$.

c) Determine los valores de a para los cuales el vector $\vec{u} = (a, a)$ es combinación lineal convexa de los vectores $(-1, 2),\ (2, 0),\ (1, 1)$.

Solución:

a) Sea $S = \{av_1 + bv_2, v_2, \ldots, v_m\}$

$*$ Si $a = b = 0$
$S = \{0, v_2, \ldots, v_m\}$. Por tanto, S es L.D. pues $\vec{0} \in S$.

$*$ Si $a = 0,\ b \neq 0$
S es L.D. pues $\vec{0} = bv_2 + (-b)v_2 + \cdots + 0v_n$.

$*$ Si $a \neq 0$
Sean $\{\alpha_i\}$ tales que

$$\alpha_1(av_1 + bv_2) + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_m v_m = \vec{0}$$
$$a\alpha_1 v_1 + (\alpha_1 b + \alpha_2)v_2 + \alpha_3 v_3 + \cdots + \alpha_m v_m = \vec{0}$$

Pero $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ es L.I. Luego,

$$a\alpha_1 = \alpha_1 b + \alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_m$$

Como $a \neq 0$,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0 \qquad \therefore\ S \text{ es L.I.}$$

Así, con $a \neq 0$ y b libre se cumple lo pedido.

b) Si $\vec{a} \in \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$, entonces existen reales α, β tales que $\vec{a} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Realizando producto punto con $\vec{u}$ y $\vec{v}$ obtenemos, respectivamente:

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{u}) + \beta\,(\vec{v} \cdot \vec{u}) \quad \longrightarrow \quad -2 = 4\alpha - 2\beta \quad \longrightarrow \quad 2\alpha - \beta + 1 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = \alpha\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) + \beta\,(\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad \longrightarrow \quad 2 = -2\alpha + 16\beta \quad \longrightarrow \quad \alpha - 8\beta + 1 = 0$$

Resolviendo el sistema,

$$\alpha = -\frac{7}{15}, \quad \beta = \frac{1}{15}$$

Como $\|\vec{a}\|^2 = \alpha^2\ \vec{u} \cdot \vec{u} + \beta^2\ \vec{v} \cdot \vec{v} + 2\alpha\beta\ \vec{u} \cdot \vec{v}$, es claro que

$$\|\vec{a}\| = \frac{\sqrt{240}}{15}$$

c) Se pide que:

$$\begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $x + y + z = 1,\ x, y, z \geq 0$.
Tenemos entonces un sistema de ecuaciones para x, y, z en función de a. Resolvemos (en este caso utilizaremos Eliminación de Gauss):

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 1 & a \\ 2 & 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2-2a \\ 0 & 1 & 0 & 3-3a \\ 0 & 0 & 1 & 5a-4 \end{array}\right]$$

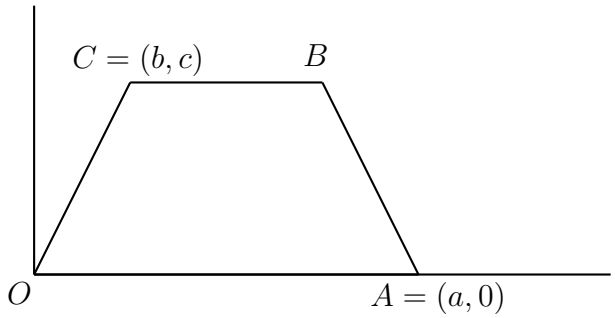
Como requerimos que $x, y, z \geq 0$, entonces:

$$\begin{aligned} x = 2 - 2a \geq 0 &\longrightarrow a \leq 1 \\ y = 3 - 3a \geq 0 &\longrightarrow a \leq 1 \\ z = 5a - 4 \geq 0 &\longrightarrow a \geq \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Y con ello $\frac{4}{5} \leq a \leq 1$.

■

(3) Sea $OABC$ un trapecio isósceles con vértice O en el origen, como en la figura.



a) Escriba $\overrightarrow{AB}$ como combinación lineal de $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

b) Determine el punto M sobre el lado BC que lo divide en razón $CM : MB = 2 : 1$.

c) Escriba las ecuaciones vectoriales de las rectas L_{OM} y L_{AC} para determinar su punto de intersección P. ¿En qué proporción divide P a la diagonal AC?

Solución:

a) Identifiquemos a los vectores en cuestión. A partir de la información en la figura, es claro que $\overrightarrow{OA} = (a, 0)$ y $\overrightarrow{OC} = (b, c)$. Ahora, dado que la figura se trata de un trapecio isósceles, debe cumplirse que el punto B esté a la misma altura que C, medida desde el eje X, y que la distancia entre O y C sea igual a la existente entre B y A, medida en el eje Y. Por tanto, $\overrightarrow{OB} = (a - b, c)$ y con ello $\overrightarrow{AB} = (-b, c)$.

De este modo, buscamos resolver s, t tales que:

$$(-b, c) = s(a, 0) + t(b, c)$$

Álgebra simple da $t = 1$ y $s = -\dfrac{2b}{a}$.

b) Como M divide al lado BC en la razón $CM : MB = 2 : 1$ entonces, $\overrightarrow{OM}$ es una combinación convexa entre $\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}$ de modo tal que:

$$\overrightarrow{OM} = \alpha\ \overrightarrow{OC} + (1-\alpha)\ \overrightarrow{OB}$$

Entonces,

$$\frac{d(C,M)}{d(M,B)} = \frac{\left\|\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM}\right\|}{\left\|\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{\left\|(1-\alpha)\ \overrightarrow{OC} - (1-\alpha)\ \overrightarrow{OB}\right\|}{\left\|\alpha\ \overrightarrow{OC} - \alpha\ \overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{1-\alpha}{\alpha} = 2$$

Por tanto, $\alpha = \dfrac{1}{3}$. Así,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= \frac{2}{3}\ \overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\ \overrightarrow{OC} \\ &= \frac{2}{3}(a-b,c) + \frac{1}{3}(b,c) = \left(\frac{2a-b}{3}, c\right)\end{aligned}$$

c) Es claro que:

$$L_{OM}: \quad \vec{p} = \lambda\ \overrightarrow{OM} = \lambda\left(\frac{2a-b}{3}, c\right)$$

$$L_{AC}: \quad \vec{p} = \overrightarrow{OA} + \mu\ \overrightarrow{AC} = (a,0) + \mu(b-a,c)$$

Buscamos

$$\lambda\left(\frac{2a-b}{3}, c\right) = (a,0) + \mu(b-a,c)$$

lo cual se traduce en el sistema

$$\lambda\left(\frac{2a-b}{3}\right) = a + \mu(b-a) \qquad , \qquad \lambda\ c = \mu\ c$$

De esto se tiene $\lambda = \mu = \dfrac{3a}{5a-4b}$. La proporción en que P divide a AC es:

$$\frac{AP}{PC} = \frac{\mu}{1-\mu} = \frac{3a}{2a-4b}$$

■

I.ii. Productos vectoriales

(1) *a*) Dado los vectores $\vec{a} = (1,-1,0)$, $\vec{b} = (1,1,-4)$ y $\vec{c} = (1,4,-1)$, determine un vector de norma $\sqrt{2}$ que forme ángulos iguales con ellos, indicando el valor común del ángulo.

b) Sean $\vec{a}$, $\vec{b}$ dos vectores no nulos en $\mathbb{R}^3$. Demuestre que todos los vectores $\vec{r} \in \mathbb{R}^3$ que verifican la ecuación $(\vec{r} - \vec{a}) \cdot (\vec{r} - \vec{b}) = 0$ forman un esfera. Halle su centro y su radio.

c) Demuestre que el volumen V del tetraedro de vértices $O(\vec{0}),\ A(\vec{a}),\ B(\vec{b}),\ C(\vec{c})$ es:

$$V = \frac{\left|\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\right|}{6}$$

Solución:

a) Sean $\{\theta_i\}$ los ángulos existentes entre el vector $\vec{r}$ y los vectores $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$. Buscamos que $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, con lo que se hace evidente que $\cos\theta_1 = \cos\theta_2 = \cos\theta_3$. Así,

$$\frac{\vec{a}\cdot\vec{r}}{\|\vec{a}\|\|\vec{r}\|} = \frac{\vec{b}\cdot\vec{r}}{\|\vec{b}\|\|\vec{r}\|} = \frac{\vec{c}\cdot\vec{r}}{\|\vec{c}\|\|\vec{r}\|}$$

Si $\vec{r} = (x, y, z)$, y recordando que $\|\vec{a}\| = \sqrt{2},\ \|\vec{b}\| = \|\vec{c}\| = 3\sqrt{2}$, tenemos que:

$$\frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x+y-4z}{3\sqrt{2}} = \frac{x+4y-z}{3\sqrt{2}} \longrightarrow 3x-3y = x+y-4z = x+4y-z$$

Se ha formado el siguiente sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 3x-3y = x+y-4z \\ x+y-4z = x+4y-z \\ 3x-3y = x+4y-z \end{array}\right\} \vec{r} = (-4z, -z, z)$$

Pero $\|\vec{r}\| = \sqrt{2} \longleftrightarrow (16z^2 + z^2 + z^2) = 2 \longleftrightarrow z = \pm\dfrac{1}{3}$. Finalmente, un vector que cumple es:

$$\vec{r} = (4/3,\ 1/3,\ -1/3)$$

b) La ecuación es equivalente a

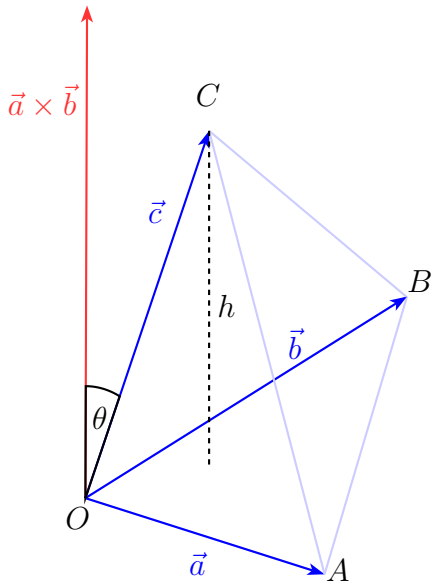
$$(\vec{r}-\vec{a})\cdot(\vec{r}-\vec{b}) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad \vec{r}\cdot\vec{r} - \vec{r}\cdot\left(\vec{a}+\vec{b}\right) + \vec{a}\cdot\vec{b}$$

Completando cuadrados obtenemos,

$$\begin{aligned} \vec{r}\cdot\vec{r} - 2\vec{r}\cdot\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) + \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) &= \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\cdot\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right) - \vec{a}\cdot\vec{b} \\ \left\|\vec{r} - \left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)\right\|^2 &= \left\|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right\|^2 \end{aligned}$$

Lo que representa una esfera de centro $\left(\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}\right)$ y radio $\left\|\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right\|$.

c) Por geometría, sabemos que el volumen del tetraedro en cuestión es simplemente $V = \dfrac{1}{3}A_0 h$, con A_0 el área basal y h la altura respectiva.



Tomaremos como base el triángulo OAB. Así, $A_0 = \frac{1}{2}\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|$. Si analizamos la figura, o recurrimos a argumentos geométricos, notaremos que la altura del cuerpo corresponde a la proyección del vértice C sobre el vector ortogonal a la base; i. e:

$$h = \|proy_{a\times b}\ \vec{c}\| = comp_{a\times b}\ \vec{c} = \|\vec{c}\|\cos\theta$$

De modo tal que dicha cantidad sea positiva. Por tanto, se cumple que

$$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left\|\vec{a}\times\vec{b}\right\|\cdot\|\vec{c}\|\cos\theta = \frac{1}{6}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right| = \frac{\left|\left[\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right]\right|}{6}$$

■

(2) *a*) Probar que $[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{b}+\vec{c}),(\vec{c}+\vec{a})] = 2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.

b) Sean $\vec{u},\ \vec{v}\in\mathbb{R}^3$ vectores ortogonales con $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$ y $\|\vec{v}\| = 1$. Calcule $\|(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})\|$

c) Calcule $\vec{a}\times\{(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})\}$.

Solución:

a) Por distributividad del producto cruz, y recordando que $\vec{u}\times\vec{v}\cdot\vec{u} = 0$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
[(\vec{a}+\vec{b}),(\vec{b}+\vec{c}),(\vec{c}+\vec{a})] &= (\vec{a}+\vec{b})\times(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{c}+\vec{a}) \\
&= \left\{(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})+(\vec{b}\times\vec{b})+(\vec{b}\times\vec{c})\right\}\cdot(\vec{c}+\vec{a}) \\
&= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} \\
&= 2(\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}) = 2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]
\end{aligned}$$

b) Notemos que:

$$(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v}) = (\vec{u}\times\vec{u}) - (\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{v}\times\vec{u}) - (\vec{v}\times\vec{v}) = 2\ \vec{u}\times\vec{v}$$

Por tanto, y dado que los vectores son ortogonales entre sí,

$$\|(\vec{u}+\vec{v})\times(\vec{u}-\vec{v})\| = 2\|\vec{u}\times\vec{v}\| = 2\ \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin(\pi/2) = 2\sqrt{3}$$

c) Sea $\vec{u} = (\vec{a}\times\vec{b})$, $\vec{v} = (\vec{a}\times\vec{c})$. Recordamos la fórmula del doble producto vectorial:

$$\vec{a}\times(\vec{u}\times\vec{v}) = (\vec{a}\cdot\vec{v})\vec{u} - (\vec{a}\cdot\vec{u})\vec{v}$$

Dado que $\vec{u}, \vec{v} \perp \vec{a}$, es claro que

$$\vec{a}\times\{(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c})\} = 0$$

■

(3) Dados los vectores $\vec{a} = (-1,1,1)$, $\vec{b} = (1,-1,1)$, $\vec{c} = (1,1,-1)$. Construya una base ortonormal a partir de ellos utilizando el proceso de Gramm - Schmidt.

Solución:

Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, Por G-S tenemos:

$$\vec{v}_1 = \vec{a} = (-1,1,1)$$

Ahora,

$$\vec{v}_2 = \vec{b} - \frac{\vec{v}_1\cdot\vec{a}}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\ \vec{v}_1 = (1,-1,1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) = \frac{2}{3}(1,-1,2)$$

Por último,

$$\vec{v}_3 = \vec{c} - \frac{\vec{v}_1\cdot\vec{c}}{\vec{v}_1\cdot\vec{v}_1}\ \vec{v}_1 - \frac{\vec{v}_2\cdot\vec{c}}{\vec{v}_2\cdot\vec{v}_2}\ \vec{v}_2 = (1,1,-1) + \frac{1}{3}(-1,1,1) - \frac{1}{3}(1,-1,2) = (1,1,0)$$

Finalmente, normalizamos cada vector para obtener así la siguiente base ortonormal:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

■

(4) **[Propuesto]** Demuestre la Desigualdad de Cauchy-Schwarz

$$|\vec{x}\cdot\vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$$

con igualdad si y solo si $\{\vec{x}, \vec{y}\}$ es un conjunto linealmente dependiente.

Solución:

La demostración es trivial si alguno de los vectores es nulo. Supongamos que $\vec{x}, \vec{y} \neq \vec{0}$ Formamos la siguiente parábola:

$$\begin{aligned} P(t) &= \|\vec{x} + t\ \vec{y}\|^2\,,\ t \in \mathbb{R} \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \|t\ \vec{y}\|^2 + 2t\ \vec{x} \cdot \vec{y} \geq 0 \end{aligned}$$

Pero $\|\alpha\ \vec{x}\| = |\alpha|\ \ \vec{x}$. Por tanto, $\|t\ \vec{y}\|^2 = |t|^2 \|\vec{y}\|^2 = t^2 \|\vec{y}\|^2$. Con ello,

$$P(t) = t^2 \|\vec{y}\|^2 + 2t\ \vec{x} \cdot \vec{y} + \|\vec{x}\|^2$$

Dado que tenemos una parábola en t, buscamos su vértice $t^* = -\dfrac{2\ \vec{x} \cdot \vec{y}}{2\ \|\vec{y}\|^2}$

Sabemos que

$$\begin{aligned} P(t^*) &= \|\vec{x}\|^2 + \|t^*\ \vec{y}\|^2 + 2t^*\ \vec{x} \cdot \vec{y} \\ &= \|\vec{x}\|^2 + \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2} - 2\frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2}\ \geq\ 0 \\ &= \|\vec{x}\|^2 - \frac{(\vec{x} \cdot \vec{y})^2}{\|\vec{y}\|^2}\ \geq\ 0 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\|\vec{x}\|^2\ \|\vec{y}\|^2 \geq (\vec{x} \cdot \vec{y})^2 \qquad \longrightarrow \qquad |\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$$

Si $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son linealmente dependientes, existe algún $a \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{y} = a\ \vec{x}$. Entonces

$$\begin{aligned} |\vec{x} \cdot \vec{y}| &= |\vec{x} \cdot a\vec{x}| \\ &= |a|\ \ |\vec{x} \cdot \vec{x}| = |a| \sqrt{(\vec{x} \cdot \vec{x})^2} \\ &= |a|\ \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\ \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}} \\ &= \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\ \sqrt{a\vec{x} \cdot a\vec{x}} \\ &= \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\| \end{aligned}$$

Ahora, si $|\vec{x} \cdot \vec{y}| = \|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|$, entonces el ángulo entre ambos vectores satisface que:

$$\cos\theta = \frac{|\vec{x} \cdot \vec{y}|}{\|\vec{x}\|\ \|\vec{y}\|} = 1 \longleftrightarrow \theta = 0, \pi$$

En ambos casos, $\vec{x}, \vec{y}$ son paralelos, i.e. existe un $a \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{x} = a\vec{y}$ que es, justamente, la definición de dependencia lineal.

■

I.iii. Rectas y planos

(1) *a*) Determine si las rectas

$$\vec{p}\times(1,2,-1)=(2,0,2) \quad , \quad \vec{p}=(3,0,1)+t(-1,1,1)$$

son paralelas, se intersecan o son alabeadas. Calcule su distancia.

b) Sean $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ vectores en el espacio tales que $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$. Dadas las ecuaciones $\vec{r}\times\vec{a}=\vec{b}$, $\vec{r}\times\vec{c}=\vec{d}$ que representan rectas coplanarias y no paralelas, encuentre el vector posición del punto de intersección de éstas.

Solución:

a) Lo primero que notamos es que $(1,0,-1)\times(1,2,-1)=(2,0,2)$, y dicho punto pertenece a la primera recta. Así, los respectivos vectores directores y vectores afines son:

$$\vec{d_1}=(1,2,-1) \quad , \quad \vec{p_1}=(1,0,-1)$$

$$\vec{d_2}=(-1,1,1) \quad , \quad \vec{p_2}=(3,0,1)$$

Ahora,

$$\vec{d_1}\times\vec{d_2}=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\hat{\imath}+3\hat{k}=(3,0,3)\neq\vec{0}$$

Por lo tanto, las rectas no son paralelas. Analicemos $[(p_1-p_2),d_1,d_2]$:

$$\vec{p_1}-\vec{p_2}=(-2,0,-2)\longrightarrow(-2,0,-2)\cdot(3,0,3)=-12\neq 0$$

y las rectas son alabeadas. Entonces, la distancia entre ellas es:

$$d(L_1,L_2)=\frac{\left|[(\vec{p_1}-\vec{p_2}),\vec{d_1},\vec{d_2}]\right|}{\left\|\vec{d_1}\times\vec{d_2}\right\|}=\frac{12}{\sqrt{18}}=2\sqrt{2}$$

b) Sea $\vec{r_0}$ el punto de intersección entre ambas rectas. Recordando que $\vec{r_0}\perp\vec{b},\vec{d}$, tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{b}\times\vec{d} &= \vec{b}\times(\vec{r_0}\times\vec{c}) \\ (\vec{b}\times\vec{c})\vec{r_0}-(\vec{b}\times\vec{r_0})\vec{c} &= \vec{b}\times\vec{d} \end{aligned}$$

Pero, $\vec{b}\cdot\vec{r_0}=0$ y $\vec{b}\cdot\vec{c}\neq 0$. Así, $\qquad \vec{r_0}=\dfrac{\vec{b}\times\vec{d}}{\vec{b}\cdot\vec{c}}$

■

(2) *a*) Determinar la ecuación vectorial de la recta L_1 que se obtiene al proyectar la recta

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{4}$$

sobre el plano $\mathcal{P}: \ x + 2y + z = 6$.

b) Determine la ecuación vectorial de una recta L_2 contenida en el plano $\mathcal{P}$ que sea perpendicular a L_1.

Solución:

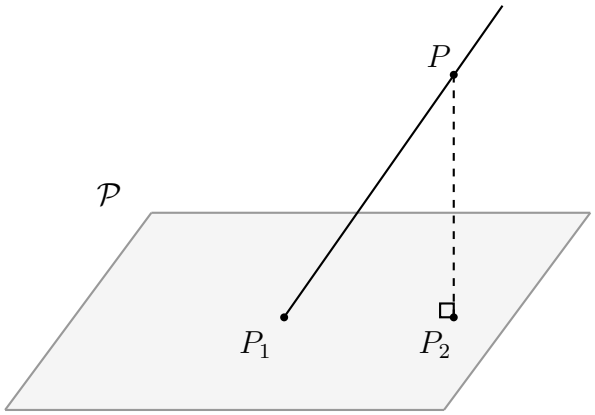
a) La recta que se desea proyectar es la siguiente:

$$(x, y, z) = (1, -1, 3) + s(2, -1, 4)$$

Para determinar la proyección, encontramos el punto de intersección entre recta y plano:

$$(1 + 2s) + 2(-1 - s) + (3 + 4s) = 6 \quad \longrightarrow \quad 2 + 4s = 6 \quad \longrightarrow \quad s = 1$$

De este modo, $P_1 = (3, -2, 7)$ es el punto de intersección. Ahora, dado que $P = (1, -1, 3) \notin \mathcal{P}$, proyectaremos dicho punto para obtener así la ecuación de la recta proyectada.



El punto P pertenece a una recta normal al plano, que corta al mismo en la proyección de P. Denotemos a dicha recta como $\tilde{L}$:

$$\tilde{L}: \quad (x, y, z) = (1, -1, 3) + t\underbrace{(1, 2, 1)}_{\text{normal}}$$

Buscamos el punto de corte P_2:

$$(1 + t) + 2(-1 + 2t) + (3 + t) = 6 \quad \longrightarrow \quad t = \frac{2}{3}$$

Con ello, $P_2 = (5/3, 1/3, 11/3)$ y la recta proyectada tiene por director al vector

$$\vec{d} = (3, -2, 7) - (5/3, 1/3, 11/3) = (4/3, -7/3, 10/3)$$

Finalmente, se tiene que:

$$L_1: \quad (3, -2, 7) + t(4, -7, 10)$$

b) Dado que $L_1 \perp L_2$, se tiene que

$$\vec{d_1} \perp \vec{d_2} \longrightarrow (4,-7,10)\cdot(x,y,z) = 0 \longrightarrow 4x - 7y + 10z = 0$$

Así, cualquier director que cumpla la condición anterior será perpendicular. Pero, como $L_2 \subset \mathcal{P}$, se tiene adicionalmente que

$$(x,y,z)\cdot\vec{n} = 0 \longrightarrow x + 2y + z = 0$$

Resolviendo el sistema, se obtiene

$$\left.\begin{array}{c} 4x - 7y + 10z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad \vec{d_2} = (-9z/5, 2z/5, z)$$

Por lo tanto,

$$L_2: \quad (3,-2,7) + \tau(-9,2,5)$$

■

(3) *a*) Encuentre la ecuación del plano $\mathcal{P}$ que contiene el origen y las proyecciones del punto $\vec{r}_0 = (2,3,6)$ sobre los planos $y = 0$ y $z = 0$.

b) Encuentre el ángulo que forma plano $\mathcal{P}$ (encontrado en la parte anterior) con el vector $\vec{r}_0$.

Solución:

a) Las proyecciones del punto $\vec{r}_0$ sobre los planos $y = 0$ y $z = 0$ están dadas, respectivamente, por

$$\vec{p}_1 = (2,0,6) \qquad \text{y} \qquad \vec{p}_2 = (2,3,0)$$

Por lo tanto, dos direcciones linealmente independientes sobre el plano son $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ y una normal al plano requerido es $\vec{n} = \vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = 6(-3,2,1)$.
Por lo tanto, la ecuación del plano está dada por

$$\mathcal{P}: \quad -3x + 2y + z = 0$$

b) El ángulo θ formado por $\vec{r}_0$ y la normal del plano está dado por

$$\cos\theta = \frac{(-3,2,1)\cdot(2,3,6)}{\|(-3,2,1)\|\ \|(2,3,6)\|} = \frac{6}{7\sqrt{14}}$$

Por lo tanto, el ángulo ϕ entre $\vec{r}_0$ plano está dado por

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{6}{7\sqrt{14}}\right)$$

■

(4) Dadas las dos rectas

$$L_1: \quad x = 2t - 1,\ y = t + 4,\ z = -2t - 4$$
$$L_2: \quad x = 5t + 5,\ y = 3t + 5,\ z = -4t - 5$$

Demuestre que estas rectas se cruzan. Determine la distancia entre ellas y las ecuaciones del plano que contiene a L_1 y es paralelo a L_2.

Solución:

Reescribimos ambas rectas en su forma vectorial:

$$L_1: \quad \vec{p} = \underbrace{(-1, 4, -4)}_{\vec{p}_1} + t\,\underbrace{(2, 1, -2)}_{\vec{d}_1}$$
$$L_2: \quad \vec{p} = \underbrace{(5, 5, -5)}_{\vec{p}_2} + t\,\underbrace{(5, 3, -4)}_{\vec{d}_2}$$

Notemos que no existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{d}_1 = \lambda\,\vec{d}_2$. Por tanto, ambas rectas no son paralelas; pueden ser alabeadas o interceptarse.

Calculamos el siguiente producto:

$$(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2) = (6, 1, -1) \cdot (2, -2, 1) = 9$$

Como dicho producto es distinto de cero, entonces ambas rectas son alabeadas (se cruzan). Ahora,

$$d(L_1, L_2) = \frac{(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \cdot (\vec{d}_1 \times \vec{d}_2)}{\left\|\vec{d}_1 \times \vec{d}_2\right\|} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$$

Por otra parte, si $L_1 \subset \Pi$ y además se cumple que $\Pi \parallel L_2$, entonces sus vectores generadores corresponden a $\vec{d}_1$ y $\vec{d}_2$, y su vector afín es $\vec{p}_1$. Así,

$$\Pi: \quad \vec{p} = (-1, 4, -4) + t(2, 1, -2) + s(5, 3, -4)$$

Gráficamente,

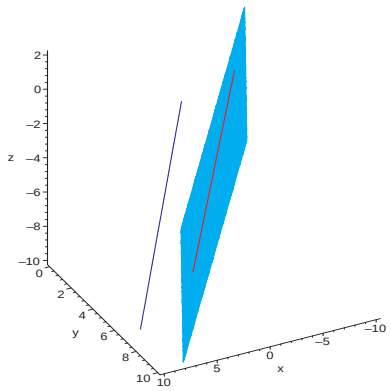


Figura 4.1: En la figura, L_1, L_2 y el plano Π.

■

(5) Determinar los valores de a, b de modo que la recta

$$\frac{x-b}{a} = \frac{y-b+1}{2a} = \frac{z-3b+1}{2}$$

sea paralela al plano $2x + y - 2z = 5$ y esté a distancia $\sqrt{2}$ del origen.

Solución:

Escribimos la recta como

$$L: \qquad x = b + at \quad , \quad y = b - 1 + 2at \quad , \quad z = 3b - 1 + 2t$$

Para que sea paralela al plano dado debe cumplirse que su vector director $\vec{d} = (a, 2a, 2)$ perpendicular al normal al plano $\vec{n} = (2, 1, -2)$. Esto es:

$$2a + 2a - 4 = 0 \quad \Longrightarrow \quad a = 1$$

La distancia del origen $\vec{O} = (0, 0, 0)$ a la recta es

$$d(L, \vec{O}) = \frac{\left\| (b, b-1, 3b-1) \times \vec{d} \right\|}{\|\vec{d}\|} = \sqrt{2}$$

Tenemos que

$$(b, b-1, 3b-1) \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ b & b-1 & 3b-1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-4b, b-1, b+1)$$

De modo que

$$18b^2 + 2 = 18 \quad \Longrightarrow \quad b = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

■

(6) Dada la recta L calcular el plano Π que la contiene, tal que la distancia del plano al origen sea de $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ unidades:

$$L: \quad x + y + 1 = 0, \ z = 1$$

Solución:

Dado que el plano buscado debe contener a la recta L, entonces este pertenece al conjunto de todos los planos que resultan de la rotación de un plano Π_0 en torno a dicha recta; esto se conoce como un *haz de planos*.

Si L viene definida por sus ecuaciones implícitas:

$$L = \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ \tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}x + \tilde{D} = 0 \end{cases}$$

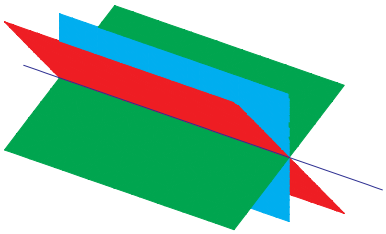


Figura 4.2: Haz de planos en torno a L.

la ecuación del haz de planos de eje L viene dada por la igualdad:

$$\lambda(Ax + By + Cz + D) + \mu(\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}x + \tilde{D}) = 0$$

Si dividimos por λ y hacemos $\alpha = \dfrac{\mu}{\lambda}$, la ecuación del haz resulta:

$$Ax + By + Cz + D + \alpha(\tilde{A}x + \tilde{B}y + \tilde{C}x + \tilde{D}) = 0$$

En este caso, nuestro plano es $\Pi: \quad x + y + 1 + \alpha(z - 1) = 0 \ \rightarrow \ x + y + \alpha z + (1 - \alpha) = 0$. Ahora, recordemos la fórmula de distancia punto-plano:

$$d(\vec{p}_0, \Pi) = \frac{|Ax_0 + Bx_0 + Cx_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \quad \longrightarrow \quad d(0, \Pi) = \frac{|1 - \alpha|}{\sqrt{2 + \alpha^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Resolviendo,

$$\frac{(1 - \alpha)^2}{2 + \alpha^2} = \frac{4}{3} \quad \longrightarrow \quad (\alpha + 5)(\alpha + 1) = 0$$

Por tanto, los planos que satisfacen son:

$$\Pi_1: \quad x + y - z + 2 = 0 \qquad , \qquad \Pi_2: \quad x + y - 5z + 6 = 0$$

■

(7) Hallar las ecuaciones simétricas de la recta que es paralela a los planos de ecuaciones $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ y que corte a las rectas:

$$\frac{x - 5}{2} = \frac{y - 3}{-4} = \frac{z + 1}{3} \qquad , \qquad \frac{x - 3}{-2} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z - 2}{4}$$

Solución:

Si la recta buscada $L: \quad \vec{p} = \vec{p}_0 + t\,\vec{d}$ es paralela a los planos en cuestión, entonces es paralela a la recta formada por la intersección de los mismos:

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 12y - 3z - 5 = 0 \\ 3x - 4y + 9z + 7 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \vec{p} = (2/3, 0, -1) + t(-8/3, 1, 4/3)$$

Así, tomamos $\vec{d} = (8, -3, -4)$. Sea $\vec{a} = (x, y, z)$ un punto que pertenece a L. Entonces, si se busca que corte a las dos rectas deseadas, debe cumplirse que:

$$(\vec{a} - \vec{p}_k) \cdot (\vec{d} \times \vec{d}_k) = 0, \quad \text{para cada una de las dos rectas } L_k$$

Así, reemplazando:

$$\begin{vmatrix} x-5 & y-3 & z+1 \\ 8 & -3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-2 \\ 8 & -3 & -4 \\ -2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{array}{c} -25x + 195 - 32y - 26z = 0 \\ -24y - 60 + 18z = 0 \end{array}$$

Un punto que satisface es $(7, -1, 2)$. Por tanto, tomamos dicho punto como vector afín: $\vec{p}_0 = (7, -1, 2)$. Finalmente, nuestra recta corresponde a:

$$\frac{x-7}{8} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{-4}$$

Gráficamente,

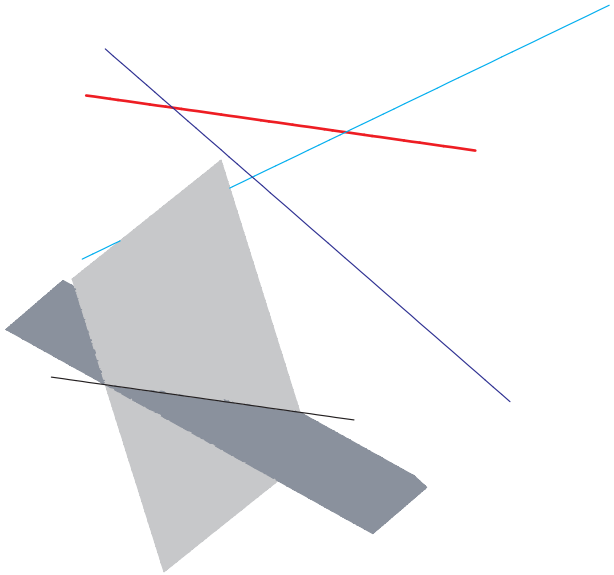


Figura 4.3: Los planos (grises) y las rectas L_1, L_2 del enunciado; L la recta buscada.

■

(8) Determine los puntos sobre la recta $\vec{p} = (2, 0, -1) + t(1, 2, 1)$ que están a igual distancia de los planos $x + 2y + z = 5,\ x - 3z = 1$.

Solución:

Se requieren puntos (x, y, z) tales que:

$$\frac{|x + 2y + z - 5|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|x - 3z - 1|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2}} \Longrightarrow \frac{|x + 2y + z - 5|}{\sqrt{6}} = \frac{|x - 3z - 1|}{\sqrt{10}}$$

Ahora, sabemos que dicho punto pertenece a L, por tanto:

$$L: \quad x = t + 2,\ y = 2t,\ z = t - 1$$

Así,

$$\begin{aligned}
\frac{|x+2y+z-5|}{\sqrt{6}} = \frac{|x-3z-1|}{\sqrt{10}} \quad &\rightarrow \quad \frac{|6t-4|}{\sqrt{6}} = \frac{|-2t+4|}{\sqrt{10}} \\
&\rightarrow \quad \frac{(6t-4)^2}{6} = \frac{(-2t+4)^2}{10} \\
&\rightarrow \quad 10(36t^2-48t+16) = 6(4t^2-16t+16) \\
&\rightarrow \quad 21t^2-24t+4=0 \\
&\rightarrow \quad t_1 = \frac{12+2\sqrt{15}}{21},\ t_2 = \frac{12-2\sqrt{15}}{21}
\end{aligned}$$

Reemplazando en L se obtienen los puntos pedidos.

■

(9) Considere las rectas L_1 y L_2 dadas por

$$L_1:\ (1,1,1)+t(4,1,5)$$

$$L_2:\ (-1,1,1)+s(2,1,3)$$

Sea δ la distancia entre L_1 y L_2 y $p \in]0,1[$ un número fijo. Encuentre una ecuación del plano paralelo a las rectas L_1 y L_2 que está a una distancia $p\delta$ de L_1 y $(1-p)\delta$ de L_2.

Solución:

Un normal a cualquier plano paralelo a L_1 y L_2 es

$$\vec{n} = \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por simpleza elegiremos $\vec{n} = (1,1,-1)$. Así, el plano buscado posee la siguiente forma: $x+y-z+d = 0$, con d a determinar. Por otro lado, la distancia entre las rectas es:

$$\delta = \frac{\|\vec{n} \cdot (\vec{p_1}\vec{p_2})\|}{\|\vec{n}\|} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Para hallar d debemos evaluar un punto que pertenezca al plano de modo que la distancia del plano a L_1 sea $p\delta$, lo que se traduce en la ecuación:

$$p\delta = \frac{2p}{\sqrt{3}} = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{|1+d|}{\sqrt{3}}$$

de donde se obtiene que $d = 2p-1$ o bien $d = -1-2p$. Repetimos para L_2:

$$(1-p)\delta = \frac{2(1-p)}{\sqrt{3}} = \frac{|-1+d|}{\sqrt{3}}$$

de donde $d = 3-2p$ o bien $d = 2p-1$. Elegimos el segundo valor, puesto que cumple ambos requerimientos. Por tanto, el plano buscado es

$$\Pi: \quad x+y-z+2p-1=0$$

■

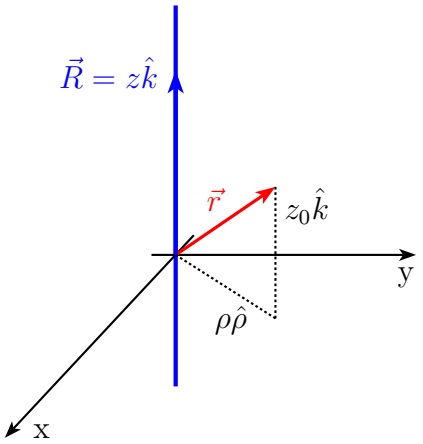
(10) **[Propuesto]** Considerando que el campo eléctrico de una distribución lineal de cargas se calcula como sigue:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_C \lambda(\vec{R})\frac{(\vec{r}-\vec{R})}{\|\vec{r}-\vec{R}\|^3}\,dR$$

Determine el campo eléctrico generado por un alambre infinito con densidad de carga uniforme, localizado en el eje z.

Solución:

Consideremos la siguiente situación, en donde λ representa la densidad lineal de carga:



en donde

$$\vec{R} = z\hat{k},\ -\infty < z < \infty \quad \longrightarrow \quad dR = dz$$

$$\vec{r} = z_0\hat{k} + \rho\hat{\rho}$$

$$\vec{r}-\vec{R} = (z_0 - z)\hat{k} + \rho\hat{\rho} \qquad \therefore\ \|\vec{r}-\vec{R}\| = \left[(z_0-z)^2+\rho^2\right]^{1/2}$$

Así,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{(z_0-z)}{\left[(z_0-z)^2+\rho^2\right]^{3/2}}\hat{k} + \frac{\rho}{\left[(z_0-z)^2+\rho^2\right]^{3/2}}\hat{\rho}\right)dz \\ &= E_z\hat{k} + E_\rho\hat{\rho}\end{aligned}$$

con

$$\begin{aligned}E_z &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(z_0-z)}{[(z_0-z)^2+\rho^2]^{3/2}}\,dz \qquad u = z_0 - z \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u\,du}{[u^2+\rho^2]^{3/2}} \qquad \text{(la función es impar)} \\ &= 0\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_\rho &= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho}{[(z_0-z)^2+\rho^2]^{3/2}}\,dz \qquad u = z - z_0 \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho\;du}{[u^2+\rho^2]^{3/2}} \qquad u = \rho\tan\theta,\ du = \rho\sec^2\theta d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^2\sec^2\theta\;d\theta}{[\rho^2(1+\tan^2\theta)]^{3/2}} \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{\rho^2\sec^2\theta\;d\theta}{\sec^3\theta} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\;d\theta \\
&= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2}{\rho}
\end{aligned}
$$

Resumiendo,

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\rho}}{\rho}}$$

■

Geometría diferencial en el espacio

II.i. Curvas

(1) Hallar una parametrización de la curva que es la intersección de una esfera de radio R y centro en el origen, con un cilindro circular de radio $R/2$ en la dirección del eje z y eje de simetría ubicado en $x = R/2$.

Solución:

Un punto (x, y, z) pertenece a la esfera si

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

y al cilindro si

$$\left(x - \frac{R}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$$

Analizando la segunda ecuación, proponemos la siguiente parametrización:

$$x - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}\cos t \;\rightarrow\; x = \frac{R}{2}(1 + \cos t) \qquad \wedge \qquad y = \frac{R}{2}\sin t$$

con $0 \leq t < 2\pi$. Reemplazando en la ecuación de la esfera,

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 + z^2 &= R^2 \\ \frac{R^2}{4}(1 + \cos t)^2 + \frac{R^2}{4}\sin^2 t + z^2 &= R^2 \\ \frac{R^2}{2}(1 + \cos t) + z^2 &= R^2 \\ z^2 &= \frac{R^2}{2}(1 - \cos t) \end{aligned}$$

Notamos que existen dos ramas para la curva en nuestra parametrización:

$$z_+ = \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t} \qquad \wedge \qquad z_- = -\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t}$$

Por lo tanto, $\phi_+ : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ es dada por:

$$\phi_+(t) = \left(\frac{R}{2}(1 + \cos t), \frac{R}{2}\sin t, \frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t}\right)$$

mientras que $\phi_- : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ es dada por:

$$\phi_-(t) = \left(\frac{R}{2}(1 + \cos t), \frac{R}{2}\sin t, -\frac{R}{\sqrt{2}}\sqrt{1 - \cos t}\right)$$

¿Es posible unir ambas ramas en una parametrización? Dado que la curva pertenece a una esfera de radio R y centro en el origen, entonces podemos afirmar que:

$$x(t)^2 + y(t)^2 = R^2 \sin^2 t \qquad z(t) = R\cos t$$

con $t \in [0, 2\pi)$. Esta parametrización satisface la ecuación de la esfera. Si expandimos la ecuación del cilindro,

$$\begin{aligned} \left(x(t) - \frac{R}{2}\right)^2 + y(t)^2 &= \frac{R^2}{4} \\ x(t)^2 + y(t)^2 - R\,x(t) + \frac{R^2}{4} &= \\ R^2 \sin^2 t - R\,x(t) + &= 0 \\ x(t) &= R\sin^2(t) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$y(t)^2 = R^2(\sin^2 t - \sin^4 t) = R^2 \sin^2 t(1 - \sin^2 t) = R^2 \sin^2 t \cos^2 t$$

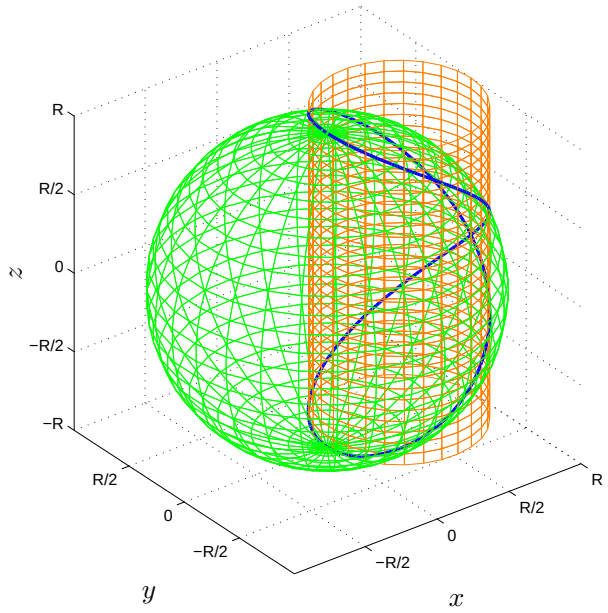
Luego,

$$y(t) = R\sin t \cos t$$

es una posible parametrización. Notemos que $y(t)$ puede ser positivo o negativo, lo que es consistente con la geometría de la curva. Así, $\alpha : [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ está dada por:

$$\alpha(t) = \left(R\sin^2 t, R\sin t\cos t, R\cos t\right)$$

Gráficamente, ambas parametrizaciones dan origen a la curva:



■

(2) Considere la hélice $f(t) = (\cos t, \sin t, e^t)$, $t \in \mathbb{R}$.

a) Halle la recta tangente y el plano normal a la curva en el punto $f(0)$.

b) Pruebe que la intersección de cualquier recta tangente a la curva con el plano XY entrega un punto sobre el círculo $x^2 + y^2 = 2$.

c) Determine en qué punto (si lo hay) la curva correspondiente atraviesa el plano YZ perpendicularmente.

Solución:

a) La recta tangente en t_0 se obtiene de acuerdo a la siguiente fórmula:

$$L: \quad T(s) = f(t_0) + sf'(t_0)$$

Como $f(0) = (1, 0, 1)$ y $f'(0) = (0, 1, 1)$, entonces:

$$L: \quad T(s) = (1, s, 1 + s)$$

Por otra parte, el plano normal en t se obtiene como sigue:

$$\Pi: \quad x'(t_0)[x - x(t_0)] + y'(t_0)[y - y(t_0)] + z'(t_0)[z - z(t_0)] = 0$$

Finalmente,

$$\Pi: \quad y + z - 1 = 0$$

b) La recta tangente en t será

$$T(s) = (\cos t - s \cdot \sin t, \sin t + s \cdot \cos t, e^t[1 + s])$$

La intersección con $z = 0$ sucede cuando $z(s) = 0 \rightarrow s = -1$, lo cual genera el punto $x = \cos t + \sin t,\ y = \sin t - \cos t$. Sumando los cuadrados tenemos

$$x^2 + y^2 = 2\cos^2 t + 2\sin^2 t = 2$$

c) Buscamos alguno conjunto de puntos (x, y, z) tal que la curva atraviese perpendicularmente al plano YZ, o bien, el conjunto de puntos tales que el plano YZ sea normal a la curva en dichos puntos.

Para que esto ocurra, el vector tangente $f'(t) = (\sin t, \cos t, e^t)$ debe ser paralelo al vector $(1, 0, 0)$, el cual es un vector normal al plano en cuestión.

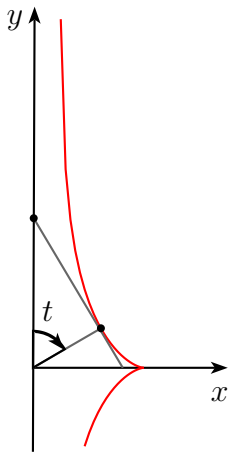
Como no existe $\tau \in \mathbb{R}$ tal que $e^\tau = 0$, no el conjunto de puntos que cumplen con la condición pedida es vacío.

■

(3) Sea $\alpha : (0, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ dada por

$$\alpha(t) = \left(\sin t, \cos t + \ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)\right)$$

donde t es el ángulo que el eje y forma con el vector $\alpha'(t)$. La traza de α se denomina la tractriz.



Demostrar que

a) α es una curva parametrizada diferenciable, regular excepto en $t = \pi/2$.

b) La longitud del segmento sobre la tangente a la tractriz entre el punto de tangencia y el eje y es constante e igual a 1.

Solución:

a) Notemos que

$$\begin{aligned}\alpha'(t) &= \left(\cos t, -\sin t + \cot\frac{t}{2}\cdot\sec^2\frac{t}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}\right)\\ &= \left(\cos t, -\sin t + \frac{1}{\sin t}\right)\end{aligned}$$

Si $\alpha'(t) = 0 \longrightarrow \cos t = 0$ y $-\sin t + \frac{1}{\sin t} = 0$, entonces

$$\begin{aligned}\sin t = \frac{1}{\sin t} &\implies \sin^2 t = 1\\ &\implies \sin t = \pm 1, \quad t \in (0,\pi)\\ &\implies t = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

b) Sean $P = (x_0, y_0)$ el punto de tangencia sobre la curva y $Q = (0, \ell)$ el punto de intersección de la recta tangente con el eje y.
Sean $x = \sin t$, $y = \cos t + \ln(\tan t/2)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{1}{\sin t} - \sin t}{\cos t} = \frac{1-\sin^2 t}{\sin t\cos t} = \frac{\cos^2 t}{\sin t\cos t} = \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

donde hemos asumido que $t \leq \pi/2$ (para que el coseno sea positivo). En el resto del dominio, dada la simetría de la curva, el resultado es equivalente. Luego, la ecuación de la recta tangente en P es

$$y - y_0 = \frac{\sqrt{1 - {x_0}^2}}{x_0}(x - x_0)$$

Evaluando la recta en el punto Q obtenemos

$$\ell - y_0 = \frac{\sqrt{1 - x_0^2}}{x_0}(0 - x_0) = -\sqrt{1 - {x_0}^2}$$

Entonces,

$$d(P, Q)^2 = {x_0}^2 + (y_0 - \ell)^2 = {x_0}^2 + 1 - {x_0}^2 = 1$$

y por tanto,

$$d(P, Q) \equiv 1$$

■

(4) Considere una función $f > 0$, que satisface $f' = cf$, con c constante. Verifique que el vector tangente de la curva descrita por

$$\Gamma(\theta) = f(\theta)(\cos\theta + 1, \sqrt{2}\sin\theta, \cos\theta - 1)$$

forma un ángulo constante con el plano $x = z$.

Solución:

Sea $\vec{u}(\theta) = (\cos\theta + 1, \sqrt{2}\sin\theta, \cos\theta - 1)$. Notemos que $\|\vec{u}(\theta)\| = 2$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Es claro que $\vec{u} \perp \vec{u'}$.

El vector $\Gamma'(\theta)$ tiene la dirección del vector tangente y el vector $\vec{n} = (1, 0, -1)$ es el vector normal al plano $x = z$. Por lo tanto, debemos verifica únicamente que el ángulo entre $\Gamma'(\theta)$ y $\vec{n}$ es constante. Recordando que $\Gamma'(\theta) = f'(\theta)\vec{u}(\theta) + f(\theta)\vec{u'}(\theta)$, tenemos:

$$\Gamma'(\theta) \cdot \vec{n} = f'(\theta)\left[\vec{u}(\theta) \cdot \vec{n}\right] + f(\theta)\left[\vec{u'}(\theta) \cdot \vec{n}\right] = 2f'(\theta) + 0 = 2cf(\theta)$$

Como $\vec{u} \perp \vec{u'}$, se cumple que:

$$\|\Gamma'(\theta)\|^2 = \|f'(\theta)\vec{u}(\theta)\|^2 + \left\|f(\theta)\vec{u'}(\theta)\right\|^2 = c^2 f(\theta)^2 \|\vec{u}(\theta)\|^2 + f(\theta)^2 \left\|\vec{u'}(\theta)\right\|^2$$

dado que f es positiva, $\|\vec{u}(\theta)\|^2 = 4$ y $\left\|\vec{u'}(\theta)\right\|^2$ es fácil de calcular, tenemos que:

$$\|\Gamma'(\theta)\| = f(\theta)\sqrt{2(2c^2 + 1)}$$

Por lo tanto,

$$\Gamma'(\theta) \cdot \vec{n} = \|\Gamma'(\theta)\| \ \|\vec{n}\| \cos(\alpha)$$
$$2cf(\theta) = f(\theta)\sqrt{2(2c^2 + 1)}\sqrt{2}\cos(\alpha)$$

de donde, finalmente,

$$\cos(\alpha) = \frac{c}{\sqrt{2c^2 + 1}}$$

■

(5) Considere la curva

$$\alpha(t) = \left(\frac{2}{t^2+1} - 1, \frac{2t}{t^2+1}\right)$$

con $t \in \mathbb{R}$. Encuentre el arcoparámetro s de la curva, para luego reparametrizar la curva por longitud de arco.

Solución:

Notemos que:

$$\alpha'(t) = \left(-\frac{4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2(t^2+1)-4t^2}{(t^2+1)^2}\right) = \left(-\frac{4t}{(t^2+1)^2}, \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\|\alpha'(t)\| &= \frac{\sqrt{16t^2+4(1-t^2)^2}}{(t^2+1)^2} = \frac{\sqrt{16t^2+4(1-2t^2+t^4)}}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{\sqrt{4(1+2t^2+t^4)}}{(t^2+1)^2} = \frac{2(t^2+1)}{(t^2+1)^2} \\
&= \frac{2}{t^2+1}
\end{aligned}$$

Luego, el arcoparámetro es:

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} \|\alpha'(u)\|\, du = 2\int_{-\infty}^{t} \frac{du}{u^2+1} = 2\arctan(t) + \pi$$

Para arcoparametrizar la curva, calculamos $t(s) = s^{-1}(t)$. Esto es,

$$s = 2\arctan(t) + \pi \quad \longleftrightarrow \quad t = \tan\left(\frac{s-\pi}{2}\right)$$

Con ello,

$$\begin{aligned}
\frac{2}{t^2+1} - 1 &= \frac{2}{\sec^2\left(\frac{s-\pi}{2}\right)} - 1 \\
&= 2\cos^2\left(\frac{s-\pi}{2}\right) - 1 \\
&= \cos(s-\pi)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2t}{t^2+1} &= \frac{2\tan\left(\frac{s-\pi}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{s-\pi}{2}\right)} \\
&= 2\sin\left(\frac{s-\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{s-\pi}{2}\right) \\
&= \sin(s-\pi)
\end{aligned}$$

Para determinar el intervalo al que pertenece el arcoparámetro, notamos que $s(t \to -\infty) = 0$, $s(t \to \infty) = 2\pi$. Finalmente,

$$\alpha(s) = \Big(\cos(s-\pi), \sin(s-\pi)\Big), \ s \in [0, 2\pi]$$

■

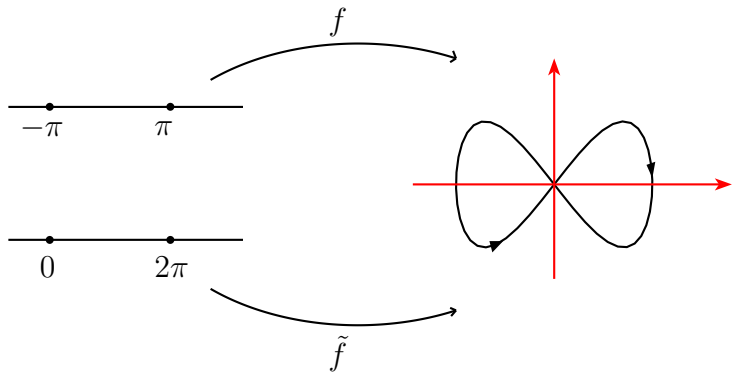
(6) *a*) Sea $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}^2$ el camino dado por $f(t) = (\sin t, \sin 2t)$ y $\tilde{f} : (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2$ el camino $\tilde{f}(s) = (\sin s, \sin 2s)$. ¿Es $\tilde{f}$ una reparametrización de f? Justifique.

b) Obtenga la reparametrización por longitud de arco del camino $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definido como $f(t) = (r\cos t, r\sin t)$.

c) Sea $f : [0, 3] \to \mathbb{R}^2$ el camino $f(t) = (t, \cosh t)$. Determine la longitud de la curva y determine la reparametrización por longitud de arco. Verifique.

Solución:

a) Ambas funciones son caminos regulares que describen la misma curva en $\mathbb{R}^2$, la cual es un "ocho acostado" recorrido por cada uno de ellos una única vez:



Nos preguntamos entonces si existe una función $\varphi : (0, 2\pi) \to (-\pi, \pi)$ de clase $\mathcal{C}^1$ sobreyectiva tal que $\varphi'(s) \neq 0, \ \forall s \in (0, 2\pi)$ y $\tilde{f} = f \circ \varphi$.
Supongamos que existe. Entonces, $(0, 0) = \tilde{f}(\pi) = f(\varphi(\pi)) = f(0)$, de modo que, como f es inyectiva (pues la curva está recorrida una sola vez) se tiene que $\varphi(\pi) = 0$.
Además, $\tilde{f}'(s) = (\cos s, 2\cos 2s)$ y $f'(t) = (\cos t, 2\cos 2t)$, de modo que $\tilde{f}'(\pi) = (-1, 2)$ y $f'(\pi) = (1, 2)$.
Como se cumple que $\tilde{f} = f \circ \varphi$, entonces se debe dar que $\tilde{f}'(s) = \varphi'(s) f'(\varphi(s))$. Con $s = \pi$ llegamos a $\tilde{f}'(\pi) = \varphi'(\pi) f(0)$. Esto implica que,

$$-1 = \varphi'(\pi) \cdot 1 \quad \vee \quad 2 = \varphi'(\pi) \cdot 2 \qquad (\to\leftarrow)$$

Entonces, $\tilde{f}$ **no** es una reparametrización de f.

b) Se tiene que

$$s = \psi(t) = \int_0^t \|f'(u)\| \, du = \int_0^t \|(-r\sin u, \cos u)\| \, du = \int_0^t r \, du = rt$$

de modo que la función $t = \varphi(s)$ es

$$t = \varphi(s) = \psi^{-1}(s) = \frac{s}{r}$$

Entonces, el camino $\tilde{f} : [0, 2\pi r] \to \mathbb{R}^2$, dado por

$$\tilde{f}(s) = (f \circ \varphi)(s) = f\left(\frac{s}{r}\right) = \left(r\cos\frac{s}{r}, r\sin\frac{s}{r}\right)$$

es la reparametrización por longitud de arco de f.

c) Sabemos que el largo L de una curva γ viene dado por

$$L(\gamma) = \int_a^b \|f'(t)\|\, dt$$

Así,

$$L = \int_0^3 \|(1, \sinh t)\|\, dt = \int_0^3 \sqrt{1 + \sinh^2 t}\; dt = \int_0^3 \cosh t\; dt = \sinh 3$$

Para el arcoparámetro tenemos,

$$\begin{aligned} s = \psi(t) = \int_0^t \|f'(u)\|\, du = \sinh t \quad &\longrightarrow \quad t = \varphi(s) = \psi^{-1}(s) = \operatorname{arcsinh} s \\ &\longrightarrow \quad t = \ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right) \end{aligned}$$

Como la longitud de f entre $t = 0$ y $t = 3$ es $\sinh 3$, la reparametrización por longitud de arco $\tilde{f} : [0, \sinh 3] \to \mathbb{R}^2$ viene dada por

$$\tilde{f} = \left(\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right), \cosh\left\{\ln\left(s + \sqrt{s^2+1}\right)\right\}\right)$$

La verificación se deja propuesta al lector.

■

(7) Considere la curva $\varphi : I \to \mathbb{R}^3$ dos veces diferenciable.

a) Demuestre que su curvatura viene dada por:

$$\kappa(t) = \frac{\|\varphi''(t) \times \varphi'(t)\|}{\|\varphi'(t)\|^3}$$

b) Utilice el resultado anterior para hallar la curvatura de una elipse $x(t) = a\cos t$, $y(t) = b\sin t$, $a > b$. ¿Dónde alcanza sus valores extremos?

c) Sea $\phi(t)$ una curva plana de curvatura constante. Demuestre que la traza de ϕ es una recta o una circunferencia.

Solución:

a) Recordemos que $\vec{v}(t) = \varphi'(t) = \|\varphi'(t)\|\,\hat{t} = v(t)\;\hat{t}$. Así, $\vec{v} \parallel \hat{t}$. Por las *Ecuaciones de Frenet-Serret*, tenemos

$$\vec{a}(t) = \varphi''(t) = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v(t)\frac{d\hat{t}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{t} + v(t)\frac{ds}{dt}\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{dv}{dt}\;\hat{t} + \kappa v(t)^2\;\hat{n}$$

Hacemos

$$\begin{aligned}
\vec{a}\times\vec{v} &= \frac{dv}{dt}\;\hat{t}\times\vec{v} + \kappa v(t)^2\;\hat{n}\times\vec{a} \\
&= \kappa v(t)^2\;\hat{n}\times\vec{v} \\
\|\vec{a}\times\vec{v}\| &= \kappa v(t)^2\;\;\|\hat{n}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin(\pi/2) \\
\|\vec{a}\times\vec{v}\| &= \kappa v(t)^3
\end{aligned}$$

Así,

$$\kappa(t) = \frac{\|\varphi''(t)\times\varphi'(t)\|}{\|\varphi'(t)\|^3}$$

b) Es claro que, haciendo $\tau^2 = \frac{a^2}{b^2} - 1 > 0$,

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= (a\cos t, b\sin t) \\
\varphi'(t) &= (-a\sin t, b\cos t) \\
\varphi''(t) &= -(a\cos t, b\sin t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|\varphi'(t)\| &= \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{b^2 + (a^2-b^2)\sin^2 t} = b\sqrt{1+\tau^2\sin^2 t} \\
\varphi''(t)\times\varphi'(t) &= (0,0,-ab) \quad\longrightarrow\quad \|\varphi''(t)\times\varphi'(t)\| = ab
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\kappa = \frac{ab}{b^3\left(1+\tau^2\sin^2 t\right)^{3/2}}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\kappa_{min} &\longleftrightarrow \sin t = \pm 1 \\
&\longleftrightarrow t = \pi/2,\; 3\pi/2 \\
&\therefore \quad \kappa_{min} = \frac{ab}{b^3(1+\tau^2)^{3/2}} = \frac{b}{a^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\kappa_{max} &\longleftrightarrow \sin t = 0 \\
&\longleftrightarrow t = 0,\; \pi \\
&\therefore \quad \kappa_{max} = \frac{ab}{b^3} = \frac{a}{b^2}
\end{aligned}$$

c) Dado que $\kappa \geq 0$, distinguimos únicamente dos casos:

(1) $\kappa = 0$

Sea $\hat{t} = (t_x, t_y)$. Así, $\left\| \dfrac{d\hat{t}}{ds} \right\| = 0$. Esto se cumple únicamente si $\dfrac{d\hat{t}}{ds} = (0,0)$; i.e,

$$\frac{dt_x}{ds} = \frac{dt_y}{ds} = 0 \implies \left.\begin{array}{l} t_x(s) = t_1 \\ t_y(s) = t_2 \end{array}\right\} cte.$$

Pero $(t_x, t_y) = \varphi'(s) = (x'(s), y'(s))$. Finalmente,

$$\left.\begin{array}{l} x(s) = x_0 + st_1 \\ y(s) = y_0 + st_2 \end{array}\right\} \text{recta}$$

(2) $\kappa = \kappa_0 \neq 0$

Consideremos la arcoparametrización de la curva $\varphi(s) = (x(s), y(s))$. El círculo osculador viene dado por:

$$c(s) = \varphi(s) + \frac{1}{\kappa_0}\hat{n}(s) \longrightarrow c'(s) = \hat{t}(s) + \frac{1}{\kappa_0}\frac{d\hat{n}}{ds}$$

Pero, $\dfrac{d\hat{n}}{ds} \cdot \hat{n} = 0$, luego $\dfrac{d\hat{n}}{ds} = \lambda \hat{t}$ y con ello:

$$\begin{aligned} \hat{n}(s) \cdot \hat{t}(s) &= 0 \\ \frac{d\hat{n}}{ds} \cdot \hat{t} + \hat{t} \cdot \frac{d\hat{t}}{ds} &= 0 \\ \lambda + \kappa &= 0 \longrightarrow \lambda = -\kappa \end{aligned}$$

En este caso,

$$c'(s) = \hat{t}(s) + \frac{1}{\kappa_0}\frac{d\hat{n}}{ds} = \hat{t}(s) + \frac{1}{\kappa_0}\left(-\kappa_0\, \hat{t}(s) \right) = 0 \longrightarrow c(s) = (c_1, c_2) = cte$$

Así, cada punto $(x(s), y(s))$ satisface que

$$\|\varphi(s) - (c_1, c_2)\| = \frac{1}{\kappa} = r \Big\} \text{circunferencia}$$

Que es lo que se buscaba probar.

■

(8) **[Propuesto]** Considerando que el área encerrada por una curva cerrada simple $r(t) = \Big(x(t), y(t)\Big)$ se obtiene como sigue,

$$A = -\int_a^b y(t)x'(t)\, dt = \int_a^b x(t)y'(t)\, dt = \frac{1}{2}\int_a^b (xy' - yx')\, dt$$

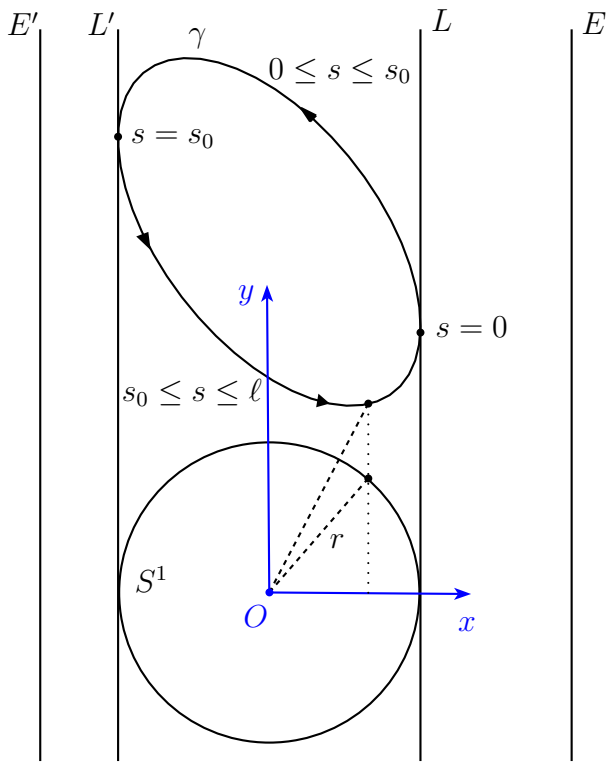
demuestre la Desigualdad Isoperimétrica: *Sea γ una curva cerrada simple de largo ℓ, y sea A el área encerrada por la curva. Entonces,*

$$A \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

y la igualdad se alcanza si y solo si γ es un círculo.

Solución:

Sean E y E' dos líneas paralelas que no corten a la curva γ, y muévanse ambas hasta el primer punto de tangencia a γ. De esta forma obtuvimos dos líneas tangentes paralelas, L y L', tales que la curva es enteramente contenida en la franja del plano limitada por ambas. Considere el círculo S^1, el cual es tangente a L y L' y que no se corta con la curva. Sea O el centro de S^1, de modo tal que sea posible tomar un sistema coordenado con origen en O y el eje X perpendicular a L y L' (Ver figura).



Parametricemos γ por su arcoparámetro, $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, tal que está positivamente orientada y los puntos de tangencia con L y L' sean $s = 0$ y $s = s_0$, respectivamente. Dado que está arcoparametrizada, es claro que

$$x'(s)^2 + y'(s)^2 \equiv 1$$

Podemos asumir que la ecuación de S^1 es

$$r(s) = (\tilde{x}(s), \tilde{y}(s)) = (x(s), \tilde{y}(s)), \ \ s \in [0, \ell]$$

de modo tal que existe una distancia de $2r$ entre las rectas L y L'. Utilizando las fórmulas del enunciado, tenemos que

$$A = \int_0^\ell xy' \, ds, \qquad \tilde{A} = \pi r^2 = -\int_0^\ell \tilde{y}x' \, ds$$

Sumando,

$$\begin{aligned} A+\pi r^2 &= \int_0^\ell \underbrace{[x(s)y'(s)-x'(s)\tilde{y}(s)]}_{\begin{pmatrix}x'(s)\\y'(s)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\tilde{y}(s)\\x(s)\end{pmatrix}} ds \qquad \text{por Cauchy-Schwarz,} \\ &\leq \int_0^\ell \underbrace{\sqrt{x'(s)^2+y'(s)^2}}_{=1}\ \underbrace{\sqrt{x(s)^2+\tilde{y}(s)^2}}_{=r}\ ds = r\ell \end{aligned}$$

Recordemos que la media geométrica entre dos números positivos es más pequeña o igual que la media aritmética, y la igualdad se alcanza si y solo si ambos números son iguales. Así,

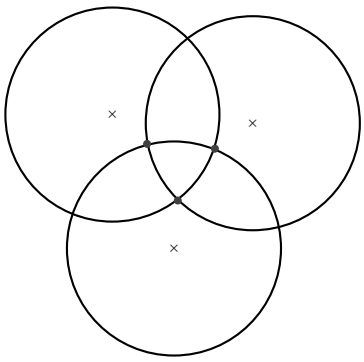
$$\sqrt{A}\,\sqrt{\pi r^2} \leq \frac{1}{2}\left(A+\pi r^2\right) \leq \frac{r\ell}{2} \ \Rightarrow\ \pi r^2 A \leq \frac{r^2\ell^2}{4} \ \Rightarrow\ A \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

Para el caso de la igualdad, i. e. $A = \dfrac{\ell^2}{4\pi}$, distinguimos dos casos:

(1) *Igualdad entre medias geométrica y aritmética*

$$A = \pi r^2 = \frac{\ell^2}{4\pi} \longrightarrow r = \frac{\ell}{2\pi}$$

Con ello, $\ell = 2\pi r$ y r no depende de la elección de la dirección de L ya que, independiente de la orientación de la recta, el radio (y por tanto la separación entre las rectas) dependerá únicamente del largo ℓ. Este hecho no es suficiente para que sea un círculo. Existen otras curvas que lo cumplen, tales como las intersecciones de tres círculos de igual radio:



(2) *Igualdad en Cauchy-Schwarz*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|\ \|\vec{b}\| \quad \longleftrightarrow \quad \vec{b} = \lambda\ \vec{a}$$

Esto nos lleva a

$$\begin{aligned}
\frac{x(s)}{y'(s)} = \frac{-\tilde{y}(s)}{x'(s)} = \lambda \quad &\longleftrightarrow \quad (-\tilde{y}, x) = \lambda(x', y') \\
&\longleftrightarrow \quad (-\tilde{y}, x) \cdot (x', y') = \lambda(x', y') \cdot (x', y') \\
&\longleftrightarrow \quad -\tilde{y}x' + xy' = \lambda \\
&\longleftrightarrow \quad \frac{1}{\lambda}\tilde{y}^2 + \frac{1}{\lambda}x^2 = \lambda \\
&\longleftrightarrow \quad \tilde{y}^2 + x^2 = \lambda^2 \\
&\longleftrightarrow \quad \pm r = \lambda
\end{aligned}$$

Por tanto, $x(s) = \pm\, ry'(s)$.

Dado que r no depende de la dirección de L, podemos rotar la figura de modo tal que intercambiemos x e y y poder repetir el argumento anterior. Así, $y(s) = \pm\, rx'(s)$. Juntando ambas,

$$x(s)^2 + y(s)^2 = r^2\big[x'(s)^2 + y'(s)^2\big] = r^2$$

y γ es un círculo, como queríamos demostrar.

■

(9) Considere una curva $\gamma(s)$ parametrizada respecto a su longitud de arco. Denotamos sus vectores tangente, normal y binormal por $\hat{t}$, $\hat{n}$ y $\hat{b}$ respectivamente. Suponga que para todo $s \in [0, 1]$ se tiene que γ satisface la siguiente igualdad:

$$\gamma(s) = (s^2 + s)\hat{t} + \hat{n} + \sqrt{3 - s^4 - \frac{4s^3}{3}}\hat{b}$$

Calcule la curvatura κ y torsión τ de la curva.

Solución:

Sea $\phi(s) = \sqrt{3 - s^4 - \dfrac{4s^3}{3}}$.

Si derivamos la ecuación de la curva con respecto a s, usando las Ecuaciones de Frenet-Serret

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \kappa\hat{n}, \qquad \frac{d\hat{n}}{ds} = -\kappa\hat{t} + \tau\hat{b}, \qquad \frac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\hat{n}$$

y recordando que $\dfrac{d\gamma(s)}{ds} = \hat{t}$, obtenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{t} &= (2s + 1)\hat{t} + (s^2 + s)\kappa\hat{n} + \tau\hat{b} - \kappa\hat{t} + \phi'(s)\hat{b} - \phi(s)\tau\hat{n} \\
&= \Big[2s + 1 - \kappa\Big]\hat{t} + \Big[\kappa(s^2 + s) - \tau\phi(s)\Big]\hat{n} + \Big[\tau + \phi'(s)\Big]\hat{b}
\end{aligned}$$

Dado que el triedro de Frenet-Serret es un conjunto ortonormal, hacemos producto interno con $\hat{t}$ y luego con $\hat{b}$. Así,

$$\begin{aligned} 1 &= 2s+1-\kappa \\ 0 &= \tau+\phi'(s)=\tau-\frac{2s^2(s+1)}{\sqrt{3-s^4-\frac{4s^3}{3}}} \end{aligned}$$

Es claro que,

$$\kappa = 2s \qquad y \qquad \tau=\frac{2s^2(s+1)}{\sqrt{3-s^4-\frac{4s^3}{3}}}$$

■

(10) Verifique que la curvatura κ y la torsión τ de la curva $\psi(t)=(e^t,e^{-t},t\sqrt{2})$ satisfacen $\kappa=|\tau|$ en todo punto.

Solución:

Torsión y curvatura pueden obtenerse de la siguiente manera:

$$\kappa=\frac{\|\psi''\times\psi'\|}{\|\psi'\|^3}, \qquad \tau=\frac{[\psi',\psi'',\psi''']}{\|\psi'\times\psi''\|^2}$$

Calculamos las derivadas requeridas:

$$\psi(t)'=(e^t,-e^{-t},\sqrt{2}), \qquad \psi''(t)=(e^t,e^{-t},0), \qquad \psi'''(t)=(e^t,-e^{-t},0)$$

Ahora,

$$\psi''\times\psi'=\begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \end{vmatrix}=(\sqrt{2}e^{-t},-\sqrt{2}e^t,-2)$$

$$[\psi',\psi'',\psi''']=\begin{vmatrix} e^t & -e^{-t} & \sqrt{2} \\ e^t & e^{-t} & 0 \\ e^t & -e^{-t} & 0 \end{vmatrix}=-2\sqrt{2}$$

y dado que

$$\|\psi'\|=\sqrt{e^{2t}+2+e^{-2t}}=e^t+e^{-t}, \qquad \|\psi''\times\psi'\|=\sqrt{2}(e^t+e^{-t})$$

se obtiene que:

$$\kappa=\frac{\sqrt{2}(e^t+e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^3}=\frac{\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2} \qquad y \qquad \tau=\frac{-2\sqrt{2}}{2(e^t+e^{-t})^2}=\frac{-\sqrt{2}}{(e^t+e^{-t})^2}$$

y por lo tanto $\kappa=|\tau|$.

■

(11) Sea α una curva plana parametrizada por su longitud de arco, tal que para todo s el ángulo entre $\hat{t}(s)$ y $\alpha(s)$ es θ (fijo). Demuestre

a) Si $\theta = 0$, entonces la traza de α está contenida en una recta.

b) Si $\theta = \pi/2$, entonces la traza de α está contenido en un círculo.

c) Si $0 < \theta < \pi/2$, entonces la traza de α está contenido en una espiral logarítmica. *HINT: Recuerde que una espiral logarítmica tiene curvatura de la forma $\kappa = \kappa_0/s$, con $\kappa_0 = cte$.*

Solución:

a) Sabemos que $\cos(\theta) = \dfrac{\hat{t} \cdot \alpha}{\|\hat{t}\| \, \|\alpha\|}$. Si $\theta = 0$, entonces

$$\frac{\hat{t} \cdot \alpha}{\|\hat{t}\| \, \|\alpha\|} = 1 \;\longrightarrow\; \hat{t} \cdot \alpha = \|\hat{t}\| \, \|\alpha\|$$

Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se concluye que $\alpha(s) = \lambda(s)\, \hat{t}(s)$ con $\lambda \neq 0$. Derivando obtenemos:

$$\frac{d\alpha}{ds} = \hat{t} = \lambda' \, \hat{t} + \lambda\kappa \, \hat{n}$$

Haciendo producto interno (punto) con $\hat{n}$,

$$0 = \hat{t} \cdot \hat{n} = \lambda' \, \hat{t} \cdot \hat{n} + \lambda\kappa \, \hat{n} \cdot \hat{n} = \lambda\kappa \quad \longrightarrow \quad \kappa \equiv 0$$

b) Si $\theta = \frac{\pi}{2}$, entonces

$$\frac{\hat{t} \cdot \alpha}{\|\hat{t}\| \, \|\alpha\|} = 0 \;\longrightarrow\; \hat{t} \perp \alpha$$

Por Frenet-Serret, $\alpha(s) = \lambda(s)\, \hat{n}(s)$ con $\lambda \neq 0$. Derivamos,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \hat{t} = \lambda' \, \hat{n} - \lambda\kappa \, \hat{t}$$

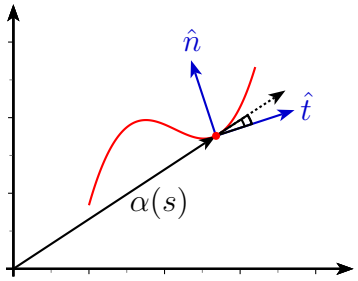
Realizando producto interno con $\hat{n}$,

$$0 = \hat{t} \cdot \hat{n} = \lambda' \, \hat{n} \cdot \hat{n} - \lambda\kappa \, \hat{t} \cdot \hat{n} = \lambda' \quad \longrightarrow \quad \lambda = cte$$

Haciendo el producto interno de $\hat{t}$ contra si mismo, obtenemos

$$1 = \hat{t} \cdot \hat{1} = \lambda' \, \hat{n} \cdot \hat{t} - \lambda\kappa \, \hat{t} \cdot \hat{t} = -\lambda\kappa \quad \longrightarrow \quad \kappa = -\frac{1}{\lambda} = cte$$

c) Si observamos el dibujo, y dado que $\{\hat{t}, \hat{n}\}$ corresponde a una base ortonormal de $\mathbb{R}^2$, entonces es claro que $\alpha(s) = \lambda(s)\cos\theta \; \hat{t}(s) + \lambda(s)\sin\theta \; \hat{n}(s)$



Derivando,

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \lambda'(\cos\theta\ \hat{t} + \sin\theta\ \hat{n}) + \lambda(\cos\theta\kappa\ \hat{n} - \sin\theta\kappa\ \hat{t}) \\ &= (\lambda\kappa\cos\theta + \lambda'\sin\theta)\ \hat{n} + (\lambda'\cos\theta - \kappa\lambda\sin\theta)\ \hat{t}\end{aligned}$$

Tomando producto interno con $\hat{t}$ y $\hat{n}$ obtenemos

$$\begin{array}{rcl|l} \lambda'\cos\theta - \kappa\lambda\sin\theta &=& 1 & / \cos\theta \\ \lambda\kappa\cos\theta + \lambda'\sin\theta &=& 0 & / \sin\theta \end{array}$$

Si sumamos, $\lambda' = \cos\theta$ y con ello $\lambda = s\cos\theta$. Además, $\kappa\lambda = -\sin\theta$ y por tanto:

$$\kappa = -\frac{\sin\theta}{s\cos\theta} = \frac{\kappa_0}{s}$$

■

(12) *a*) Pruebe que una condición necesaria y suficiente para que una curva no plana $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ esté sobre una esfera es que

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'$$

b) Utilice el resultado anterior para determinar si la siguiente curva

$$r(s) = \left(\alpha\cos\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \alpha\sin\left(\frac{s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right), \frac{\beta s}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\right)$$

está contenida en una esfera, donde α y β son constantes positivas.

Solución:

a) Supongamos que $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ es una curva arcoparametrizada que está sobre una esfera de centro en $\vec{c}$ y radio r, entonces:

$$\|\alpha(s) - \vec{c}\|^2 = r^2 \quad \longrightarrow \quad \Big(\alpha(s) - \vec{c}\Big) \cdot \Big(\alpha(s) - \vec{c}\Big) = r^2$$

Si derivamos una vez,

$$\hat{t} \cdot (\alpha - \vec{c}) = 0$$

Derivando una segunda vez, y utilizando las Ec. de Frenet-Serret, tenemos:

$$\begin{aligned}\hat{t}\,' \cdot (\alpha - \vec{c}) + \hat{t} \cdot \hat{t} = 0 \;\; &\Rightarrow \;\; (\kappa\, \hat{n}) \cdot (\alpha - \vec{c}) + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \;\; \kappa\, \hat{n} \cdot (\alpha - \vec{c}) + 1 = 0 \\ &\Rightarrow \;\; \hat{n} \cdot (\alpha - \vec{c}) = -\frac{1}{\kappa}\end{aligned}$$

Derivando la expresión anterior y usando la perpendicularidad del triedro de Frenet-Serret, obtenemos:

$$\begin{aligned}\hat{n}' \cdot (\alpha - \vec{c}) + \hat{n} \cdot \hat{t} = \frac{\kappa'}{\kappa^2} \;\; &\Rightarrow \;\; (-\kappa\, \hat{t} + \tau\, \hat{b}) \cdot (\alpha - \vec{c}) = \frac{\kappa'}{\kappa^2} \\ &\Rightarrow \;\; -\kappa\, \underbrace{\hat{t} \cdot (\alpha - \vec{c})}_{0} + \tau\, \hat{b} \cdot (\alpha - \vec{c}) = \frac{\kappa'}{\kappa^2} \\ &\Rightarrow \;\; \hat{b} \cdot (\alpha - \vec{c}) = \frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\end{aligned}$$

Diferenciando la última igualdad:

$$(-\tau\, \hat{n}) \cdot (\alpha - \vec{c}) + \hat{b} \cdot \hat{t} = \left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)' \;\; \Rightarrow \;\; \tau\, \hat{n} \cdot (\alpha - \vec{c}) = -\left(\frac{\kappa'}{\tau\kappa^2}\right)'$$

Reemplazando la segunda ecuación en la igualdad anterior, se obtiene lo pedido:

$$\frac{\tau}{\kappa} = \left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)'$$

Recíprocamente, sean $\rho = 1/\kappa$ y $\theta = 1/\tau$. Entonces, nuestra hipótesis es equivalente a:

$$\rho = -\theta(\rho'\theta)'$$

Usando esta información note que

$$(\rho^2 + (\rho'\theta)^2)' = 2\rho\rho' + 2(\rho'\theta)(\rho'\theta)' = 0$$

Luego, $\rho^2 + (\rho'\theta)^2$ es igual a una constante, digamos a r^2. Consideremos $\vec{c} = \alpha + \rho\, \hat{n} + \rho'\theta\, \hat{b}$, entonces

$$\vec{c}\,' = \hat{t} + \rho'\, \hat{n} + \rho(-\kappa\, \hat{t} + \tau\, \hat{b}) + (\rho'\theta)'\, \hat{b} + \rho'\theta\tau\, \hat{n} = 0$$

Luego, $\vec{c}$ es constante y

$$\|\alpha - \vec{c}\|^2 = \rho^2 + (\rho'\theta)^2 = r^2$$

es decir, α está contenida en una esfera de centro en $\vec{c}$ y radio r.

b) Denotemos por $\omega = \dfrac{1}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, entonces

$$r'(s) = \Big(-\alpha\omega \sin(\omega s), \alpha\omega \cos(\omega s), \omega\beta \Big)$$

Note que $\|r'(s)\| = 1$, entonces s es su arcoparámetro y $\hat{t} = r'(s)$. Es claro que,

$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \Big(-\alpha\omega^2 \cos(\omega s), -\alpha\omega^2 \sin(\omega s), 0 \Big) = \kappa(s)\, \hat{n}$$

entonces:

$$\kappa(s) = \|\frac{d\hat{t}}{ds}\| = \alpha\omega^2$$

y

$$\hat{n} = \frac{1}{\kappa(s)}\frac{d\hat{t}}{ds} = \Big(-\cos(\omega s), -\sin(\omega s), 0\Big)$$

Por otra parte,

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} = \Big(\beta\omega \sin(\omega s), -\beta\omega\cos(\omega s), \alpha\omega\Big)$$

Así,

$$\frac{d\hat{b}}{ds} = \Big(\beta\omega^2\cos(\omega s), \beta\omega^2\sin(\omega s), 0\Big) = -\tau(s)\,\hat{n}$$

La última igualdad se debe a las ecuaciones de Frenet-Serret. Por lo tanto, $\tau(s) = -\beta\omega^2$. Es claro que:

$$\left(\frac{\kappa'}{\kappa^2\tau}\right)' = 0 \neq \frac{\tau}{\kappa} = -\frac{\beta}{\alpha}$$

Finalmente, la curva (que resulta ser una hélice regular) **no** está contenida en una esfera.

■

(13) *a*) Considere una curva Γ parametrizada por $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$. Demuestre que la curva está comprendida en una esfera centrada en $\vec{c}$ si y solo si los planos normales de la curva pasan por $\vec{c}$.

b) Demuestre que todos los planos normales a la curva

$$\vec{r}(t) = \Big(a\sin^2(t), a\sin(t)\cos(t), a\cos(t)\Big)$$

con $t \in [0, 2\pi)$ y a una constante positiva pasan por el origen.

c) Para la curva del apartado anterior, pruebe que dicha curva está contenida en una esfera. Calcule su centro y su radio.

Solución:

a) La ecuación del plano normal en el punto $\vec{r}(t)$ está dada por:

$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Si todos los planos normales pasan por un punto $\vec{c}$ entonces, para todo t, se cumple que:

$$(\vec{c} - \vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Notemos que:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\|\vec{c} - \vec{r}\|^2\Big) &= \frac{d}{dt}\Big((\vec{c} - \vec{r}) \cdot (\vec{c} - \vec{r})\Big) \\ &= 2(\vec{c} - \vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} \\ &= 0\end{aligned}$$

Entonces, la expresión $\|\vec{c}-\vec{r}\|^2$ es una constante positiva (pues está al cuadrado), digamos R^2. Así,

$$\|\vec{r}(t) - \vec{c}\|^2 = R^2$$

que corresponde a la ecuación de una esfera de centro en $\vec{c}$ y radio R.

b) Como mencionamos previamente, la ecuación del plano normal en $\vec{r}(t)$ es:

$$(\vec{x} - \vec{r}) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Luego, el punto $\vec{x} = (0, 0, 0)$ pertenece al plano normal si y solo si

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

Notemos que:

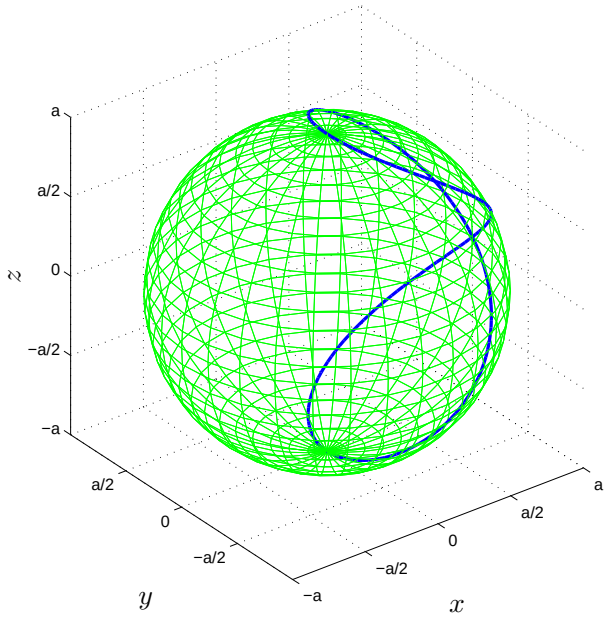
$$\begin{aligned}
\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= \Big(a\sin^2(t), a\sin(t)\cos(t), a\cos(t)\Big) \cdot \Big(a\sin(2t), a\cos(2t), -a\sin(t)\Big) \\
&= a^2\sin(t)\Big[\sin(t)\sin(2t) + \cos(t)\cos(2t) - \cos(t)\Big] \\
&= a^2\sin(t)\cos(t)\Big[2\sin^2(t) + \cos^2(t) - \sin^2(t) - 1\Big] \\
&= 0
\end{aligned}$$

Por tanto, el origen pertenece al plano normal $\forall t$.

c) Dado que todos los planos normales de la curva pasan por el origen, ella está contenida en una esfera con centro en $\vec{c} = (0, 0, 0)$. Lo anterior es consecuencia de la primera demostración de este problema. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
R &= \|\vec{r} - \vec{0}\| \\
&= a\sqrt{\sin^4(t) + \sin^2(t)\cos^2(t) + \cos^2(t)} \\
&= a\sqrt{\sin^4(t) + \Big[1 + \sin^2(t)\Big]\cos^2(t)} \\
&= a\sqrt{\sin^4(t) + \Big[1 + \sin^2(t)\Big]\Big[1 - \sin^2(t)\Big]} \\
&= a\sqrt{\sin^4(t) + 1 - \sin^4(t)} \\
&= a
\end{aligned}$$

Entonces, esta curva está contenida en una esfera de radio a y centro en el origen. Gráficamente,



■

(14) Considere las esferas de ecuaciones

$$E_1:\ x^2+y^2+(z-1)^2=1 \qquad \wedge \qquad E_2:\ x^2+(y-1)^2+z^2=1$$

La intersección de ambas esferas da como resultado una curva Γ.

a) Encuentre una parametrización $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ para Γ

b) Encuentre la curvatura y torsión de Γ

Solución:

a) De la primera y segunda ecuación se concluye que $z(t) = y(t)$. Así,

$$\begin{aligned} x(t)^2+y(t)^2+\Big(z(t)-1\Big)^2 &= 1 \\ x(t)^2+y(t)^2+\Big(y(t)-1\Big)^2 &= \\ x(t)^2+2\Big(y(t)^2-y(t)\Big) &= 0 \\ x(t)^2+\left[\sqrt{2}\left(y(t)-\frac{1}{2}\right)\right]^2 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \end{aligned}$$

De esta manera,

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\cos t}{\sqrt{2}} \\ \sqrt{2}\left(y(t) - \frac{1}{2}\right) &= \frac{\sin t}{\sqrt{2}} \\ y(t) &= \frac{1}{2}(1 + \sin t) \\ \\ z(t) &= y(t) \\ &= \frac{1}{2}(1 + \sin t) \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\alpha(t) = \left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}(1 + \sin t), \frac{1}{2}(1 + \sin t)\right), \ t \in [0, 2\pi)$$

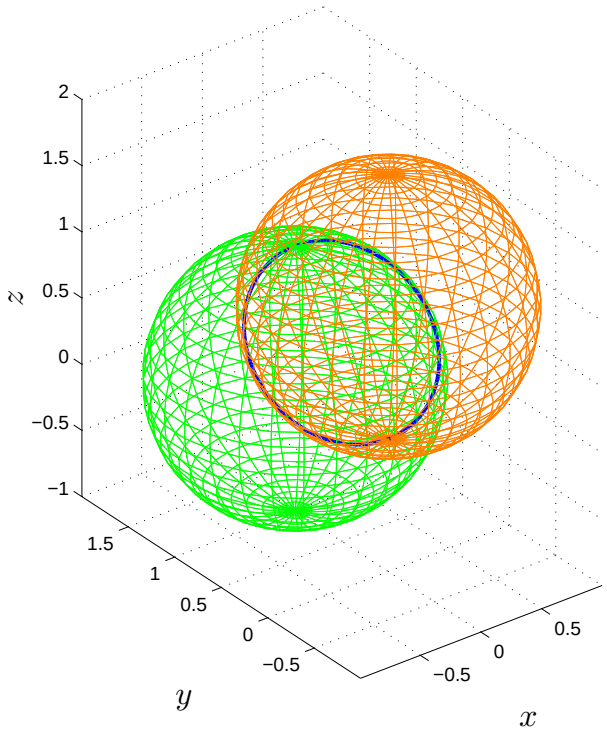
b) Notemos que:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= \left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}, \frac{\cos t}{2}, \frac{\cos t}{2}\right) \\ \alpha''(t) &= \left(-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}, -\frac{\sin t}{2}, -\frac{\sin t}{2}\right) \\ \alpha'(t) \times \alpha''(t) &= \left(0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

Por tanto, la curvatura es:

$$\kappa = \frac{\|\alpha' \times \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3} = \frac{1/2}{(1/\sqrt{2})^3} = \sqrt{2}$$

Como la curva Γ satisface que $z = y$ (ecuación de un plano), entonces la curva es plana y $\tau = 0$. Esto también se puede verificar haciendo los cálculos respectivos. Podemos concluir que, dado que la curva es plana y posee curvatura constante, se trata de una **circunferencia**. Gráficamente,



■

(15) Sea Γ una curva planar en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ con curvatura $\kappa(t) \neq 0$ para todo $t \in [a,b]$. Denotemos por $\hat{n}(t)$ su normal unitaria. Definamos la curva γ (llamada **evoluta** de Γ) parametrizada por

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(t)}\ \hat{n}(t), \quad t \in [a,b]$$

a) Pruebe que las tangentes de Γ y γ son perpendiculares para todo $t \in [a,b]$.

b) Sea $\alpha(t) = (t, t^2, 0)$. Calcule $\beta(t)$.

Solución:

a) Calculemos el vector tangente a γ en t:

$$\frac{d\beta}{dt}(t) = \frac{d\alpha}{dt}(t) + \frac{1}{\kappa(t)^2}\left(\kappa(t)\ \frac{d\hat{n}}{dt}(t) - \frac{d\kappa}{dt}(t)\ \hat{n}(t)\right)$$

Sea s el parámetro de longitud de arco. Por la regla de la cadena tenemos que:

$$\frac{d\alpha}{dt}(t) = \frac{d\alpha}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}(t) \quad \text{y} \quad \frac{d\hat{n}}{dt}(t) = \frac{d\hat{n}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}(t)$$

Pero el triedro móvil de Frenet-Serret cumple que,

$$\frac{d\alpha}{ds} = \hat{t} \quad y \quad \frac{d\hat{n}}{ds} = -\kappa\ \hat{t} + \tau\ \hat{b}$$

Puesto que la curva es plana su torsión $\tau \equiv 0$. Reemplazando estos datos obtenemos:

$$\frac{d\beta}{dt}(t) = \frac{ds}{dt}(t)\ \hat{t} - \frac{1}{\kappa(t)^2}\left(\kappa(t)^2\ \frac{ds}{dt}(t)\ \hat{t} + \frac{d\kappa}{dt}(t)\ \hat{n}(t)\right) = -\frac{\kappa'}{\kappa^2}\ \hat{n}$$

y el vactor tangente a γ es paralelo al vector normal unitario de Γ. Luego, el producto punto entre los vectores tangentes $\beta' \cdot \hat{t}$ queda igual a cero los vectores pues $\hat{t}$ y $\hat{n}$ son ortonormales.

b) Calculemos primero $\hat{t}(t)$, el vector tangente unitario:

$$\hat{t}(t) = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|} = \frac{(1, 2t, 0)}{\sqrt{1 + 4t^1}}$$

Sabemos que $\dfrac{d\hat{t}}{dt} = \dfrac{ds}{dt}\ \dfrac{d\hat{t}}{ds}$. Calculamos los términos participantes:

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{t}}{dt} &= -\frac{1}{2}\frac{8t}{(1+4t^2)^{3/2}}(1, 2t, 0) + \frac{(0, 2, 0)}{\sqrt{1+4t^2}} \\
&= \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}(-2t, 1, 0) \\
\frac{ds}{dt} &= \left|\frac{d\alpha}{dt}\right| = \sqrt{1+4t^2}
\end{aligned}$$

Entonces,

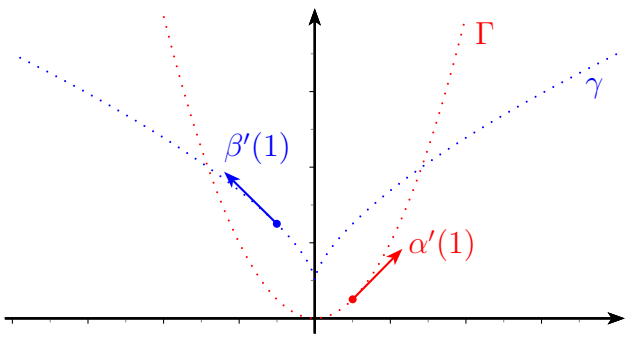
$$\frac{d\hat{t}}{ds} = \frac{2}{(1+4t^2)^2}(-2t, 1, 0) \quad \longrightarrow \quad \kappa = \left\|\frac{d\hat{t}}{ds}\right\| = \frac{2}{(1+4t^2)^{3/2}}$$

$$\longrightarrow \quad \hat{n} = \frac{(-2t, 1, 0)}{\|(-2t, 1, 0)\|} = \frac{(-2t, 1, 0)}{\sqrt{1+4t^2}}$$

La parametrización de γ resulta de reemplazar en la fórmula:

$$\begin{aligned}
\beta(t) &= (t, t^2, 0) + \frac{(1+4t^2)^{3/2}}{2}\ \frac{(-2t, 1, 0)}{\sqrt{1+4t^2}} \\
&= \left(-4t^3, 3t^2 + \frac{1}{2}, 0\right)
\end{aligned}$$

Gráficamente,



■

(16) Sea $\vec{\alpha}(s)$ una curva en el espacio parametrizada respecto a su longitud de arco, con $\hat{t}$, $\hat{n}$ y $\hat{b}$ sus vectores tangente, normal y binormal unitarios, respectivamente. Si la torsión de dicha curva (τ_α) es constante, demuestre que la curva

$$\boldsymbol{\beta}(s) = -\frac{\hat{n}(s)}{\tau_\alpha} + \int_0^s \hat{b}(t)\ dt$$

tiene curvatura constante.

Solución:

Notemos que el parámetro s corresponde al parámetro de longitud de arco de $\vec{\alpha}$, por lo que $\boldsymbol{\beta}$ no necesariamente está arcoparametrizada. Por tanto, la curvatura de esta curva está dada por:

$$\kappa_\beta = \frac{\|\boldsymbol{\beta}'(s) \times \boldsymbol{\beta}''(s)\|}{\|\boldsymbol{\beta}'(s)\|^3}$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}'(s) &= -\frac{-\kappa_\alpha(s)\hat{t}(s) + \tau_\alpha \hat{b}(s)}{\tau_\alpha} + \hat{b}(s) \\
&= \frac{\kappa_\alpha(s)}{\tau_\alpha}\hat{t}(s) \\
\boldsymbol{\beta}''(s) &= \frac{{\kappa_\alpha}'(s)}{\tau_\alpha}\hat{t}(s) + \frac{{\kappa_\alpha(s)}^2}{\tau_\alpha}\hat{n}(s) \\
\boldsymbol{\beta}'(s) \times \boldsymbol{\beta}''(s) &= \frac{{\kappa_\alpha(s)}^3}{{\tau_\alpha}^2}\hat{b}(s)
\end{aligned}$$

Así,

$$\kappa_\beta = \frac{\left(\dfrac{{\kappa_\alpha(s)}^3}{{\tau_\alpha}^2}\right)}{\left(\dfrac{\kappa_\alpha(s)}{|\tau_\alpha|}\right)^3} = |\tau_\alpha| = \text{cte}$$

■

(17) Considere la curva $\mathcal{C}$ en $\mathbb{R}^3$, cuya parametrización está dada por

$$\varphi(t) = \left(\frac{2}{3}t^{3/2}, 2t, t\right), \quad t \in (0, \infty)$$

a) Calcule la curvatura de $\mathcal{C}$ en $(2/3, 2, 1)$.

b) Determine el vector binormal unitario en $(2/3, 2, 1)$.

c) Pruebe que $\mathcal{C}$ es una curva plana.

Solución:

a) Sabemos que para una parametrización suave, la curvatura en t se calcula por la fórmula

$$\kappa(t) = \frac{\|\varphi''(t) \times \varphi'(t)\|}{\|\varphi'(t)\|^3}$$

Puesto que $\varphi(1) = (2/3, 2, 1)$, debemos calcular $\kappa(1)$.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) \times \varphi''(t) &= \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ t^{1/2} & 2 & 1 \\ \frac{1}{2}t^{-1/2} & 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{t}}(0, 1/2, -1) \\ \|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\| &= \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{t}} \end{aligned}$$

Además,

$$\|\varphi'(t)\| = \left\|(\sqrt{t}, 2, 1)\right\| = \sqrt{t+5}$$

Reemplazando y evaluando en $t = 1$ se obtiene que

$$\kappa(t) = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{t}(t+5)^{3/2}} \quad \Longrightarrow \quad \kappa(1) = \frac{\sqrt{5}}{12\sqrt{6}}$$

b) Sabemos que la binormal en t es

$$\hat{b}(t) = \frac{\varphi'(t) \times \varphi''(t)}{\|\varphi'(t) \times \varphi''(t)\|} = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}}(0, 1/2, -1) = \frac{2}{\sqrt{5}}\ (0, 1/2, -1)$$

Con ello se prueba que $\hat{b}(t)$ es un vector constante. En particular,

$$\hat{b}(1) = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(0, \frac{1}{2}, -1\right)$$

c) Como $\hat{b}(t)$ es constante, $\dfrac{d\hat{b}}{dt} = \vec{0}$. Si reparametrizamos por longitud de arco, se cumplirá también que $\dfrac{d\hat{b}}{ds} = \vec{0}$. Pero las ecuaciones de Frenet-Serret nos dicen que la torsión τ cumple que $\vec{0} = \dfrac{d\hat{b}}{ds} = -\tau\ \hat{n}(s)$. Luego, como la curva es regular, su normal no es idénticamente nula; por tanto, la curva tiene torsión cero y curvatura no nula, por lo tanto debe ser plana.

■

(18) Considere la curva $\mathbf{r}(t) = (2t, 1 - t^2, t^3/3)$.

a) Calcule los vectores tangente, normal y binormal unitario en cada punto de la curva.

b) Determine la ecuación de los planos tangente, normal y osculador en el punto $P(2, 0, 1/3)$.

Solución:

a) Notemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (2, -2t, t^2) \\ \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{4 + 4t^2 + t^4} \\ &= 2 + t^2 \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}''(t) = (0, -2, 2t)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t) &= (-2t^2, -4t, -4) \\ \|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\| &= 2(2 + t^2) \end{aligned}$$

Es directo calcular el vector tangente unitario:

$$\hat{t} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{\|\mathbf{r}'(t)\|} = \frac{1}{2 + t^2}(2, -2t, t^2)$$

Para calcular los dos vectores faltantes, utilizaremos dos maneras distintas:

- Para el binormal unitario,

$$\hat{b} = \frac{\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)}{\|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)\|} = -\frac{1}{2 + t^2}(t^2, 2t, 2)$$

  y, para el normal unitario,

$$\hat{n} = \hat{b} \times \hat{t} = \frac{1}{2 + t^2}(-2t, t^2 - 2, 2t)$$

- Para el normal unitario,

$$\begin{aligned} \hat{t}\,' &= -\frac{2t}{(2 + t^2)^2}(2, -2t, t^2) + \frac{1}{2 + t^2}(0, -2, 2t) \\ &= \frac{2}{(2 + t^2)^2}(-2t, t^2 - 2, 2t) \\ \|\hat{t}\,'\| &= \frac{2}{2 + t^2} \end{aligned}$$

  Así,

$$\hat{n} = \frac{\hat{t}\,'}{\|\hat{t}\,'\|} = \frac{1}{2 + t^2}(-2t, t^2 - 2, 2t)$$

  y

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} = -\frac{1}{2 + t^2}(t^2, 2t, 2)$$

b) Es claro que $P = \mathbf{r}(t=1)$. Los vectores unitarios en dicho punto son:

$$\hat{t}(1) = \frac{1}{3}(2,-2,1) \quad \wedge \quad \hat{n}(1) = \frac{1}{3}(-2,-1,2) \quad \wedge \quad \hat{b}(1) = \frac{1}{3}(-1,-2,-2)$$

El plano tangente en P tiene a $\hat{n}(1)$ como vector normal, luego una ecuación de dicho plano es:

$$-2(x-2) - 1(y-0) + 2(z-1/3) = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad 6x + 3y - 6z = 10$$

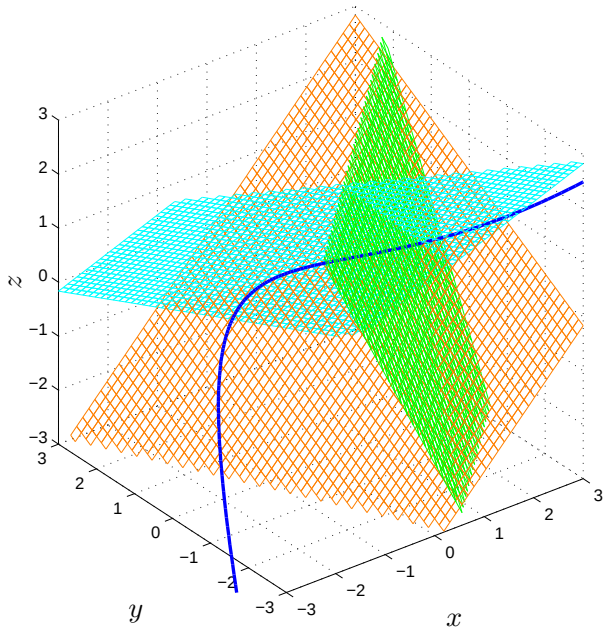
El plano normal en P tiene a $\hat{t}(1)$ como vector normal, luego una ecuación de dicho plano es:

$$2(x-2) - 2(y-0) + 1(z-1/3) = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad 6x - 6y + 3z = 13$$

El plano osculador en P tiene a $\hat{b}(1)$ como vector normal, luego una ecuación de dicho plano es:

$$-1(x-2) - 2(y-0) - 2(z-1/3) = 0 \qquad \longleftrightarrow \qquad 3x + 6y + 6z = 8$$

Gráficamente,



(●) Plano tangente, (●) Plano normal y (●) Plano osculador

■

(19) *a*) Considere la curva plana $\alpha(t) = (t, t^2/2 + 1, 0)$. Determine la ecuación del círculo osculador en $t = 1$.

b) Dada la espiral logarítmica de ecuación $r(\theta) = a\, e^{m\theta}$, $a > 0$, muestre que el radio de curvatura es

$$R = a\sqrt{1+m^2}\, e^{m\theta}$$

y que el centro de curvatura del círculo osculador está dado por

$$c_x = -ma\, e^{m\theta} \sin\theta \qquad \wedge \qquad c_y = ma\, e^{m\theta} \cos\theta$$

Solución:

a) Calculamos las derivadas de la curva:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (1,t,0) \\ \|\alpha'(t)\| &= \sqrt{1+t^2} \end{aligned}$$

$$\alpha''(t) = (0,1,0)$$

$$\alpha'(t)\times\alpha''(t) = (0,0,1)$$

Por tanto,

$$\kappa(t) = \frac{\|\alpha'(t)\times\alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3} = \frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}$$

Notemos que $\hat{b} = (0,0,1)$. Por otra parte,

$$\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,t,0)$$

Así, el vector normal es:

$$\hat{n} = \hat{b}\times\hat{t} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(-t,1,0)$$

Ahora bien, el centro del círculo osculador en $t=1$ está dado por:

$$\vec{c} = \alpha(1) + \frac{\hat{n}(1)}{\kappa(1)} = (1,3/2,0) + \frac{(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)}{1/2^{3/2}} = (-1,7/2,0)$$

y el radio de dicho círculo es:

$$R = \frac{1}{\kappa(1)} = 2^{3/2} = 2\sqrt{2}$$

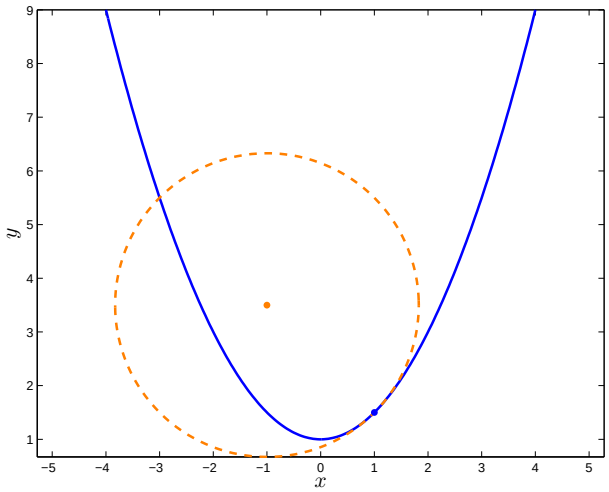
Dado que el vector binormal unitario es $(0,0,1)$, el círculo osculador tiene por ecuación:

$$(x+1)^2 + \left(y-\frac{7}{2}\right)^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

Parametrizando dicho círculo,

$$\mathbf{r}(t) = \left(2\sqrt{2}\cos t - 1, 2\sqrt{2}\sin t + \frac{7}{2}, 0\right),\ t\in[0,2\pi)$$

Gráficamente,



b) Si tenemos una curva descrita en coordenadas polares $r = r(\theta)$, entonces tiene una parametrización dada por

$$\mathbf{r}(\theta) = \Big(r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta, 0\Big)$$

Así,

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}' &= \Big(r'\cos\theta - r\sin\theta, r'\sin\theta + r\cos\theta, 0\Big) \\
\|\mathbf{r}'\| &= \sqrt{r^2 + (r')^2} \\
\mathbf{r}'' &= \Big((r'' - r)\cos\theta - 2r'\sin\theta, (r'' - r)\sin\theta + 2r'\cos\theta, 0\Big) \\
\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' &= \Big(0, 0, 2(r')^2 - rr'' + r^2\Big)
\end{aligned}$$

Con ello, la curvatura viene dada por:

$$\kappa(\theta) = \frac{\|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''\|}{\|\mathbf{r}'\|^3} = \frac{\Big|2(r')^2 - rr'' + r^2\Big|}{\Big(r^2 + (r')^2\Big)^{3/2}}$$

En este caso,

$$\begin{aligned}
2(r')^2 - rr'' + r^2 &= 2a^2m^2\, e^{2m\theta} - a^2m^2\, e^{2m\theta} + a^2\, e^{2m\theta} \\
&= a^2(1 + m^2)\, e^{2m\theta} \\
r^2 + (r')^2 &= a^2\, e^{2m\theta} + a^2m^2\, e^{2m\theta} \\
&= a^2(1 + m^2)\, e^{2m\theta} \\
\kappa(\theta) &= \frac{a^2(1 + m^2)\, e^{2m\theta}}{a^3(1 + m^2)^{3/2}\, e^{3m\theta}} \\
&= \frac{1}{a\sqrt{1 + m^2}\, e^{m\theta}}
\end{aligned}$$

Por tanto, el radio de curvatura es

$$R(\theta) = a\sqrt{1 + m^2}\, e^{m\theta}$$

El centro del círculo osculador viene dado por:

$$\vec{c} = \mathbf{r}(\theta) + \frac{\hat{n}(\theta)}{\kappa(\theta)}$$

Como la curva es plana, $\hat{b} = (0, 0, 1)$. Así,

$$\hat{n} = \hat{b} \times \frac{\mathbf{r}'}{\|\mathbf{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + (r')^2}}\Big(-r'\sin\theta - r\cos\theta, r'\cos\theta - r\sin\theta, 0\Big)$$

En nuestro caso,

$$\hat{n}(\theta) = \frac{1}{\sqrt{1+m^2}}\Big(- m\sin\theta - \cos\theta, m\cos\theta - \sin\theta, 0\Big)$$

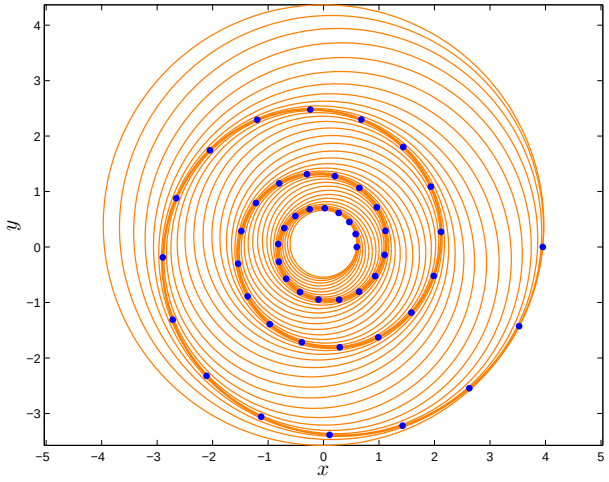
y

$$\vec{c}(\theta) = \Big(- am\, e^{m\theta}\sin\theta, am\, e^{m\theta}\cos\theta, 0\Big)$$

Por tanto, el centro de curvatura también describe una espiral. Podemos parametrizar a los círculos osculadores en $\theta = \theta_0$ fijo como

$$x(t) = R(\theta_0)\cos t + c_x(\theta_0) \qquad \wedge \qquad y(t) = R(\theta_0)\sin t + c_y(\theta_0)$$

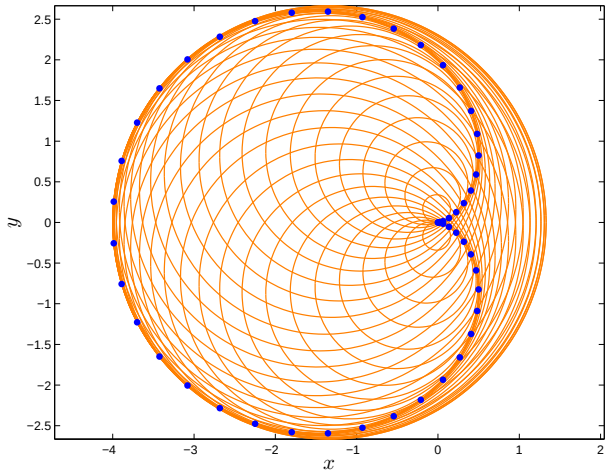
con $t \in [0, 2\pi)$. La siguiente figura muestra 50 círculos osculadores (•) para la espiral logarítmica spiral $r = a\, e^{m\theta}$, para $a = 0.6$ y $m = 0.1$ fijos. La espiral se puede apreciar claramente, pese a que no está dibujada explícitamente, sino únicamente los puntos de tangencia (•):



Se puede hacer lo mismo para una cardioide de ecuación $r = 2a(1 - \cos\theta)$, y descubrir que:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \frac{8a}{3}\sin(\theta/2) \\ c_x(\theta) &= \frac{4a}{3}\cos^2(\theta/2)\cos(\theta) - \frac{4a}{3} \\ c_y(\theta) &= \frac{4a}{3}\cos^2(\theta/2)\sin(\theta) \end{aligned}$$

Gráficamente, para $a = 1$,



■

(20) *a*) Sea $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ una curva parametrizada por arco, y denotemos por $\hat{n}$ su normal unitaria. Pruebe que si

$$\gamma(s) \times \hat{n}(s) = \vec{0}$$

para todo $s \in [0, \ell]$, entonces la curva es un círculo.

b) Para una curva $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$, también parametrizada por arco, suponga que existe un vector unitario constante $\hat{e}$ tal que

$$\gamma(s) \cdot \hat{e} = 0$$

para todo $s \in [0, \ell]$. Demuestre que $\kappa(s) \equiv 0$ o bien $\tau(s) \equiv 0$, para todo $s \in [0, \ell]$.

c) Encuentre una curva $\gamma(s)$, con $s \in (0, \infty)$ el arcoparámetro, tal que la curvatura sea $\kappa(s) = \dfrac{1}{\sqrt{s}}$.

Solución:

a) Como la normal unitaria $\hat{n}$ está definida para todo $s \in [0, \ell]$, entonces la curvatura $\kappa(s) \neq 0$. Por otro lado, la ecuación

$$\gamma(s) \times \hat{n}(s) = 0$$

dice que γ es siempre paralelo a su normal; i.e. existe $\alpha : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\gamma(s) = \alpha(s)\hat{n}(s)$$

Derivando esta última ecuación,

$$\hat{t} = \alpha'(s)\hat{n} + \alpha(-\kappa\hat{t} + \tau\hat{b}) \quad \longrightarrow \quad (1 + \alpha\kappa)\hat{t} - \alpha'\hat{n} - \alpha\tau\hat{b} = 0$$

Como los vectores de Frenet-Serret son linealmente independientes, los ponderadores de ellos deben ser nulos. Por tanto:

$$\alpha' = 0 \quad \longrightarrow \quad \alpha = \alpha_0 \neq 0$$

pues la curva no es idénticamente nula. Con ello

$$1 + \alpha_0\kappa = 0 \quad \longrightarrow \quad \kappa = -\frac{1}{\alpha_0}$$

y la curvatura es constante. Finalmente,

$$\alpha_0 \tau = 0 \quad \longrightarrow \quad \tau = 0$$

Por tanto, como la curva tiene torsión nula y curvatura constante, se concluye que es un **círculo**.

b) Derivando la ecuación $\gamma(s) \cdot \hat{e} = 0$,

$$\hat{t} \cdot \hat{e} = 0$$

pues $\hat{e}$ es constante. Derivando una segunda oportunidad,

$$\kappa \hat{n} \cdot \hat{e} = 0$$

Si $\kappa(s) \neq 0$, entonces:

$$\hat{n} \cdot \hat{e} = 0$$

y, además, por hipótesis $\hat{t} \cdot \hat{e} = 0$. Luego, para cada $s \in [0, \ell]$, con $\kappa(s) \neq 0$, los vectores $\hat{t}, \hat{n}$ son perpendiculares $\hat{e}$. Esto implica que $\hat{b} = \pm \hat{e}$, que es constante. De aquí deducimos que si $\kappa(s) \neq 0$, entonces $\tau(s) \equiv 0$.

c) Dado que podemos elegir cualquier curva, supondremos que es plana y $z(s) = 0$. Sea $\hat{t}(s)$ el vector tangente unitario. Este vector puede escribirse como

$$\hat{t}(s) = \Big(\cos\theta(s), \sin\theta(s), 0 \Big)$$

pues es unitario, con $\theta(s)$ una función por determinar. De las ecuaciones de Frenet-Serret,

$$\kappa(s) = \left\| \frac{d\hat{t}}{ds} \right\| = \theta'(s) \quad \longrightarrow \quad \theta(s) = 2\sqrt{2}$$

Entonces,

$$\frac{d\gamma}{ds} = \hat{t}(s) = \Big(\cos(2\sqrt{s}), \sin(2\sqrt{s}), 0 \Big)$$

y por tanto,

$$x'(s) = \cos(2\sqrt{s}) \qquad \wedge \qquad y'(s) = \sin(2\sqrt{s})$$

Si integramos,

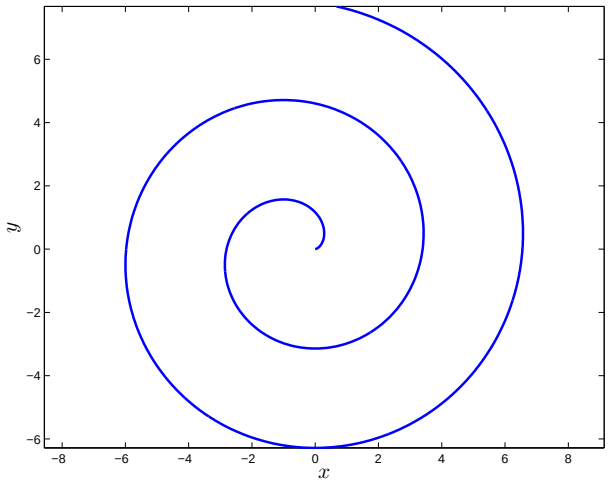
$$\begin{aligned} x(s) &= \int_{0^+}^{s} \cos(2\sqrt{u})\ du \\ &= \frac{1}{2}\cos(2\sqrt{s}) + \sqrt{s}\sin(2\sqrt{s}) - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(s) &= \int_{0^+}^{s} \sin(2\sqrt{u})\ du \\ &= \frac{1}{2}\sin(2\sqrt{s}) - \sqrt{s}\cos(2\sqrt{s}) \end{aligned}$$

Finalmente, una curva que satisface lo pedido es:

$$\gamma(s) = \left(\frac{1}{2}\cos(2\sqrt{s}) + \sqrt{s}\sin(2\sqrt{s}) - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sin(2\sqrt{s}) - \sqrt{s}\cos(2\sqrt{s}), 0 \right)$$

con $s \in (0, \infty)$. Gráficamente,



■

(21) **[Propuesto]**

a) Sea γ una curva plana y sea ℓ la tangente a la curva en un punto P. Sea L una recta paralela a la recta normal en P que se ubica a una distancia d de dicho punto. Finalmente, sea h el largo del segmento determinado por ℓ y γ sobre L. Probar que

$$\kappa(P) = \lim_{d\to 0} \frac{2h}{d^2}$$

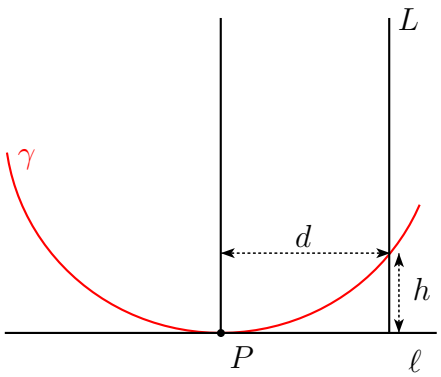
b) Probar que si γ es una curva cerrada contenida en un disco de radio r, entonces existe un punto P en la curva donde

$$\kappa(P) \geq \frac{1}{r}$$

Solución:

a) Parametricemos γ por longitud de arco y consideremos un sistema de coordenadas tal que el centro esté en P y los ejes del sistema estén en la dirección de los vectores tangente y normal a la curva en dicho punto. Sea $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ nuestra parametrización. Hacemos desarrollo de Taylor para una vecindad del origen.

$$\gamma(s) = \gamma(0) + \gamma'(0)s + \gamma''(0)\frac{s^2}{2} + R(\gamma), \quad \text{con } \lim_{s\to 0} \frac{R(\gamma)}{s^2} = \vec{0}$$



Notemos que,

$$\gamma'(0) = \hat{t}(0) = (1,0) \quad \text{y} \quad \gamma''(s) = \kappa(0)\ \hat{n}(0) = \kappa(0)\ (0,1)$$

con esta información, podemos deducir que

$$\Big[x(s),\ y(s)\Big] = \Big[s + R_x,\ \kappa(0)\frac{s^2}{2} + R_y\Big], \quad \text{donde} R(\gamma) = (R_x, R_y)$$

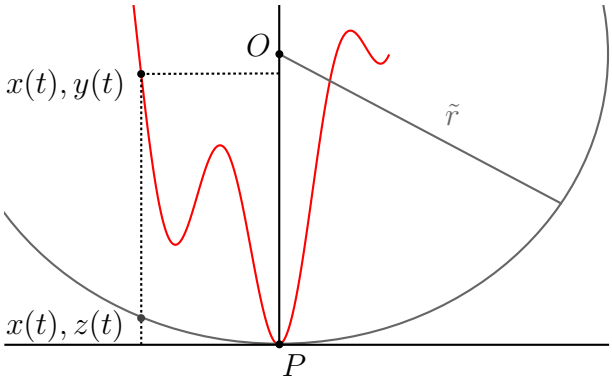
Entonces, dado que $\kappa(0) = \kappa(P)$, y trabajando sobre la expansión de Taylor:

$$\kappa(P) = \lim_{s\to 0}\left(\frac{2y(s)}{s^2} - \frac{2R_y}{s^2}\right) = \lim_{s\to 0}\frac{2y(s)}{s^2} - 2\lim_{s\to 0}\frac{R_y}{s^2}$$

Como el resto tiende al vector nulo, cada una de sus componentes tiende a cero. Además, sabemos que por enunciado $y(s) = h$, con h variable dependiendo de la posición de d, y que $s = x(s) = d$, con d variable. Por tanto,

$$\kappa(P) = \lim_{d\to 0}\frac{2h}{d^2}$$

b) Sean O el centro del disco de radio r y P el punto sobre la curva a mayor distancia de O. Consideremos el círculo $\mathcal{C}$ de radio $|P - O| = \tilde{r}$ y centro O. Entonces, γ está contenida en la región que encierra $\mathcal{C}$. Consideremos un nuevo sistema de coordenadas cuyo origen coincida con el punto p y cuyos ejes estén en la dirección del vector tangente y normal a la curva en dicho punto.



Luego, si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, sea $\beta(t) = (x(t), z(t))$ una parametrización del círculo $\mathcal{C}$. Debido a que la curva está contenida en la región que encierra $\mathcal{C}$, se tiene que:

$$|z(t)| \leq |y(t)|$$

Usando la fórmula del apartado anterior para la curvatura evidenciamos que

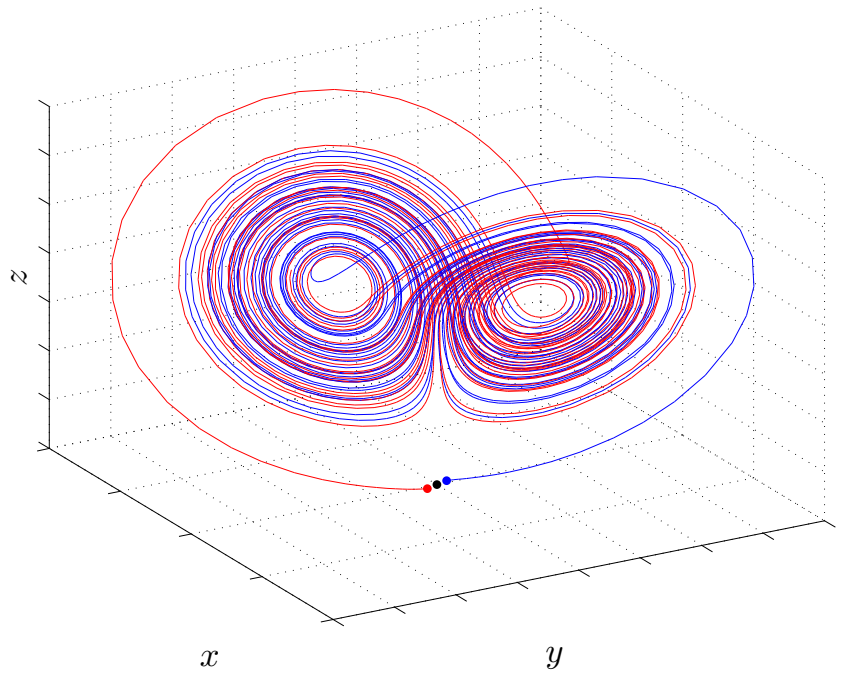
$$\kappa(P) = \lim_{s\to 0}\frac{2y(s)}{s^2} \geq \lim_{s\to 0}\frac{2z(s)}{s^2} = \kappa_\beta(P) = \frac{1}{\tilde{r}} \geq \frac{1}{r}$$

■

5

Funciones escalares de varias variables

Atractor de Lorenz (Edward Lorenz, 1963)



Sección I

Cálculo diferencial en funciones escalares

I.i. Nociones topológicas en $\mathbb{R}^n$

(1) *a*) Demuestre que el conjunto vacío $\emptyset$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$. (**Sugerencia:** si el vacío no fuese abierto...)

b) Demuestre que $\mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^n$.

Solución:

Antes que todo, algunas definiciones:

> **Definición (punto interior).** Se dice x_0 es *punto interior de* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe un $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset U$.
>
> **Definición (conjunto abierto).** Se dice que un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es *abierto* si todos sus puntos son interiores.
>
> **Definición (punto exterior).** Se dice x_0 es *punto exterior de* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe un $r > 0$ tal que $B_r(x_0) \subset U^c$.
>
> **Definición (punto frontera).** Se dice x_0 es *punto frontera de* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si $\forall r > 0$, $B_r(x_0)$ posee puntos en U y en U^c. Al conjunto de puntos frontera se les llama **frontera**.
>
> **Definición (conjunto cerrado).** Se dice que un conjunto $V \subseteq \mathbb{R}^n$ es *cerrado* si su complemento es abierto, si contiene a su frontera o si cada sucesión convergente de términos en V converge a un valor dentro del conjunto V.

a) Un conjunto A es no abierto si existe un punto en el conjunto que no es punto interior de A. El vacío no satisface esta condición, pues no contiene punto alguno que no sea interior (de hecho, no posee punto alguno). Luego, el vacío $\emptyset$ es abierto.

b) Un conjunto A es cerrado contiene los límites de toda sucesión convergente con términos en $a_n \in A$. El vacío cumple dicha propiedad, pues contiene a todo el conjunto de las sucesiones de términos en el vacío, que es vacío. Luego, $\emptyset$ es cerrado; por tanto, $\emptyset^c = \mathbb{R}^n$ es abierto.

■

(2) Determine, en cada caso, si el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^2$ es abierto, cerrado o no abierto ni cerrado, justificando su respuesta.

a) $A = \{(x, y) : |x| + |y| < 1\}$

b) $A = \{(x, y) : y = x\}$

c) $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \geq 0\}$

d) $A = \{(x, y) : 2 < x < 4,\ 2 < y \leq 5\}$

e) $A = \{(x, y) : e^{xy} < 0\}$

Solución:

a) Abierto.

b) Cerrado.

c) Abierto y cerrado (es todo el espacio).

d) Ni abierto ni cerrado.

e) Abierto y cerrado (es el conjunto vacío).

■

I.ii. Límites

(1) Calcule los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sin(x)\sin(y)}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{1-\cos(2xy^2)}{2(x^2+y^4)^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

f) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2y+y^2z}{x^2+2y^2+3z^2}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^3\sin(x)}{x^4+y^2}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$

Solución:

a) Aplicando directamente las propiedades del producto,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sin(x)\sin(y)} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{xy}\frac{x}{\sin(x)}\frac{y}{\sin(y)} = 1$$

b) Dado que el grado del denominador es menor al del numerador, es probable que el límite sea nulo. Usemos, como trayectoria de acercamiento al origen, la familia de curvas $y = mx^k$. Así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^2x^{2k}}{x^2+m^2x^{2k}} = \lim_{x\to 0} \frac{m^2x^{2k}}{1+m^2x^{2k-2}} = 0$$

por lo menos, para $k > 2$. Ahora, probaremos que el límite es cero por definición: sea $\varepsilon > 0$ y $\delta = \sqrt{\varepsilon}$. Así,

$$\|(x,y) - (0,0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \sqrt{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad x^2 + y^2 < \varepsilon$$

Por otra parte, $x^2, y^2 \leq x^2 + y^2$, y con ello:

$$|f(x,y) - 0| = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2 \leq \varepsilon \quad \longrightarrow \quad |f(x,y) - 0| \leq \varepsilon$$

que es lo que se buscaba probar.

c) Sea

$$f(x,y) = \frac{1 - \cos(2xy^2)}{2(x^2 + y^4)^2} = \frac{2\sin^2(xy^2)}{2(x^2 + y^4)^2} = \underbrace{\frac{\sin^2(xy^2)}{(xy^2)^2}}_{\phi(x,y)} \cdot \underbrace{\frac{(xy^2)^2}{(x^2 + y^4)^2}}_{\psi(x,y)}$$

Notamos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \phi(x,y) = 1$$

Para la segunda función, verificamos las curvas $y = x,\ x = y^2$:

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \psi(x, y = x) &= \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{(x^2 + x^4)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^4 + 2x^6 + x^8} = 0 \\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \psi(x = y^2, y) &= \lim_{y\to 0} \frac{y^8}{(2y^4)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^8}{4y^8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Como ambos límites son distintos, el límite de $f(x,y)$ no existe.

d) Consideremos el cambio a coordenadas polares, de la forma:

$$x = r\cos\theta \qquad \wedge \qquad y = r\sin\theta$$

Es claro que $(x,y) \to (0,0) \equiv r \to 0, \forall\theta$. Reescribiendo el límite,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta}{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = \lim_{r\to 0} \frac{\cos^2\theta - \sin^2\theta}{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \cos 2\theta$$

Como este último valor depende del ángulo, concluimos que el límite no existe.

e) Nuevamente empleamos el cambio a polares. Así,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^4\cos^2\theta\sin^2\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r\ \cos^2\theta\sin^2\theta = 0$$

pues tenemos un término acotado, multiplicado por otro que converge a cero.

f) Tenemos que:

$$0 \leq \left| \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \right| \leq \frac{x^2|y| + y^2|z|}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \leq \frac{x^2|y|}{x^2} + \frac{y^2|z|}{2y^2} = |y| + \frac{|z|}{2}$$

y, como está última expresión tiende a cero, el Teorema del Sandwich garantiza que:

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{0}} \left| \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} \right| = 0 \quad \longrightarrow \quad \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2y + y^2z}{x^2 + 2y^2 + 3z^2} = 0$$

g) Aplicamos valor absoluto:

$$0 \leq \left| \frac{y^3 \sin(x)}{x^4 + y^2} \right| = \frac{|y^3||\sin(x)|}{x^4 + y^2} \leq \frac{|y^3|}{x^4 + y^2} \leq \frac{|y^3|}{y^2} \leq |y|$$

Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, se cumple que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 \sin(x)}{x^4 + y^2} = 0$$

h) Como el grado del numerador es superior al denominador, creemos que el límite es nulo. Lo demostraremos por definición: requerimos que

$$\|(x,y) - (0,0)\| < \delta \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Ahora,

$$\left| \frac{x^2y}{x^2 + y^2} - 0 \right| = \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

Así, basta tomar $\varepsilon = \delta$ para completar la demostración.

■

(2) a) Determine si existe $k > 0$ tal que el siguiente límite exista:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^k}{x - y^2}$$

b) Calcule el límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^3 + y^3}}$$

Solución:

a) Si nos acercamos al origen por la recta $x = 0$, el límite vale:

$$\lim_{y\to 0} \frac{0 \cdot y^k}{0 - y^2} = 0$$

pues $k > 0$. Consideremos la curva –algo sofisticada– $x(y) = y^2 + y^{k+2}$ tal que $x \to 0$ si $y \to 0$. Así,

$$\lim_{y\to 0} \frac{(y^2 + y^{k+2})y^k}{(y^2 + y^{k+2}) - y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 + y^{k+2}}{y^2} = \lim_{y\to 0} 1 + y^k = 1$$

sin importar el valor de $k > 0$. Concluimos, entonces, que **no existe** valor de $k > 0$ que garantice la existencia del límite pedido.

b) Consideremos un camino simple de la forma $y = mx$. Con ello,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sqrt{|y|}}{\sqrt{x^3 + y^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x\sqrt{|mx|}}{\sqrt{x^3 + m^3x^3}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|m|}{\sqrt{1 + m^3}}$$

de donde se hace evidente que el límite pedido no existe, pues depende del valor de m elegido.

■

I.iii. Continuidad

(1) Estudie la continuidad, en el origen, de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y}{x^6 + x^4y^6 + y^2} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

b) $g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2y^6)}{x^4 + y^6} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

c) $h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^4 + y^4} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Solución:

a) f es continua en $(0,0)$ si y solo si $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Mediante límites iterados, tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

mientras que si usamos la curva $y = x^3$, obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^3) = \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6 + x^{22} + x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{2 + x^{16}} = \frac{1}{2}$$

De esta forma, el límite en cuestión no existe; por tanto, $f(x, y)$ es discontinua en el origen.

b) Notemos que:

$$\left|\frac{\sin(x^2y^6)}{x^4 + y^6}\right| = \left|\frac{\sin(x^2y^6)}{x^2y^6}\right| \left|\frac{x^2y^6}{x^4 + y^6}\right| = \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| \left|\frac{x^2y^6}{x^4 + y^6}\right|$$

con $u = x^2y^6$. Es claro que $(x, y) \to (0, 0) \equiv u \to 0$. Por otro lado,

$$0 \leq \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| \left|\frac{x^2y^6}{x^4 + y^6}\right| \leq \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| \left|\frac{x^2y^6}{y^6}\right| = \left|\frac{\sin(u)}{u}\right| x^2$$

Como $\lim\limits_{u\to 0} \dfrac{\sin(u)}{u} = 1$, entonces:

$$0 \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{\sin(x^2y^6)}{x^4 + y^6}\right| \leq \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 = 0$$

de lo cual se deduce que el límite es cero. Por tanto, la función es continua.

c) En este caso, reemplacemos por coordenadas polares:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x, y) = \lim_{r\to 0} r \underbrace{\frac{\cos^3\theta \sin^2\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}}_{\phi(\theta)}$$

Si $\phi(\theta)$ fuese acotada, el límite sería nulo y la función h sería continua. Es trivial probar que el numerador es acotado –pues es el producto de dos funciones continuas acotadas–, pero el denominador debe ser analizado con cuidado.

$$\left.\begin{array}{rcl} -1 \leq \sin\theta \leq 1 & \to & 0 \leq \sin^4\theta \leq 1 \\ -1 \leq \cos\theta \leq 1 & \to & 0 \leq \cos^4\theta \leq 1 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad 0 \leq \cos^4\theta + \sin^4\theta \leq 2$$

Ahora, debemos probar que no existe $\theta \in \mathbb{R}$ tal que el denominador se anule:

$$\begin{aligned} \cos^4\theta + \sin^4\theta = 0 \quad &\leftrightarrow \quad \cos^4\theta + 2\sin^2\theta\cos^2\theta + \sin^4\theta = 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &\leftrightarrow \quad \Big(\cos^2\theta + \sin^2\theta\Big)^2 = 2\sin^2\theta\cos^2\theta \\ &\leftrightarrow \quad \frac{1}{2} = \sin^2\theta\cos^2\theta \\ &\leftrightarrow \quad \sqrt{2} = \sin 2\theta \end{aligned}$$

lo que es una contradicción. Así, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que:

$$0 < \cos^4\theta + \sin^4\theta \leq 2 \quad \longrightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} \leq M < \infty$$

Por lo tanto, $\phi(\theta)$ es acotada y la función $h(x, y)$ es continua en el origen.

■

(2) Determine el valor de las constantes α, β de modo tal que f sea continua en cada caso:

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(x^2+y^4\right)}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^4}\right)} & , \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \alpha & , \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3} & , \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \beta & , \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Solución:

$a)$ Notemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4} \cdot \frac{x^2+y^4}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^4}\right)}$$

Analicemos los límites por separado: para el primero, sea $u = x^2+y^4$ tal que $(x,y) \to (0,0) \equiv u \to 0$; así,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin\left(x^2+y^4\right)}{x^2+y^4} = \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$$

Por otra parte, sea $\gamma = \sqrt{x^2+y^4}$,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^4}{1-\cos\left(\sqrt{x^2+y^4}\right)} = \lim_{\gamma\to 0} \frac{\gamma^2}{1+\cos\gamma} = 2$$

Finalmente, como ambos límites existen de manera independiente, se cumple que:

$$\alpha = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1 \cdot 2 = 2$$

$b)$ Dado que el grado del denominador es superior al del numerador –en el coeficiente x–, pensamos que este límite no existe. Para probarlo, usemos las curvas $x = t^a,\ y = t^b$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{t^{4(a+b)}}{\left(t^{4a}+t^{2b}\right)^3} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{4(a+b)}}{t^{6b}\left(t^{4a-2b}+1\right)^3}$$

Si $4(a+b) = 6b \to b = 2a$, entonces

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^{4(a+b)}}{t^{6b}\left(t^{4a-2b}+1\right)^3} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(1+1)^3} = \frac{1}{8}$$

Pero si tomamos límites iterados,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} f(x,y)\right) = 0$$

Como el límite no existe, entonces

$$\nexists\, \beta \in \mathbb{R} \text{ tal que } f(x,y) \text{ sea continua}$$

■

I.iv. Diferenciabilidad

(1) Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^k}{x^2+y^2} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Determine los valores de k de modo tal que la función sea continua en el origen.

b) Determine los valores de k de modo tal que la función sea diferenciable en el origen.

Solución:

a) Tomando coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \qquad \wedge \qquad y = r\sin\theta$$

Así,

$$\lim_{r\to 0} f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 0} \frac{r^{k+1}\cos\theta\sin^k\theta}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^{k-1}\cos\theta\sin^k\theta$$

por lo que, para $k-1>0$, la función tiende a 0. Si $k<1$, la función no es acotada en el origen y para $k=1$, el límite depende de θ. Por tanto, la función es continua si y solo si

$$k > 1$$

b) Si la función es diferenciable, necesariamente debe ser continua; de esta forma, $k>1$. Ahora,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0 \qquad \wedge \qquad \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0$$

y ambas derivadas parciales existen y son iguales en el origen. Finalmente, se debe cumplir que:

$$\lim_{(h,t)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+t)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,t)}{\sqrt{h^2+t^2}} = \lim_{(h,t)\to(0,0)} \frac{\dfrac{ht^k}{h^2+t^2}}{\sqrt{h^2+t^2}} = 0$$

Haciendo el cambio a polares,

$$\lim_{r\to 0} \frac{r^{k+1}\cos\theta \sin^k\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r^{k-2}\cos\theta\sin^k\theta$$

vemos que el límite converge a 0 si y solo si

$$k > 2$$

■

(2) Sea $w = f(x,y,z) = 2xy^2 + x^2z$. Demostrar que es diferenciable.

Solución:

Notemos que:

$$w_x = \frac{\partial}{\partial x}\Big(2xy^2 + x^2z\Big) = 2y^2 + 2xz$$

$$w_y = \frac{\partial}{\partial y}\Big(2xy^2 + x^2z\Big) = 4xy$$

$$w_z = \frac{\partial}{\partial z}\Big(2xy^2 + x^2z\Big) = x^2$$

Como todas las derivadas parciales son continuas (pues son polinomios), entonces la función w es diferenciable. ■

(3) *a*) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{, si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{, si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Pruebe que, en el punto $(0,0)$, f posee derivada direccional en todas las direcciones posibles del plano. Determine la dirección de mayor derivada direccional.

b) Demuestre, por definición, que $g(x,y) = \sin(x+y)$ es diferenciable en $(0,0)$.

Solución:

a) Sea el vector unitario $\hat{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$. Entonces:

$$D_{\hat{u}}f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^3\cos^2\theta\sin\theta}{t^3} = \cos^2\theta\sin\theta$$

Por lo tanto, la derivada direccional existe en toda dirección, y vale $g(\theta) = \cos^2\theta\sin\theta$.

Para maximizar la función g, derivamos e igualamos a cero –pues en los extremos g es nula– obteniendo:

$$g'(\theta) = 0 \;\leftrightarrow\; \theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

b) Notar que:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial y} = \cos(x+y)$$

y por tanto ambas derivadas valen 1 en el origen. Entonces, se debe cumplir que:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h+k) - \sin(0+0) - h - k}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h+k) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Recordando que $\sin(t) = t - \frac{t^3}{6} + \mathcal{O}(t^3)$,

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(h+k) - (h+k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{-\frac{(h+k)^3}{6} + \mathcal{O}(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

■

(4) *a*) Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación lineal dada. Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{u}}$ para $f(\vec{x}) = \vec{x} \cdot T(\vec{x})$.

b) Considere las superficies en $\mathbb{R}^3$ dadas por las ecuaciones

$$y = f(x)\ , \quad z^2 + 2xz + y = 0$$

Determine la función $f(x)$, si se sabe que ambas superficies tienen el mismo plano tangente en todo punto donde se intersectan.

c) Sea $f(x,y)$ diferenciable. La recta tangente a la curva de nivel de f que pasa por (x_0, y_0) tiene pendiente 2. Determine el valor de $f_x(x_0, y_0)$ sabiendo que $f_y(x_0, y_0) > 0$ y que la derivada direccional máxima en dicho punto es igual a 4.

Solución:

a) Por la linealidad del operador,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(\vec{x}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\vec{x}+t\hat{u}) - f(\vec{x})}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\vec{x}\cdot T(\vec{x}) + t\Big(\hat{u}\cdot T(\vec{x}) + \vec{x}\cdot T(\hat{u})\Big) + t^2 \hat{u}\cdot T(\hat{u}) - \vec{x}\cdot T(\vec{x})}{t} \\
&= \hat{u}\cdot T(\vec{x}) + \vec{x}\cdot T(\hat{u})
\end{aligned}$$

b) En los puntos de intersección se debe satisfacer que $z^2+2xz+f(x)=0$, y además los respectivos vectores normales deben ser paralelos:

$$(-f'(x),1,0) \parallel (2z,1,2x+2z)$$

Así, $x+z=0$ y $f'(x)=2x$, con lo cual $f(x)=x^2+c$. Entonces, la intersección da $(x+z)^2+c=0 \to c=0$. Así,

$$f(x)=x^2$$

c) Sean $a=f_x(x_0,y_0)$ y $b=f_y(x_0,y_0)$. Así, se pide hallar el valor de a, sabiendo que $b>0$. Como el vector $\nabla f(x_0,y_0)=(a,b)$ es perpendicular a la curva de nivel de f en (x_0,y_0) y por tanto su pendiente debe ser $-\dfrac{1}{2}$:

$$\frac{b}{a}=-\frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad a+2b=0$$

Por otro lado, se tiene que la derivada direccional máxima de f en (x_0,y_0) es:

$$\begin{aligned} \|\nabla f(x_0,y_0)\|=\sqrt{a^2+b^2}=4 \quad &\longrightarrow \quad a^2+b^2=16 \\ &\longrightarrow \quad (-2b)^2+b^2=16 \\ &\longrightarrow \quad b=\frac{4}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

ya que por hipótesis, $b>0$. Como $a=-2b$, obtenemos:

$$f_x(x_0,y_0)=-\frac{8}{\sqrt{5}}$$

■

(5) Sea

$$\phi(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x(1-\cos y)\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4} & \text{, si } (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & \text{, si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

a) Calcule la derivaba direccional de ϕ, en el origen, para una dirección cualquiera.

b) ¿Es diferenciable en el origen? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Sea $\hat{v}=(\cos\theta,\sin\theta)$ el vector unitario en una dirección arbitraria. Por definición, la derivada

direccional de ϕ en $(0,0)$ es, para $\sin\theta, \cos\theta \neq 0$,

$$\begin{aligned} D_{\hat{v}}\phi(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\phi(h\cos\theta, h\sin\theta) - \overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{h\cos\theta(1-\cos(h\sin\theta))|h|}{h^3(\cos^2\theta + h^2\sin^4\theta)} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\cos\theta}{\cos^2\theta + h^2\sin^4\theta} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta} \frac{|h|\sin\theta}{h} \end{aligned}$$

El primer límite es $1/\cos\theta$ –asumiendo que $\cos\theta \neq 0$–; en cuanto al segundo, si $y = h\sin\theta$:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta} = \lim_{y\to 0} \frac{1-\cos y}{y} = 0$$

por la regla de L'Hôpital y, como $\dfrac{|h|\sin\theta}{h}$ es acotado, llegamos a que:

$$\lim_{h\to 0} \frac{1-\cos(h\sin\theta)}{h\sin\theta} \frac{|h|\sin\theta}{h} = 0$$

Así, $D_{\hat{v}}\phi(0,0) = 0$ para todo $\theta \neq 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$, ya que dichos valores hacen que $\sin\theta = 0$ o $\cos\theta = 0$.

Ahora bien, en la dirección $\theta = 0, \pi$, el vector unitario es $\hat{v}_1 = (\pm 1, 0)$ y la correspondiente derivada es:

$$D_{\hat{v}_1}\phi(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\phi(\pm h, 0)}^{0} - \overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

mientras que en la direcciones $\theta = \pi/2, 3\pi/2$ el vector unitario es $\hat{v}_2 = (0, \pm 1)$ y la derivada es:

$$D_{\hat{v}_2}\phi(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\phi(0, \pm h)}^{0} - \overbrace{\phi(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

Por lo tanto,

$$D_{\hat{v}}\phi(0,0) = 0 \ , \quad \forall\theta \in [0, 2\pi]$$

b) Tenemos que ϕ es diferenciable en (0,0) si existen $\phi_x(0,0),\ \phi_y(0,0)$ y, además:

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\phi(h,k) - \phi(0,0) - \phi_x(0,0)h - \phi_y(0,0)k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

Ahora bien, sabemos que las parciales de primer orden son las derivadas direccionales para $\theta = 0$ –para ϕ_x– y $\theta = \pi/2$ –para ϕ_y–, es claro que ambas existen y son iguales a cero. Como, además, $\phi(0,0) = 0$, el límite anterior se convierte en:

$$\begin{aligned}\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\phi(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h(1-\cos k)\sqrt{h^2+k^2}}{(h^2+k^4)\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h(1-\cos k)}{h^2+k^4}\end{aligned}$$

el cual **no** es cero ya que, si nos acercamos al origen por la parábola $h = k^2$ la fracción anterior tiende a:

$$\lim_{k\to 0} \frac{k^2(1-\cos k)}{k^4+k^4} = \frac{1}{2}\lim_{k\to 0} \frac{1-\cos k}{k^2} = \frac{1}{4}$$

Por tanto, ϕ **no es diferenciable** en el origen.

■

(6) Considere la función real f definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Demuestre que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$.

Solución:

Primero que todo, notemos que para $a \neq 0$:

$$f(0,a) = \frac{0\cdot\sin(a) - a\cdot\sin(0)}{0+a^2} = 0$$

y

$$f(a,0) = \frac{a\cdot\sin(0) - 0\cdot\sin(a)}{a^2+0} = 0$$

Ahora bien, deseamos calcular:

$$f_{xy}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k}$$

para lo cual hacemos uso de la definición de derivada parcial,

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

en el origen, y las reglas de derivación para puntos $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{\Big(\sin(y) - y\cos(x)\Big)(x^2+y^2) - \Big(x\sin(y) - y\sin(x)\Big)(2x)}{(x^2+y^2)^2} \\ \therefore\ f_x(0,k) &= \frac{k^2\sin(k) - k^3}{k^4} = \frac{\sin(k) - k}{k^2} \end{aligned}$$

Reemplazando los cálculos anteriores, tenemos:

$$\begin{aligned} f_{xy}(0,0) &= \lim_{k\to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} \\ &= \lim_{k\to 0} \frac{\dfrac{\sin(k)-k}{k^2} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\sin(k)-k}{k^3} \\ &\underbrace{=}_{L'H} \lim_{k\to 0} \frac{\cos(k) - 1}{3k^2} \\ &\underbrace{=}_{L'H} \lim_{k\to 0} -\frac{\sin(k)}{6k} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

En el origen:

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{0-0}{k} = 0$$

En $(x,y) \neq (0,0)$:

$$\begin{aligned} f_y(x,y) &= \frac{\Big(x\cos(y) - \sin(x)\Big)(x^2+y^2) - \Big(x\sin(y) - y\sin(x)\Big)(2y)}{(x^2+y^2)^2} \\ \therefore\ f_y(h,0) &= \frac{h^3 - h^2\sin(h)}{k^4} = \frac{h - \sin(h)}{h^2} \end{aligned}$$

Reemplazando nuevamente,

$$\begin{aligned} f_{yx}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{k} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{h-\sin(h)}{h^2} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-\sin(h)}{h^3} \\ &\underbrace{=}_{L'H} \lim_{h\to 0} \frac{1 - \cos(h)}{3h^2} \\ &\underbrace{=}_{L'H} \lim_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{6h} = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Por tanto,

$$f_{xy}(0,0) = -\frac{1}{6} \neq \frac{1}{6} = f_{yx}(0,0)$$

■

(7) Sea

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Demuestre que f es diferenciable en $(0,0)$.

b) ¿Es la función $f_x(x,y)$ continua en $(0,0)$? Justifique.

Solución:

a) Lo primero que hacemos es calcular las derivadas parciales en el punto:

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0$$

Por simetría del intercambio entre x e y, también $f_y(0,0) = 0$. Para que la función sea diferenciable en el origen, calculamos el siguiente límite:

$$\begin{aligned} \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k) - f(0,0) - hf_x(0,0) - kf_y(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} \\ &= \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\right) \\ \text{(mediante el cambio a polares)} \quad &= \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\sin\theta}{r} \cos\left(\frac{1}{r}\right) \\ &= \lim_{r\to 0} r\left\{\cos\theta\sin\theta\cos\left(\frac{1}{r}\right)\right\} = 0 \end{aligned}$$

pues el paréntesis de llave es acotado y r tiende a cero. Como el límite en cuestión vale cero, concluimos que la función es diferenciable en el origen.

b) Ya vimos que $f_x(0,0) = 0$. Para $(x,y) \neq 0$,

$$f_x(x,y) = y\cos\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) + \frac{x^2y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

Mientras el primer término tiende a cero cuando $(x,y) \to (0,0)$ (cero·acotado), el segundo **no posee límite** como puede observarse acercándose al origen a través de la recta $y = x$. Allí tenemos

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3}{(2x^2)^{3/2}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{8}} \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{|x|}\right)^3 \sin\left(\frac{1}{\sqrt{2x^2}}\right)$$

el cual no existe pues la expresión oscila permanentemente entre $\pm 1/\sqrt{8}$. Se concluye entonces que $f_x(x,y)$ **no es continua en el origen**.

■

(8) Encontrar el plano tangente de la función $h(x,y) = 3x^2 - 2y^2$ en el punto $(2,1,10)$

Solución:

Recordemos que la ecuación para el plano tangente en un punto $\vec{x}_0$ es:

$$(\vec{x} - \vec{x}_0) \cdot \nabla f(\vec{x}_0) = 0$$

El gradiente viene dado por:

$$\nabla f(\vec{x}_0) = \left(\begin{array}{c} 6x \\ -4y \\ -1 \end{array} \right) \Bigg|_{\vec{x}_0=(2,1,10)} = \left(\begin{array}{c} 12 \\ -4 \\ -1 \end{array} \right)$$

Así,

$$\left(\begin{array}{c} x-2 \\ y-1 \\ z-10 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} 12 \\ -4 \\ -1 \end{array} \right) = 0 \quad \longleftrightarrow \quad 12x - 4y - z = 10$$

■

(9) Dadas las funciones

$$f(x,y) = \sqrt{1 + x^2 + y^2} \qquad \wedge \qquad g(x,y) = x^2 - y^2$$

determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ de modo que las curvas de nivel $S_a(f)$ y $S_b(g)$ sean ortogonales.

Solución:

Necesitamos que las curvas de nivel sean ortogonales, i.e. que sus vectores tangentes sean ortogonales. Dado que lo gradientes son ortogonales a sus respectivas curvas de nivel, solo nos basta exigir que $\nabla f \cdot \nabla g = 0$. Entonces:

$$\nabla f = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}(x,y) \ , \quad \nabla g = 2(x,-y)$$

Ahora,

$$\nabla f \cdot \nabla g = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{b}{a} = 0$$

Esto implica que $b = 0$, y $a > 0$. ■

(10) Considere la superficie $z = x^2 + 5y^2$ y su plano tangente en $(1,1,6)$. Calcule la longitud del segmento de la recta dada por $x = 2, y = 2$ contenido entre el plano y la superficie.

Solución:

Primero que todo, calculamos el plano tangente a la superficie. Para esto, definimos la función $\phi = x^2 + 5y^2 - z$ y por tanto la superficie no es más que la curva de nivel $\phi(x,y,z) = 0$. Dado que el gradiente es **siempre** ortogonal a las curvas de nivel, encontramos el vector normal de dicha forma:

$$\vec{n} = \nabla\phi = (2x, 10y, -1)\Big|_{(1,1,6)} = (2, 10, -1)$$

De esta forma, el plano tangente se escribe como:

$$\Phi: \ \vec{n} \cdot \left(\vec{x} - \vec{p}_0 \right) = 0$$

$$\Phi: \ (2, 10, -1) \cdot (x-1, y-1, z-6) = 0 \quad \longrightarrow \quad \Phi: \ z = 2x + 10y - 6$$

Ahora, dado que la recta es ortogonal al plano XY, la longitud del segmento de recta buscado será simplemente la diferencia de alturas de ambas funciones, en los puntos de intersección con la recta:

$$z = x^2 + 5y^2 \Big|_{x=y=2} = 24 \quad \wedge \quad z = 2x + 10y - 6 \Big|_{x=y=2} = 18$$

y, por tanto, la longitud buscada es 6. ■

(11) *a*) Sea $P(x, y, z)$ un punto cualquiera de la superficie $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 8$ y $\hat{n}$ un vector unitario normal a dicha superficie en el punto P. Si $f(x, y, z) = xyz$, calcule la derivada direccional $D_{\hat{n}} f(P)$.

b) Halle los valores de c que hacen que, en los puntos de intersección de las esferas

$$(x-c)^2 + y^2 + z^2 = 3 \ , \quad x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1$$

sus planos tangentes sean perpendiculares entre sí.

Solución:

a) Sea $g(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 4z^2$. Un vector normal unitario a la superficie $g(x, y, z) = 8$ es

$$\hat{n} = \pm \frac{\nabla g(x, y, z)}{\| \nabla g(x, y, z) \|}$$

Eligiendo el signo positivo,

$$\hat{n} = \frac{(2x, 4y, 8z)}{\sqrt{4x^2 + 16y^2 + 64z^2}} = \frac{(x, 2y, 4z)}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + 16z^2}}$$

Entonces, como f es diferenciable por ser un polinomio,

$$\begin{aligned} D_{\hat{n}} f(x, y, z) &= \nabla f(x, y, z) \cdot \hat{n} \\ &= (yz, xz, xy) \cdot \frac{(x, 2y, 4z)}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + 16z^2}} \\ &= \frac{7xyz}{\sqrt{x^2 + 4y^2 + 16z^2}} \end{aligned}$$

El resultado con el signo menos también es válido.

b) Sean $F(x,y,z) = (x-c)^2 + y^2 + z^2$ y $G(x,y,z) = x^2 + (y-1)^2 + z^2$, de modo que las dos esferas están definidas como superficies de nivel:

$$F(x,y,z) = 3 \qquad \wedge \qquad G(x,y,z) = 1$$

Sea (x_0, y_0, z_0) un punto común a ambas esferas. Entonces,

$$(x_0 - c)^2 + {y_0}^2 + {z_0}^2 = 3 \tag{5.1}$$

$${x_0}^2 + (y_0 - 1)^2 + {z_0}^2 = 1 \tag{5.2}$$

El plano tangente a la esfera $F(x,y,z) = 3$ en (x_0, y_0, z_0) tiene por vector normal a:

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{2}\nabla F(x_0, y_0, z_0) = (x_0 - c, y_0, z_0)$$

donde el factor $1/2$ es solo por simplicidad. Análogamente para la esfera $G(x,y,z) = 1$,

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{2}\nabla G(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0 - 1, z_0)$$

Los respectivos planos tangentes son perpendiculares *ssi* $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$. Con ello,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = {x_0}^2 - x_0 c + {y_0}^2 - y_0 + {z_0}^2$$

Por la ecuación (5.2), podemos reemplazar ${z_0}^2$ y obtener:

$$\begin{aligned} \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 &= {x_0}^2 - x_0 c + {y_0}^2 - y_0 + \left(1 - {x_0}^2 + (y_0 - 1)^2\right) \\ &= y_0 - x_0 c \end{aligned}$$

Restando las ecuaciones (5.1) y (5.2):

$$(x - 0 - c)^2 + {y_0}^2 - {x_0}^2 - (y_0 - 1)^2 = -2x_0 c + c^2 + 2y_0 - 1 = 2$$

$$\therefore \; 2(y_0 - x_0 c) = 3 - c^2$$

de donde,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = y_0 - x_0 c = \frac{3 - c^2}{2}$$

Finalmente,

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad \longleftrightarrow \quad c = \pm\sqrt{3}$$

■

(12) *a*) Sea $\mathcal{P}$ el plano tangente a la superficie $z = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y$ en el punto $(1, -1, -1)$. Hallar todos los puntos de la superficie $z = -x^2 + 4xy - 6y^2$ en los cuales el plano tangente el paralelo a $\mathcal{P}$.

b) Sea f una función diferenciable. De ella se conocen los siguientes datos:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{u}}(3,1) = 3\ , \quad \hat{u} = \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{v}}(3,1) = \sqrt{2}\ , \quad \hat{v} = \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$$

Con estos datos, calcular $\nabla f(3,1)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \hat{w}}$ en el mismo punto, si $\vec{w} = (3,2)$.

Solución:

a) Definamos dos funciones para facilitar la notación:

$$F(x,y,z) = 2x^2 + 2xy + y^2 - 6x - 4y - z \qquad \wedge \quad G(x,y,z) = -x^2 + 4xy - 6y^2 - z$$

El vector normal del $\mathcal{P}$ es

$$\vec{n} = \nabla F(1,-1,-1) = (-4,-4,-1)$$

El vector normal a la segunda superficie, en un punto cualquiera, es:

$$\vec{t} = \nabla G(x,y,z) = (-2x + 4y, 4x - 12y, -1)$$

Entonces, buscamos los puntos (x,y) en los cuales $\vec{t} \parallel \vec{n}$. Como sus terceras componentes son iguales, es claro que:

$$-2x + 4y = -4 \qquad \wedge \qquad 4x - 12y = -4$$

cuya única solución es $(x,y) = (8,3)$. Por tanto, el punto buscado –luego de reemplazar (x,y) en la superficie– es $(8,3,-22)$.

b) Aprovechando la diferenciabilidad de la función,

$$\nabla f \cdot \hat{u} = 3 \ \longrightarrow \ (f_x, f_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(1,2) \ = \ \frac{f_x}{\sqrt{5}} + \frac{2f_y}{\sqrt{5}} = 3$$

$$\nabla f \cdot \hat{v} = \sqrt{2} \ \longrightarrow \ (f_x, f_y) \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}(3,1) \ = \ \frac{3f_x}{\sqrt{10}} + \frac{f_y}{\sqrt{10}} = \sqrt{2}$$

Hemos formado un sistema lineal de 2×2, de donde es fácil establecer que:

$$\nabla f(3,1) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{7}{\sqrt{5}} \right)$$

Finalmente, como $\hat{w} = \frac{1}{\sqrt{13}}(3,2)$, entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial \hat{w}}(3,1) = \nabla f(3,1) \cdot \hat{w} = \frac{17}{\sqrt{65}}$$

■

I.v. Regla de la cadena

(1) *a*) Sea $f(x,y) \in \mathcal{C}^2$, con $f_{xx}(0,1) = 0$, $f_x(0,1) = 2$, $f_y(0,1) = f_{yy}(0,1) = 1$ y $f_{xy}(0,1) = -1$. Si $h(t) = f(t^2, 1+t^3)$, calcule $h''(0)$.

b) Sea $f(u,v) \in \mathcal{C}^2$ una función *armónica*, y sea $g(x,y) = f(x^2-y^2, 2xy)$. Calcule Δg y demuestre que es constante.

Solución:

a) Sean $x(t) = t^2$, $y(t) = 1+t^3$. Por regla de la cadena, se sabe que:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(f(x,y)\Big) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} = f_x x' + f_y y'$$

Así,

$$\frac{d^2h}{dt^2} = \frac{d}{dt}\Big(f_x x' + f_y y'\Big) = \frac{d}{dt}\Big(f_x\Big)x' + f_x x'' + \frac{d}{dt}\Big(f_y\Big)y' + f_y y''$$

con:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(f_x\Big) &= \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= f_{xx}x' + f_{xy}y'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(f_y\Big) &= \frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{dy}{dt} \\ &= f_{yx}x' + f_{yy}y'\end{aligned}$$

Finalmente, y como $f_{xy} = f_{yx}$ por la continuidad,

$$h'' = f_{xx}x'^2 + 2f_{xy}x'y' + f_{yy}y'^2 + f_x x'' + f_y y''$$

Reemplazando en $t = 0$,

$$h''(0) = 4$$

b) Sean $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ de modo que $g(x,y) = f(u,v)$. Entonces, por la regla de la cadena:

$$g_x = f_u u_x + f_v v_x$$

Derivando nuevamente con respecto a x,

$$\begin{aligned}g_{xx} &= \Big(f_u\Big)_x + u_x + f_u u_{xx} + \Big(f_v\Big)_x + f_v v_{xx} \\ &= \Big(f_{uu}u_x + f_{uv}v_x\Big) + u_x + f_u u_{xx} + \Big(f_{vu}u_x + f_{vv}v_x\Big) + f_v v_{xx} \\ &= f_{uu}{u_x}^2 + 2f_{uv}u_x v_x + f_{vv}{v_x}^2 + f_u u_{xx} + f_v v_{xx}\end{aligned}$$

usando que, por ser continuas, $f_{uv} = f_{vu}$. Calculando las expresiones dadas,

$$u_x = 2x \ , \quad u_{xx} = 2 \qquad \wedge \qquad v_x = 2y \ , \quad v_{xx} = 0$$

Sustituyendo:

$$g_{xx} = 4x^2 f_{uu} + 8xy f_{uv} + 4y^2 f_{vv} + 2f_u$$

De manera análoga,

$$g_{yy} = f_{uu} {u_y}^2 + 2f_{uv} u_y v_y + f_{vv} {v_y}^2 + f_u u_{yy} + f_v v_{yy}$$

y por ende:

$$g_{yy} = 4y^2 f_{uu} - 8xy f_{uv} + 4x^2 f_{vv} - 2f_u$$

Finalmente, sumando:

$$g_{xx} + g_{yy} = 4(x^2 + y^2)(f_{uu} + f_{vv}) = 0$$

ya que, por hipótesis, $\Delta f = 0$. Así, hemos probado que el laplaciano de g es constante e igual a cero.

■

(2) *a*) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ con segundas derivadas parciales continuas. La sustitución

$$u = \frac{x - y}{2} \ , \quad v = \frac{x + y}{2}$$

transforma $f(u, v)$ en $F(x, y)$. Exprese F_x y F_{xy} en términos de las variables u, v y de las derivadas parciales de f respecto a dichas variables.

b) Si $w = f\left(\dfrac{y - x}{xy}, \dfrac{z - y}{yz}\right)$, demuestre que para todo $x, y, z \neq 0$ se tiene que

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

Solución:

a) Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial v}\right)$$

Derivando respecto a y,

$$\begin{aligned} F_{xy} &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\Big(f_u + f_v\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big[\Big(f_{uu}u_y + f_{uv}v_y\Big) + \Big(f_{vu}u_y + f_{vv}v_y\Big)\Big] \\ &= -\frac{1}{4}\Big(f_{uu} - f_{vv}\Big) \end{aligned}$$

b) Sean

$$u = \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \ , \quad v = \frac{z-y}{yz} = \frac{1}{y} - \frac{1}{z}$$

Por la regla de la cadena,

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial x} &= f_u u_x + f_v v_x = -\frac{1}{x^2} f_u \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= f_u u_y + f_v v_y = \frac{1}{y^2}\Big(f_u - f_v\Big) \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= f_u u_z + f_v v_z = \frac{1}{z^2} f_v \end{aligned}$$

de modo que:

$$x^2 \frac{\partial w}{\partial x} + y^2 \frac{\partial w}{\partial y} + z^2 \frac{\partial w}{\partial z} = -f_u + f_u - f_v + f_v = 0$$

■

(3) Considere una función $\rho(x, y)$ que satisface las siguientes condiciones:

$$\rho_x(1,3) = 5 \ , \quad \rho_y(1,3) = -4 \ , \quad \rho_{xx}(1,3) = -2 \ , \quad \rho_{yx}(1,3) - 8 \ , \quad \rho_{yy}(1,3) = 10$$

Además, consideremos dos funciones $x(t), y(t)$ tales que:

$$x(0) = 1 \ , \quad x'(0) = -1 \ , \quad x''(0) = 3 \ , \quad y(0) = 3 \ , \quad y'(0) = 5 \ , \quad y''(0) = -7$$

Definiendo $\phi(t) = \rho(x(t), y(t))$, calcule $\phi''(0)$.

Solución:

En términos de la curva plana

$$\gamma(t) = (x(t), y(t))$$

podemos escribir

$$\phi(t) = \rho(\gamma(t)) = \rho \circ \gamma(t)$$

Usando la regla de la cadena,

$$\phi'(t) = \nabla\rho(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \rho_x x' + \rho_y y'$$

De aquí, calculamos la segunda derivada de ϕ:

$$\phi''(t) = \frac{d}{dt}\Big(\rho_x\Big)x' + \rho_x x'' + \frac{d}{dt}\Big(\rho_y\Big)y' + \rho_y y''$$

Nuevamente, usando la regla de la cadena:

$$\frac{d}{dt}\Big(\rho_x\Big) = \nabla\rho_x \cdot \gamma'(t) = \rho_{xx} x' + \rho_{xy} y'$$

$$\frac{d}{dt}\Big(\rho_y\Big) = \nabla\rho_y \cdot \gamma'(t) = \rho_{yx}x' + \rho_{yy}y'$$

Reemplazando los datos del enunciado para $t = 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big(\rho_x\Big)\Big|_{t=0} &= -2 \times -1 + -8 \times 5 \;=\; -38\\ \frac{d}{dt}\Big(\rho_y\Big)\Big|_{t=0} &= -8 \times -1 + 10 \times 5 \;=\; 58\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\phi''(0) = -38 \times -1 + 5 \times 3 + 58 \times 5 - 4 \times -7 = 371$$

■

(4) Dado el cambio de variables $f(x, y) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$, calcule el operador laplaciano

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

en coordenadas polares. Suponga que las segundas derivadas parciales conmutan entre ellas.

Solución:

Como $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, podemos afirmar que:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\ , \quad \theta = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Por regla de la cadena, se cumple que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}\\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{-y}{x^2+y^2}\\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}\end{aligned}$$

De manera análoga,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\cos\theta}{r}$$

Ahora, calculamos la segunda derivada:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\theta\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos\theta\Big)\frac{\partial f}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial f}{\partial \theta} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\end{aligned}$$

Para facilitar el entendimiento, realizaremos cada derivada por separado:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\cos\theta\Big) = \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\cos\theta\Big)\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\sin\theta \cdot \frac{-\sin\theta}{r} = \frac{\sin^2\theta}{r}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(\sin\theta\Big)\frac{1}{r} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\\ &= \cos\theta\cdot\frac{-\sin\theta}{r}\cdot\frac{1}{r} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial r}{\partial x}\\ &= -\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2} + \sin\theta\cdot\frac{-1}{r^2}\cdot\cos\theta\\ &= -\frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\end{aligned}$$

De manera análoga a las primeras derivadas,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r}\cos\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial\theta\,\partial r}\frac{\sin\theta}{r}\\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) &= \frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta}\cos\theta - \frac{\partial^2 f}{\partial^2\theta}\frac{\sin\theta}{r}\end{aligned}$$

Juntando todo, y utilizando el hecho de que las segundas derivadas conmutan, se tiene que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} = \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta} + \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2\theta}$$

De manera análoga,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r}\frac{\partial^2 f}{\partial r\,\partial\theta} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\frac{\partial f}{\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2\theta}$$

Finalmente,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y} = \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial^2\theta}$$

■

(5) *a*) Si $u:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ y $v:\mathbb{R}^+\mapsto\mathbb{R}$ son funciones de clase $\mathcal{C}^2$ que satisfacen

$$u(x,y,z) = v(r)\ , \quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

demuestre que:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = v''(r) + \frac{2}{r}v'(r)\ , \quad \forall r\neq 0$$

b) Se dice que una función $f(\vec{x})$ es homogénea de grado n si satisface $f(\alpha\vec{x}) = \alpha^n f(\vec{x})$ para todo $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$ y para todo $\vec{x}\in\mathbb{R}^n$. Si $f(x,y)$ es homogénea de grado $n\in\mathbb{N}$, pruebe que satisface la siguiente igualdad:

$$x\Big(f_{xx}f_y - f_{xy}f_x\Big) = y\Big(f_{yy}f_x - f_{yx}f_y\Big)$$

Solución:

a) Por la regla de la cadena, se tiene que:

$$u_x = v'(r)\frac{\partial r}{\partial x} = v'(r)\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = v'(r)\frac{x}{r}$$

Derivando una vez más,

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(v'(r)\frac{x}{r}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\Big(v'(r)\Big)\frac{x}{r} + v'(r)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r}\right) \\ &= v''(r)\frac{\partial r}{\partial x}\frac{x}{r} + v'(r)\frac{r - x\dfrac{\partial r}{\partial x}}{r^2} \\ &= v''(r)\frac{x^2}{r^2} + v'(r)\frac{(r^2-x^2)}{r^3} \end{aligned}$$

De manera análoga,

$$u_{yy} = v''(r)\frac{y^2}{r^2} + v'(r)\frac{(r^2-y^2)}{r^3}\ , \quad u_{zz} = v''(r)\frac{z^2}{r^2} + v'(r)\frac{(r^2-z^2)}{r^3}$$

Sumando los tres términos,

$$\begin{aligned} u_{xx}+u_{yy}+u_{zz} &= v''(r)\frac{(x^2+y^2+z^2)}{r^2} + v'(r)\frac{3r^2-(x^2+y^2+z^2)}{r^3} \\ &= v''(r)\frac{r^2}{r^2} + v'(r)\frac{3r^2-r^2}{r^3} \\ &= v''(r) + \frac{2}{r}v'(r) \end{aligned}$$

b) Por la definición de homogeneidad,

$$f(\alpha x, \alpha y) = \alpha^n f(x,y)$$

Sean $u = \alpha x$ y $v = \alpha v$. Derivando con respecto a α,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha}\Big(f(\alpha x, \alpha y)\Big) &= n\alpha^{n-1} f(x,y) \\ f_u u_\alpha + f_v v_\alpha &= \\ x f_u + y f_v &= \end{aligned}$$

lo cual se cumple para todo α, en particular $\alpha = 1$. Con ello, $u = x$ y $v = y$. Por tanto,

$$x f_x + y f_y = nf$$

Derivando sucesivamente con respecto a x e y, se tiene:

$$\begin{aligned} f_x + x f_{xx} + y f_{yx} &= n f_x \\ x f_{xy} + f_y + y f_{yy} &= n f_y \end{aligned}$$

Multiplicando la primera ecuación por f_y y la segunda por f_x podemos igualar:

$$\begin{aligned} f_x f_y + x f_{xx} f_y + y f_{yx} f_y &= x f_{xy} f_x + f_y f_x + y f_{yy} f_x \\ x f_{xx} f_y - x f_{xy} f_x &= y f_{yy} f_x - y f_{yx} f_y \\ x\Big(f_{xx} f_y - f_{xy} f_x\Big) &= y\Big(f_{yy} f_x - f_{yx} f_y\Big) \end{aligned}$$

■

Sección II

Optimización de funciones escalares

II.i. Máximos y mínimos sin restricciones

(1) Encuentre y clasifique los puntos críticos de la función $f(x,y) = (1-x)(1-y)(x+y-1)$.

Solución:

Formemos el sistema $f_x = f_y = 0$. Como:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= (y-1)(2x+y-2) \\ f_y(x,y) &= (x-1)(2y+x-2) \end{aligned}$$

consideramos los cuatro casos posibles:

(I) $(y-1) = (x-1) = 0$, y con ello $P_1 = (1,1)$

(II) $(y-1) = (2y+x-2) = 0$, y con ello $P_2 = (0,1)$

(III) $(2x+y-2) = (x-1) = 0$, y con ello $P_3 = (1,0)$

(IV) $(2x+y-2) = (2y+x-2) = 0$, y con ello $P_4 = (2/3, 2/3)$

Recordemos el criterio asociado a la matriz Hessiana para máximos y mínimos:

Matriz hessiana	Valores propios	Punto crítico
Positiva/Negativa definida	$\lambda_i > 0$ o $\lambda_i < 0$	Mín/Máx
Semi-Positiva/Negativa definida	$\lambda_i \geq 0$ o $\lambda_i \leq 0$	¿?
Indefinida	$\lambda_i \in \mathbb{R}$	Punto silla

Por tanto,

- P_1:

$$\mathbf{H}(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Valores propios: } \lambda_{1,2} = \pm 1$$

  y este es un **punto silla**.

- P_2:

$$\mathbf{H}(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{Valores propios: } \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

  y este es un **punto silla**.

- P_3:

$$\mathbf{H}(1,0) = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Valores propios: } \lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

  y este es un **punto silla**.

- P_4:

$$\mathbf{H}(2/3, 2/3) = \begin{pmatrix} -2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -2/3 \end{pmatrix} \quad \text{Valores propios: } \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -\frac{1}{3}$$

Como ambos valores propios son negativos, este es un **máximo local**.

■

(2) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una función definida como $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f$, encontrar condiciones sobre las constantes $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ de forma tal que $f(x, y)$ pueda tener un máximo local.

Solución:

Dado que nos encontramos en un dominio abierto, las condiciones para los puntos críticos se reducen a $\nabla f = 0$. Entonces:

$$f_x = 2ax + 2by + d = 0 \qquad \wedge \qquad f_y = 2cy + 2by + e = 0$$

Este sistema de ecuaciones se puede escribir matricialmente como:

$$\begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$

Buscamos que el sistema posea por lo menos una solución. Si llamamos A a ma matriz de coeficientes para x e y, requerimos que la matriz sea invertible. Así:

$$|A| \neq 0 \quad \longrightarrow \quad 4ac - 4b^2 \neq 0$$

Ahora, analicemos el comportamiento de la matriz hessiana:

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a & 2b \\ 2b & 2c \end{pmatrix}$$

que es lo mismo que calculamos anteriormente. Así, la única condición –necesaria, pero no suficiente– buscada es $b^2 - ac \neq 0$. ■

(3) Suponga que solo dispone de una calculadora con las 4 operaciones básicas. Determine un valor aproximado para:

$$\frac{0.97}{\sqrt{15.05} + \sqrt[3]{0.98}}$$

Solución:

Usamos una función de tres variables (una por cada número) que se acerque a la forma de la función pedida. Así, podemos elegir:

$$f(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{y + \sqrt[3]{z}}}$$

Si denotamos $(x_0, y_0, z_0) = (1, 15, 1)$, notaremos que las variaciones en torno a dicho punto son $(dx, dy, dz) = (-0.03, 0.05, -0.02)$. Aplicando el diferencial a nuestra función,

$$f(x_0 + dx, y_0 + dy, z_0 + dz) \approx f(x_0, y_0, z_0) + df(x_0, y_0, z_0)$$

con

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

Calculamos las derivadas:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left.\frac{1}{\sqrt{y+\sqrt[3]{z}}}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \left.-\frac{x}{2}\left(y+\sqrt[3]{z}\right)^{-3/2}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = -\frac{1}{128}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \left.-\frac{x}{2}\left(y+\sqrt[3]{z}\right)^{-3/2}\frac{z^{-2/3}}{3}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} = -\frac{1}{384}$$

Usando la calculadora,

$$df = -\frac{3.01}{384}\ , \quad f(x_0,y_0,z_0) = \frac{1}{4}$$

Finalmente, el número buscado es:

$$\frac{1}{4} - \frac{3.01}{384} = 0.242161$$

■

(4) Sea $f(x,y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2 = (x^2-y)(3x^2-y)$

a) Demuestre que $(0,0)$ es punto crítico de f.

b) Demuestre directamente que, a lo largo de toda recta por el origen, f alcanza un mínimo en $(0,0)$.

c) Determine la naturaleza del punto $(0,0)$ (¿es un máximo/mínimo local o un punto silla?)

Solución:

a) Tenemos que

$$f_x(x,y) = 12x^3 - 8xy\ , \quad f_y(x,y) = -4x^2 + 2y \quad \longrightarrow \quad \nabla f(0,0) = (0,0)$$

b) A excepción de los ejes coordenados, toda recta por el origen es de la forma $y = mx$, con $m \neq 0$. Ahora bien,

$$f(x,mx) = 3x^4 - 4mx^3 + m^2x^2 = g(x)$$

Entonces, como

$$g'(x) = 12x^3 - 12mx^2 + 2m^2x\ , \quad g''(x) = 36x^2 - 24mx + 2m^2$$

tenemos que $g'(0) = 0$ y $g''(0) = 2m^2 > 0$, por lo que hay un mínimo en $x = 0$. Sobre los ejes coordenados, $f(x,0) = 3x^4$ y $f(0,y) = y^2$, es claro que hay un mínimo en el origen.

c) Punto máximo no puede ser, pues $f(0,0)$ es mínimo a lo largo de las rectas por el origen. Si intentamos aplicar el criterio del hessiano vemos que:

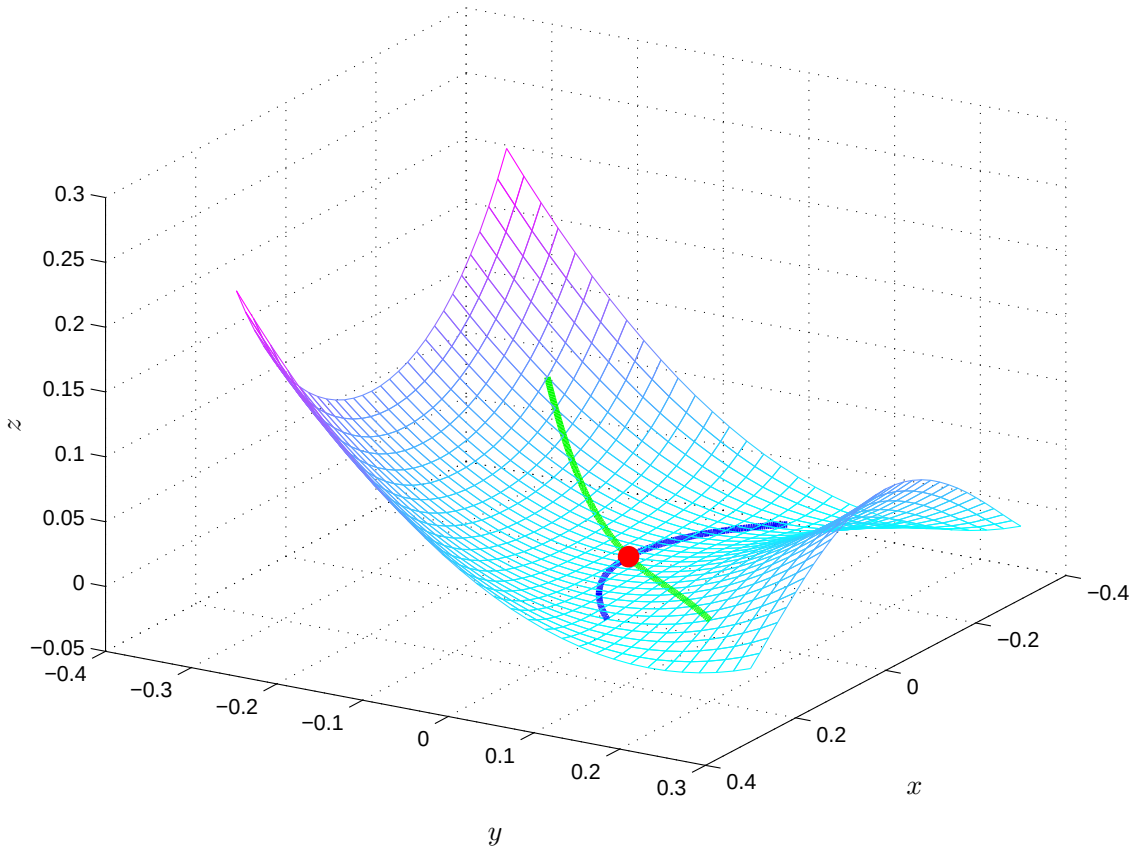
$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 4x(9x-2) & -8x \\ -8x & 2 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \mathbf{H}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de modo que dicho criterio no es concluyente, ya que la matriz es semi-positiva definida. Ahora, si analizamos cualquier pequeño disco con centro en el origen –y notando que $f(0,0) = 0$–, tendremos que:

- Como $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$ tenemos que $f(x,y) < 0$ cuando $x^2 < y < 3x^2$ que es la región entre las parábolas $y = x^2$ e $y = 3x^2$.
- Dichos puntos existen en todo disco entrado en el origen, mostrando que en toda vecindad del origen hay puntos (x,y) donde $f(x,y) < f(0,0)$, y por tanto $(0,0)$ es un **punto silla**.

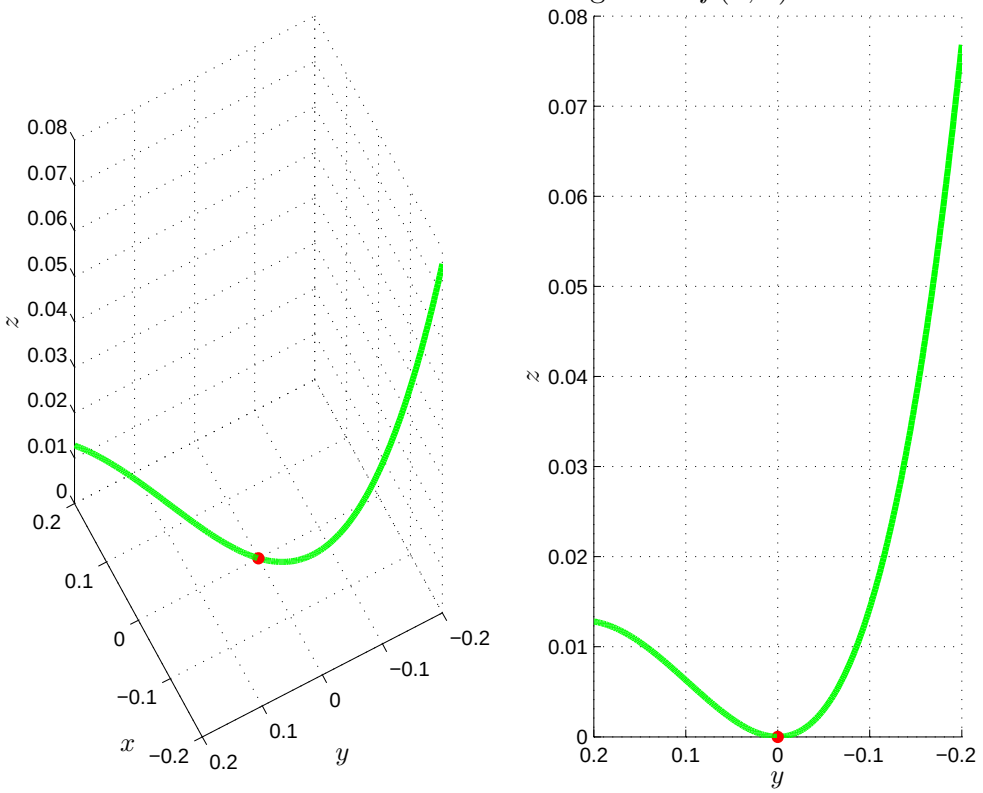
Para facilitar el entendimiento del problema, se expone a continuación un gráfico de la situación:

Superficie $f(x,y) = (x^2 - y)(3x^2 - y)$

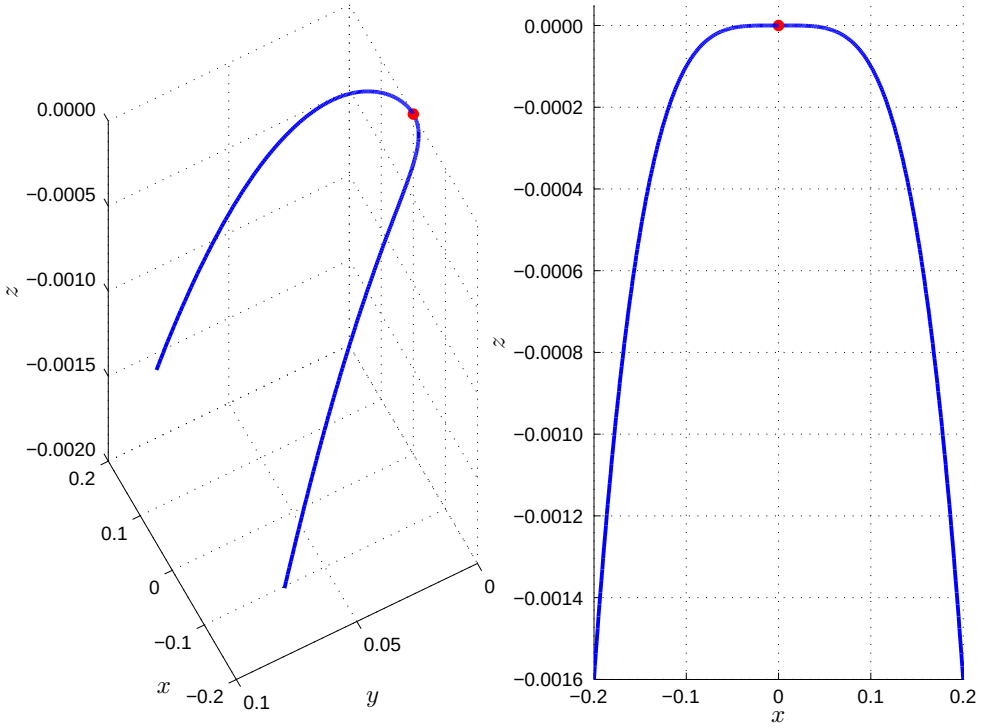


Punto $f(0,0) = 0$, Curva $z = f(x,x)$ y Curva $z = f(x, 2x^2)$

Detalle de la curva imagen $z = f(x, x)$



Detalle de la curva imagen $z = f(x, 2x^2)$



■

(5) Dada la función

$$h(x,y) = ax^2y + bxy^2 + \frac{a^2y^2}{2} + 2y$$

determine los valores de a, b de modo que la función tenga un punto silla en $(1,1)$.

Solución:

Primero que todo, calculamos el gradiente de h:

$$\nabla h(x,y) = (2axy + by^2, ax^2 + 2xyb + a^2y + 2)$$

Luego, imponemos la condición que $(1,1)$ sea punto silla. Esto requiere que $\nabla h(1,1) = \vec{0}$ y que $\mathbf{H}(1,1)$ tenga autovalores propios de distinto signo.

De la condición sobre el gradiente,

$$(2a + b, a + a^2 + 2b + 2) = (0,0)$$

De aquí deducimos que $2a + b = 0$, y entonces $a^2 - 3a + 2 = (a-1)(a-2) = 0$. Concluimos que $a = 1, b = -2$ o bien $a = 2, b = -4$.

Ahora, calculamos la matriz hessiana:

$$\mathbf{H}(x,y) = \begin{pmatrix} 2ay & 2ax + 2by \\ 2ax + 2by & 2bx + a^2 \end{pmatrix}$$

- Para $a = 1, b = -2$, obtenemos:

$$\mathbf{H}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{41}}{2}$$

  y en este caso, $(1,1)$ es un punto silla.

- Para $a = 2, b = -4$, tenemos que:

$$\mathbf{H}(1,1) = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \lambda_{\pm} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{89}}{2}$$

  así que, en este caso, $(1,1)$ también es un punto silla.

■

(6) Determine los puntos críticos y su naturaleza para

$$f(x,y,z) = x^3 - xz + yz - y^3 + 2z^3$$

Solución:

Tenemos que

$$f_x = 3x^2 - z \ , \quad f_y = z - 3y^2 \ , \quad f_z = -x + y + 6z^2$$

y resolviendo el sistema $f_x = f_y = f_z = 0$ obtenemos dos puntos críticos: $(0,0,0)$ y $(1/3, -1/3, 1/3)$. La matriz hessiana de f está dada por:

$$\mathbf{H}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 0 & -1 \\ 0 & -6y & 1 \\ -1 & 1 & 12z \end{pmatrix}$$

Así,

- $\mathbf{H}(0,0,0)$ posee autovalores $0, \pm\sqrt{2}$, por lo que hay un punto silla.
- $\mathbf{H}(1/3, -1/3, 1/3)$ posee autovalores $2, 3 \pm \sqrt{3}$ (todos positivos), por lo que hay un mínimo.

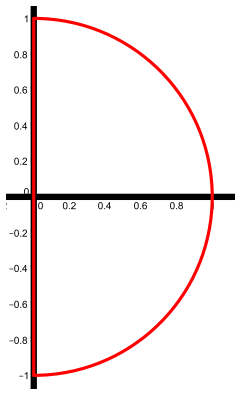
■

(7) Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - \sqrt{3}\,x - y + 5$ en la región

$$\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$$

Solución:

La frontera de la región $\mathcal{R}$ es una semi-circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ con $x \geq 0$ y la porción del eje Y comprendida entre -1 y 1:



La semi-circunferencia se puede parametrizar por $x(t) = \cos t$ e $y(t) = \sin t$ con $t \in [-\pi/2, \pi/2]$; la sección recta, por su parte, $x(t) = 0$ e $y(t) = t$ con $t \in [-1, 1]$. Para calcular los extremos globales de la función en esta región se calculan los puntos críticos de f en el interior de la región y los puntos críticos de f restringida a la frontera:

- **Interior.** El gradiente de f es $\nabla f = (2x - \sqrt{3}, 2y - 1)$, por lo que el único punto crítico es

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

que no es un punto interior.

- **Frontera recta.** La función restringida a esta sección de la frontera es $h(t) = f(0,t) = t^2 - t + 5$. Su derivada es $h'(t) = 2t - 1$. Por tanto, el único punto crítico –$h'(t_0) = 0$– se alcanza en $t_0 =$ y es

$$P_1\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

- **Frontera semi-circular.** La función restringida a esta sección es $g(t) = f(\cos t, \sin t) = 6 - \sin t - \sqrt{3}\cos t$. Sus puntos críticos están dados por $g'(t) = 0$, es decir

$$\sqrt{3}\sin t - \cos t = 0 \quad \leftrightarrow \quad \tan t = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \leftrightarrow \quad t = \frac{\pi}{6}$$

pues $t \in [-\pi/2, \pi/2]$. El punto correspondiente es:

$$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- **Puntos no diferenciables.** Hemos utilizado a la derivada como herramienta para hallar los puntos críticos, pero no es posible emplear este método en el caso de los puntos en los que cambiamos de una a otra frontera. Estos también deben ser considerados en el análisis:

$$P_3(0,1) \qquad \wedge \qquad P_4(0,-1)$$

Finalmente, evaluamos la función:

$$f(P_1) = \frac{19}{4}\ , \quad f(P_2) = 4\ , \quad f(P_3) = 5\ , \quad f(P_4) = 7$$

Concluimos que f alcanza tanto su máximo como su mínimo global en la frontera, en los puntos $(0,-1)$ y $(\sqrt{3}/2, 1/2)$ respectivamente. Estos corresponden a los valores 7 y 4. ■

(8) Considere la función

$$f(x,y) = (x^2 + 3y^2)(1 - x^2 - y^2)$$

a) Determine todos sus puntos críticos y explique cuáles son extremos locales.

b) Calcule, si existe, su máximo global. Justifique.

Solución:

a) Para hallar los puntos críticos de f, primero calculamos las derivadas parciales:

$$f_x = -2x(2x^2 + 4y^2 - 1) \qquad \wedge \qquad f_y = -2y(4x^2 + 6y^2 - 3)$$

Las distintas posibilidades para que $\nabla f = \vec{0}$ son:

- $x = y = 0$, con lo que hallamos un primer punto

$$P_1(0,0)$$

- $x = 0$ y $4x^2 + 6y^2 - 3 = 0$, lo que implica que $y = \pm 1/\sqrt{2}$ correspondiente a los puntos

$$P_2\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad \wedge \qquad P_3\left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

- $y = 0$ y $2x^2 + 4y^2 - 1 = 0$, con lo que $x = \pm 1/\sqrt{2}$ correspondiente a los puntos

$$P_4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \qquad \wedge \qquad P_5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$$

- $4x^2 + 6y^2 - 3 = 0$ y $2x^2 + 4y^2 - 1 = 0$, lo cual equivale a afirmar que $1 + 2y^2 = 0$ que no tiene solución en los reales

Para clasificar estos cinco puntos críticos e identificar los extremos locales, calculamos la matriz hessiana:

$$\mathbf{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 2 - 12x^2 - 8y^2 & -16xy \\ -16xy & 6 - 8x^2 - 36y^2 \end{pmatrix}$$

Evaluando en cada punto,

$$\mathbf{H}(P_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

que posee autovalores positivos ($\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 6$), por lo que es un **mínimo local**. En este caso, el valor de la función es $f(P_1) = 0$.

$$\mathbf{H}(P_2) = \mathbf{H}(P_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

que posee autovalores negativos ($\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -12$), por lo que ambos puntos son **máximos locales**. En este caso, el valor de la función es $f(P_2) = f(P_3) = 3/4$.

$$\mathbf{H}(P_4) = \mathbf{H}(P_5) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

que posee autovalores de distinto signo ($\lambda_1 = -4$ y $\lambda_2 = 2$), por lo que ambos puntos son **puntos silla**.

b) Sea $\mathbf{r} = (x, y)$ el vector coordenado de modo tal que $\|\mathbf{r}\|^2 = x^2 + y^2$. De esta forma, podemos reescribir la función f:

$$f(x, y) = \left(x^2 + 3y^2\right)\left(1 - \|\mathbf{r}\|^2\right)$$

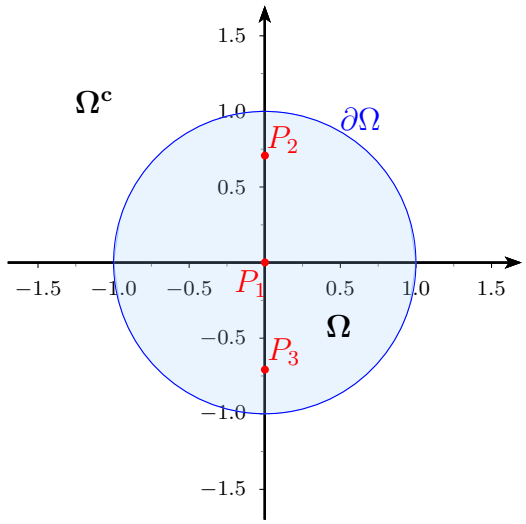
donde el primer paréntesis es siempre mayor o igual a cero, y el segundo puede tomar cualquier valor real. Consideremos la región cerrada y acotada

$$\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \|\mathbf{r}\|^2 \leq 1\right\}$$

Como f es una función continua, debe alcanzar su máximo y su mínimo global en Ω. Notemos que todos los puntos críticos encontrados en el apartado anterior pertenecen al interior de Ω. Por otra parte, si evaluamos la función en el borde de Ω,

$$\partial\Omega = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \|\mathbf{r}\|^2 = 1\right\}$$

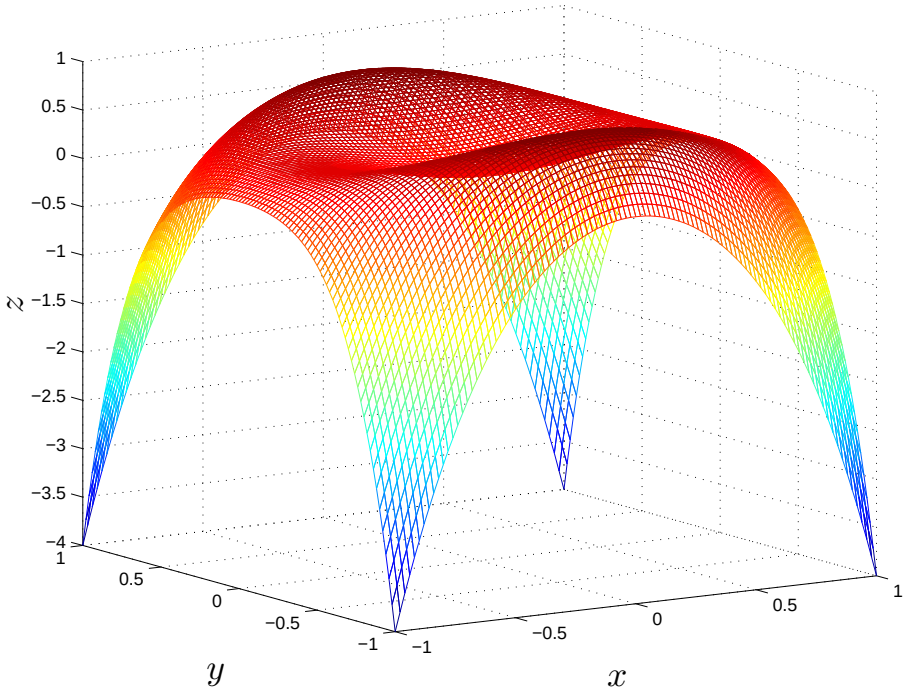
notaremos que $f(\partial\Omega) \equiv 0$. Luego, el máximo de la función f en la región cerrada y acotada Ω es $3/4$ y se alcanza en los dos puntos que antes hallamos. El mínimo de f en Ω es 0 y se alcanza en todo el borde de la región y en el origen.



Consideremos ahora el complemento de Ω, definido mediante

$$\Omega^c = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \|\mathbf{r}\|^2 > 1\Big\}$$

Es claro que $f(\Omega^c) < 0 = f(\partial\Omega)$. Por tanto, los valores que puede tomar f fuera de Ω son siempre menores que su valor de en la frontera, el cual es más pequeño que $f(P_2) = f(P_3)$. En síntesis, la función f tiene un máximo global igual a $3/4$ y se alcanza en los puntos P_2 y P_3.



■

II.ii. Multiplicadores de Lagrange

(1) Encuentre los valores mínimos y máximos de la función

$$g(x, y, z) = xy + yz + xz$$

sobre la porción de la superficie

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 \tag{5.3}$$

que se encuentra en el primer *octante*, i.e. que adicionalmente satisface

$$x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0 \tag{5.4}$$

Solución:

Como en este caso poseemos una restricción, consideremos el siguiente problema genérico: maximizar/minimizar $f(x, y)$ sujeto a $g(x, y) = c$. (ver Figura 5.1)

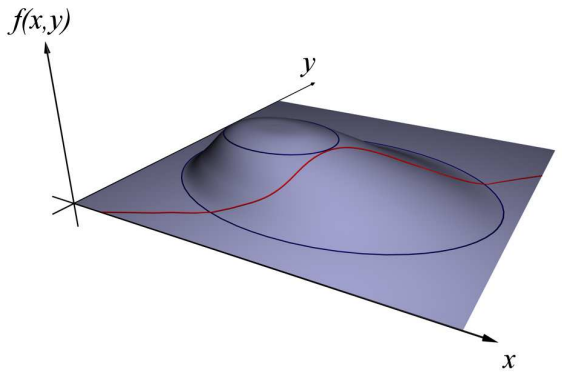


Figura 5.1: Problema de optimización

Supongamos que "caminamos" a lo largo de la curva de nivel $g = c$. En general, estos contornos –para f y g– serán distintos, así que siguiendo la trayectoria de $g = c$ podríamos intersectar alguna curva de nivel de f. Esto es equivalente a decir que mientras nos movemos a lo largo de la curva de nivel de $g = c$, el valor de f puede variar. Solo cuando el contorno de g tocan tangencialmente (no corta) a alguna curva de nivel de f, no se incrementa o disminuye el valor de f. (ver Figura 5.2)

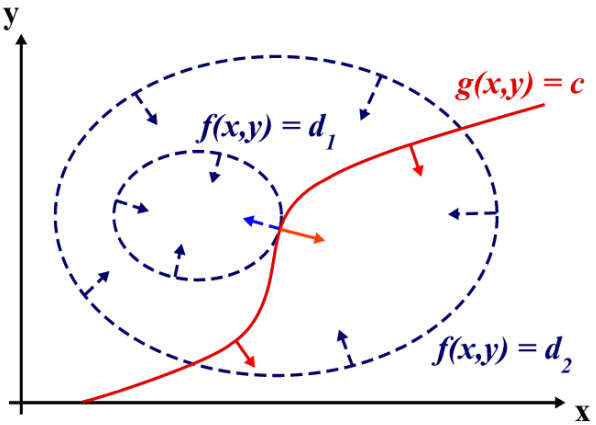


Figura 5.2: Curvas de nivel

Las líneas de contorno de f y g se intersectan cuando los vectores tangentes de ambas son paralelos. Dado que el gradiente de una función es perpendicular a su curva de nivel, entonces lo anterior equivale a decir que los gradientes de f, g son paralelos.

Para las funciones que tienen restricciones, planteamos una nueva función

$$\mathcal{L}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \Big(g_k(x_1, \ldots, x_n) - c_k \Big)$$

donde m es el número de restricciones dadas por las ecuaciones $g_k(\vec{x}) = c_k$. Entonces, la nueva condición para encontrar los puntos críticos será $\nabla \mathcal{L} = 0$ (con respecto a todas las variables).

Ahora, volvamos al problema que nos convoca. En este caso, la restricción corresponde al conjunto de nivel cero de la función

$$q(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$$

La función de Lagrange del problema es:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = g(x, y, z) - \lambda q(x, y, z)$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} &= y + z - 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} &= x + z - 2\lambda y = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} &= x + y - 2\lambda z = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

Sumando las tres primeras condiciones,

$$2x + 2y + 2z - 2\lambda(x + y + z) = 0 \quad \longrightarrow \quad (\lambda - 1)(x + y + z) = 0$$

Tenemos dos casos:

- $\lambda \neq 1$, y por tanto $x + y + z = 0$. De la condición 5.4, notamos que $x = y = z = 0$, la cual no es una solución admisible pues no satisface 5.3.
- $\lambda = 1$, y por tanto $x = y = z$. De la condición 5.3,

$$x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 1$$

Esto, sin embargo, no resuelve el problema completamente. La restricción 5.3 corresponde a una esfera unitaria, pero la condición 5.4 indica que solo debemos considerar la porción de esfera del primer octante. Esto significa que la intersección de la esfera con cada uno de los cuadrantes

$$\{(x, y, z) : x = 0, y \geq 0, z \geq 0\},\ \{(x, y, z) : y = 0, x \geq 0, z \geq 0\},\ \{(x, y, z) : z = 0, x \geq 0, y \geq 0\}$$

corresponde a una parte de la frontera de la superficie que estamos considerando, y debe ser analizado por separado. Además, la región posee tres vértices, así que también evaluamos la función en esos puntos.

Consideremos el trozo de borde de la región que yace en el plano $z = 0$. Esto es un cuarto de círculo, que puede parametrizarse mediante

$$\gamma(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta, 0) \ , \quad \theta \in [0, \pi/2]$$

Evaluando la función g a lo largo de γ obtenemos:

$$g(\gamma(\theta)) = \cos\theta \sin\theta$$

Derivando esta función con respecto a θ e igualando a cero, obtenemos:

$$0 = -\sin^2\theta + \cos^2\theta = \cos 2\theta$$

La única solución de esta ecuación en el intervalo $[0, \pi/2]$ es $\theta = \pi/4$, que corresponde al punto

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \quad \longrightarrow \quad g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \frac{1}{2}$$

La simetría evidente del problema (dominio y función) nos permite evitar los cálculos sobre los otros dos bordes: vamos a obtener los puntos

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

en el plano $y = 0$, y

$$\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

en el plano $x = 0$, con valor

$$g\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$$

Finalmente, los vértices son $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ con $g(1,0,0) = g(0,1,0) = g(0,0,1) = 0$.

Así, el máximo global de g bajo las restricciones 5.3 y 5.4 es 1 y se alcanza en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, y el mínimo global es 0, y se alcanza en cada uno de los vértices. ■

(2) *a)* Demuestre que $x^3y > -\dfrac{3}{4}$ si $x^4 + y^4 = 1$.

b) Demuestre que $x^3y \geq -\dfrac{3}{4}(x^4 + y^4)$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

c) Use la afirmación anterior para demostrar que la curva

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^4 + x^3y + y^4 = 1\}$$

es acotada, i.e. existe un $M > 0$ tal que para todo $(x, y) \in C$ se cumple que $|x| \leq M$ e $|y| \leq M$.

Solución:

a) Para probar la afirmación, calcularemos los mínimos de la función $f(x, y) = x^3y$ sujeta a la condición $g(x, y) = x^4 + y^4 - 1 = 0$ vía multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} 3x^2y &= 4\lambda x^3 \\ x^3 &= 4\lambda y^3 \\ x^4 + y^4 &= 1 \end{cases}$$

Si $xy = 0$, la solución del sistema es $(x, y) = (0, \pm 1)$ –con $\lambda = 0$–. Si $xy \neq 0$, despejando λ de las primeras dos ecuaciones nos queda que $x^4 = 3y^4$, lo cual –en combinación con la tercera ecuación– implica que

$$x^4 = \frac{3}{4}\,, \quad y^4 = \frac{1}{4}$$

Así, los puntos críticos son:

(x, y)	$\pm(0, 1)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\pm\left(\frac{\sqrt{2\sqrt{3}}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$f(x, y)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$-\frac{3\sqrt{3}}{4}$

Como la función $f(x, y) = x^3y$ es continua y el dominio $x^4 + y^4 = 1$ es cerrado y acotado, f tiene extremos globales. Estos extremos se encuentran necesariamente entre los puntos críticos condicionados, ya que f, g son continuamente diferenciables. De la tabla, obtenemos que el mínimo global de f en el dominio es:

$$x^3y > -\frac{3\sqrt{3}}{4} > -\frac{3}{4}$$

b) El apartado anterior, escrito en coordenadas polares, establece que:

$$f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r^4\cos^3\theta\sin\theta > -\frac{3}{4} \quad \text{cuando} \quad r^4 = \frac{1}{\cos^4\theta + \sin^4\theta}$$

Es decir,

$$\frac{\cos^3\theta\sin\theta}{\cos^4\theta + \sin^4\theta} > -\frac{3}{4} \qquad (0 \leq \theta < 2\pi)$$

Después de multiplicar ambos lados de la desigualdad por la expresión no negativa $r^4(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$ vemos que

$$r^4\cos^3\theta\sin\theta \geq -\frac{3r^4}{4}(\cos^4\theta + \sin^4\theta)$$

Volviendo a coordenadas cartesianas,

$$x^3y \geq -\frac{3}{4}(x^4 + y^4)$$

c) Para los puntos de la curva C, tenemos que $x^3y = 1 - x^4 - y^4$. La desigualdad del apartado anterior implica que, para estos puntos, se cumple que:

$$1 - x^4 - y^4 = x^3y \geq -\frac{3}{4}(x^4 + y^4)$$

Es decir,

$$x^4 + y^4 \leq 4 \quad \longrightarrow \quad |x| \leq \sqrt{2},\ |y| \leq \sqrt{2}$$

■

(3) Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + yz$ en la bola $B = \{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Solución:

Primero, buscamos los candidatos a extremos en el interior de la bola: $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Estos han de ser extremos libres de f, y por tanto –de existir– debe cumplirse que $\nabla f = 0$. El sistema es:

$$f_x = 2x = f_y = z = f_z = y = 0$$

La única solución es el punto $P_1 = (0, 0, 0)$ que, efectivamente, está dentro de la bola.

Buscamos ahora los posibles valores extremos en la frontera de la bola. Sea $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Entonces, queremos extremar f bajo la restricción $g = 1$ y, por Lagrange, en los puntos buscados deben existir valores de λ tales que:

$$\nabla f = \lambda \nabla g \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 2x & = & 2\lambda x \\ z & = & 2\lambda y \\ y & = & 2\lambda z \\ x^2 + y^2 + z^2 & = & 1 \end{cases}$$

Si $x = 0$, entonces no puede darse el caso en que $y = z = 0$ –por la cuarta ecuación– y, como la segunda y tercera ecuación implican que si uno de ellos es cero el otro también lo es, ninguna de las variables z, y pueden ser 0. Así, podemos dividir las ecuaciones dos y tres:

$$\frac{y}{z} = \frac{z}{y} \quad \longrightarrow \quad y^2 = z^2 \quad \longrightarrow \quad z = \pm y$$

Sustituyendo esta combinación en la cuarta ecuación, llegamos a los puntos críticos:

$$P_2 = (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \qquad P_4 = (0, -1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$$
$$P_3 = (0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}) \qquad P_5 = (0, -1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$$

Si en las ecuaciones de más arriba tenemos que $\lambda = 1$, entonces la segunda y tercera ecuación nos dicen que $y = 2z$ y $z = 2y$, y por tanto $y = z = 0$. Con ello, de la cuarta ecuación, $x = \pm 1$. De este modo:

$$P_6 = (1, 0, 0) \qquad P_7 = (-1, 0, 0)$$

Evaluando f en los siete puntos críticos, llegamos a que el máximo/mínimo es:

$$\text{máx}\,\{f\} = 1 = f(P_6) = f(P_7)\ , \quad \text{mín}\,\{f\} = -\frac{1}{2} = f(P_3) = f(P_4)$$

■

(4) *a*) Dada la función $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$, determine el punto más cercano al origen de su plano tangente en el punto $(1,1,3)$.

b) Encontrar el volumen máximo de un paralelepípedo de diagonal 1.

Solución:

a) Usaremos el gradiente como vector normal al plano, y con esto obtenemos:

$$\vec{n} = (2x + y, 2y + x, -1)\Big|_{(1,1,3)} = (3,3,-1)$$

$$\therefore\ \Pi : z = 3x + 3y - 3$$

De optimización, sabemos que minimizar la distancia equivale a minimizar la distancia al cuadrado. Entonces, consideremos $d(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ la función distancia al cuadrado al origen. Queremos:

$$\text{mín}\ \ d(x,y,z)$$
$$s.a.\ z = 3x + 3y - 3$$

Usando multiplicadores de Lagrange,

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(3x + 3y - z - 3) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} 2x &= 3\lambda \\ 2y &= 3\lambda \\ 2z &= -\lambda \\ 3x + 3y - z &= 3 \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones obtenemos que $x = y$. Reemplazando en la última ecuación, junto con z de la ecuación tres, obtenemos que

$$6x + \frac{\lambda}{2} = 3$$

Usando la primera ecuación nuevamente, podemos despejar el valor de λ, concluyendo que este es $\lambda = \dfrac{6}{19}$. Reemplazando en cadena, llegamos a que el punto buscado es:

$$P = \left(\frac{9}{19}, \frac{9}{19}, -\frac{3}{19}\right)$$

Sabemos que es un mínimo y no un máximo, pues el punto más lejano al origen tiene todas sus componentes infinitas.

b) El volumen del paralelepípedo está dado por el producto entre su base y su altura, i.e. $V = xyz$ si x, y, z son sus lados. Ahora, la longitud de su diagonal está dada por $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 1$. Queremos entonces:

$$\text{máx}\ \ V(x,y,z) = xyz$$
$$s.a.\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

En la restricción, nuevamente usamos la distancia al cuadrado. Así,

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda) = xyz - \lambda(x^2+y^2+z^2-1) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} yz &= 2x\lambda \\ xz &= 2y\lambda \\ xy &= 2z\lambda \\ x^2+y^2+z^2 &= 1 \end{cases}$$

Multiplicamos la primera ecuación por x, la segunda por y y la tercera por z:

$$xyz = 2x^2\lambda = 2y^2\lambda = 2z^2\lambda$$

De esta igualdad, obtenemos que $x^2 = y^2$. Como lo que buscamos son distancias, tanto x como y son mayores o iguales a cero, y por tanto $x = y$. De manera análoga, es posible concluir que $x = z$ y $z = y$. Reemplazando en la cuarta condición,

$$x^2 + x^2 + x^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Como $x = y = z$, el volumen máximo es:

$$V_{\text{máx}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3$$

■

(5) Hallar distancia mínima entre el elipsoide $x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 2$. (*Nota:* Ambas superficies no se intersecan).

Solución:

Sean (x,y,z) y (u,v,w) puntos sobre el elipsoide y el plano, respectivamente. Sabemos que es suficiente extremar el cuadrado de la distancia entre ellos:

$$d(x,y,z,u,v,w) = (x-u)^2 + (y-v)^2 + (z-w)^2$$

Así, debemos extremar la función d sujeto a las restricciones

$$F_1(x,y,z) = x^2 + 4y^4 + z^2 - 1 = 0\ , \quad F_2(u,v,w) = u + v + w - 2 = 0$$

El lagrangiano es simplemente:

$$\mathcal{L}(x,y,z,u,v,w,\lambda_1,\lambda_2) = d - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2$$

Así, el sistema $\nabla\mathcal{L} = 0$ queda como sigue:

$$2(x-u) = 2x\lambda_1 \tag{5.5}$$
$$2(y-v) = 8y\lambda_1 \tag{5.6}$$
$$2(z-w) = 2z\lambda_1 \tag{5.7}$$
$$2(x-u) = -\lambda_2 \tag{5.8}$$
$$2(y-v) = -\lambda_2 \tag{5.9}$$
$$2(z-w) = -\lambda_2 \tag{5.10}$$
$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 1 \tag{5.11}$$
$$u + v + w = 2 \tag{5.12}$$

De las ecuaciones (5.8), (5.9) y (5.10), igualando,

$$x - u = y - v = z - w \tag{5.13}$$

Así, los lados izquierdos de las ecuaciones (5.5), (5.6) y (5.7) son iguales; entonces, igualando los lados derechos de (5.5) y (5.6) obtenemos que $2x\lambda_1 = 8y\lambda_1$.

Ahora bien, $\lambda_1 \neq 0$ pues, de ser cero, tendríamos que $(x, y, z) = (u, v, w)$ lo cual es imposible, pues ambas superficies no se intersecan. Por tanto, cancelamos λ_1 obteniendo $y = \dfrac{x}{4}$. De manera análoga, obtenemos que $z = x$. Sustituyendo estas dos condiciones en la igualdad (5.11) llegamos a:

$$\frac{9}{4}x^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad x = \pm\frac{2}{3}$$

- Si $x = 2/3$, entonces $y = 1/6,\ z = 2/3$.
  Usando (5.13) tenemos que $v = y - x + u = u - \dfrac{1}{2}$ y que $w = z - x + u = u$. Sustituyendo estas relaciones en (5.12) obtenemos:

  $$2 = 3u - \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad u = \frac{5}{6}$$

  Por tanto,

  $$x - u = y - v = z - w = -\frac{1}{6} \quad \longrightarrow \quad d = 3\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{12}$$

- $x = -2/3$, entonces $y = -1/6,\ z = -2/3$.
  Usando (5.13) como antes, tenemos que $v = u + \dfrac{1}{2}$ y que $w = u$. Al sustituir en (5.12) obtenemos:

  $$2 = 3u + \frac{1}{2} \quad \longrightarrow \quad u = \frac{1}{2}$$

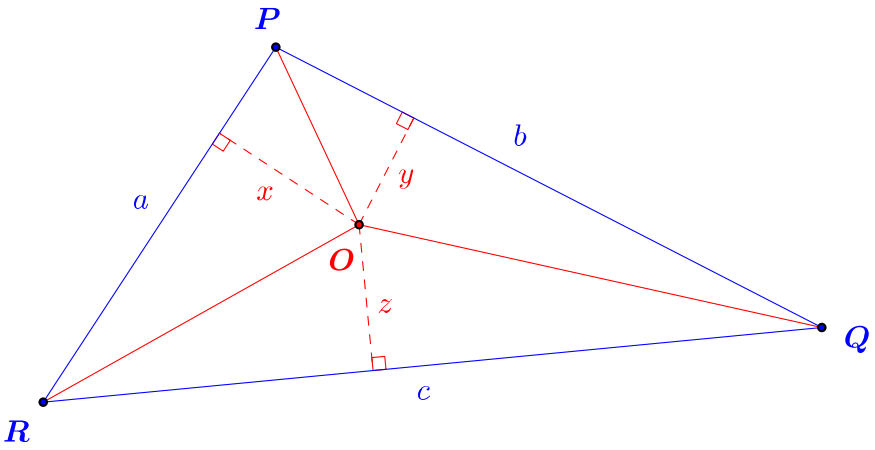
  Por tanto,

  $$x - u = y - v = z - w = -\frac{7}{6} \quad \longrightarrow \quad d = 3\left(\frac{7}{6}\right)^2 = \frac{49}{12}$$

Por último, notamos que –como el elipsoide es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^2$– debe existir un punto más cercano al plano, cuya distancia corresponde a una de las soluciones obtenidas.

Luego, la distancia mínima es $d_m = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$. ■

(6) Considerar un triángulo de área A fija y lados a, b, c. Dado un punto O al interior del triángulo, se bajan perpendiculares de largos x, y, z hacia los lados respectivos a, b, c como en la figura. Si se construye un paralelepípedo recto de aristas x, y, z y volumen V, probar que dicho volumen se maximiza cuando las líneas que unen O a los vértices P, Q, R del triángulo lo dividen en tres áreas iguales. Además, determinar el valor de V en tal caso.



Solución:

Primero que todo, notemos que el área total A es la suma de las áreas de los triángulos que la componen:

$$A = \text{Área}_{\triangle PQO} + \text{Área}_{\triangle QRO} + \text{Área}_{\triangle RPO}$$

Dichas áreas son conocidas, pues contamos con las alturas (x, y, z) y las bases (a, b, c). Por tanto,

$$A = \frac{xa}{2} + \frac{yb}{2} + \frac{zc}{2}$$

o bien

$$A = xa + yb + zc$$

Por otra parte, el volumen del paralelepípedo es, simplemente, $V = xyz$. De esta forma, la función de Lagrange está dada por:

$$\mathcal{L}(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(xa + yb + zc - 2A)$$

Calculando las respectivas derivadas, e igualando a cero,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x &= yz - a\lambda = 0 \\
\mathcal{L}_y &= xz - b\lambda = 0 \\
\mathcal{L}_z &= xy - c\lambda = 0 \\
\mathcal{L}_\lambda &= xa + yb + zc - 2A = 0
\end{aligned}$$

Si multiplicamos las tres primeras igualdades por x, y, z respectivamente, obtendremos que:

$$xyz = ax\lambda = by\lambda = cz\lambda$$

Como $\lambda \neq 0$ (pues eso implicaría que $x = y = z = 0$ simultáneamente), entonces $ax = by = cz$. Reemplazando en la última igualdad,

$$3ax = 2A \quad \longrightarrow \quad x = \frac{2A}{3a}$$

y también

$$y = \frac{2A}{3b}\ , \quad z = \frac{2A}{3c}$$

Luego, las áreas de los triángulos son:

$$\begin{aligned}
\text{Área}_{\triangle PQO} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2A}{3a}a = \frac{A}{3} \\
\text{Área}_{\triangle QRO} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2A}{3b}b = \frac{A}{3} \\
\text{Área}_{\triangle RPO} &= \frac{1}{2}\cdot\frac{2A}{3c}c = \frac{A}{3}
\end{aligned}$$

lo que demuestra que el volumen máximo se alcanza cuando las tres áreas son iguales. Finalmente, el volumen máximo es:

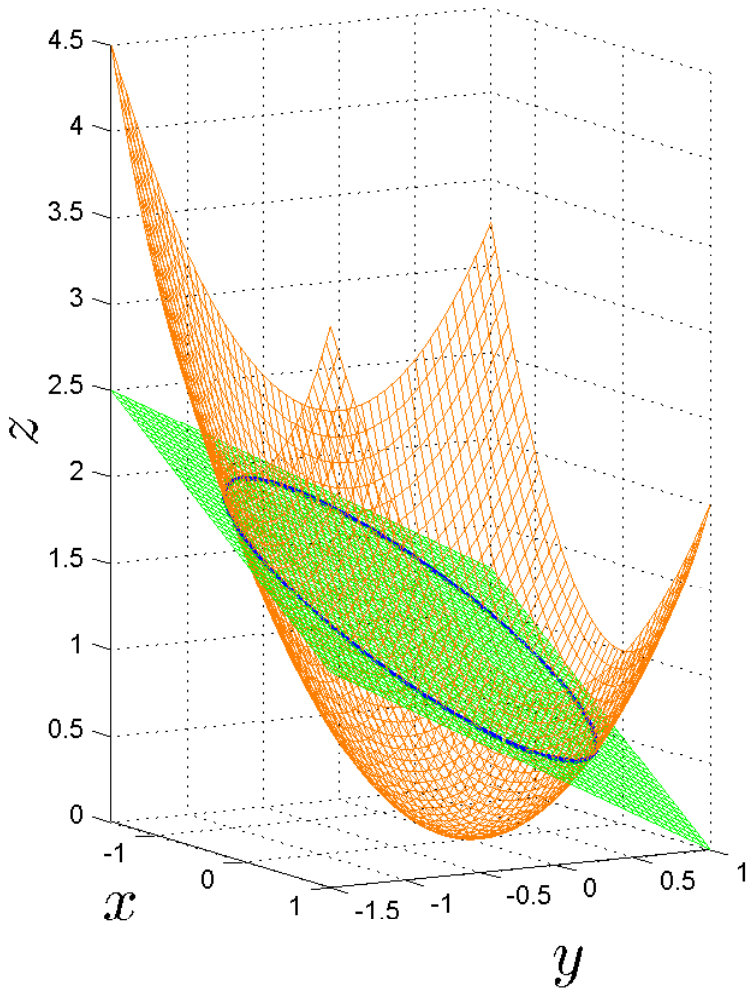
$$V_{\text{máx}} = \frac{2A}{3a}\cdot\frac{2A}{3b}\cdot\frac{2A}{3c} = \frac{8A^3}{27abc}$$

■

(7) El plano $x + y + 2z = 2$ intersecta al paraboloide $z = x^2 + y^2$ en una elipse. Encontrar los puntos de dicha elipse que están más cercanos y más alejados del origen.

Solución:

La curva resultante de la intersección de ambas superficies es cerrada y acotada (compacta), por lo que está garantizada la existencia de un máximo y un mínimo –dentro de dicha curva– para cualquier función continua. Podemos graficar, solo por facilitar la concepción del problema, mas no es requisito para la resolución del problema:



Se nos pide hallar los extremos de la función distancia $d(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, donde el punto (x,y,z) pertenece, simultáneamente, a las superficies $f(x,y,z) = x+y+2z-2 = 0$ y $g(x,y,z) = x^2+y^2-z = 0$. Como sabemos –o deberíamos saber– maximizar/minimizar la función distancia es equivalente a optimizar la función distancia al cuadrado $D(x,y,z) = d^2(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Ahora, la función de Lagrange asociada al problema es:

$$\mathcal{L}(x,y,z,\lambda,\mu) = x^2+y^2+z^2-\lambda(x+y+2z-2)-\mu(x^2+y^2-z)$$

Calculando las respectivas derivadas, e igualándolas a cero,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_x &= 2x-\lambda-2\mu x = 0\\
\mathcal{L}_y &= 2y-\lambda-2\mu y = 0\\
\mathcal{L}_z &= 2z-2\lambda+\mu = 0\\
\mathcal{L}_\lambda &= x+y+2z-2 = 0\\
\mathcal{L}_\mu &= x^2+y^2-z = 0
\end{aligned}$$

Restando las dos primeras igualdades y simplificando la expresión,

$$(1-\mu)(x-y) = 0$$

Tenemos los siguientes casos:

- Si $x = y$, entonces las dos últimas igualdades del sistema nos dicen que:

$$\left.\begin{array}{rcl} x+z & = & 1 \\ 2x^2-z & = & 0 \end{array}\right\} \quad \longrightarrow \quad 2x^2+x=1$$

de donde se obtiene que $x = -1$ o $x = 1/2$. Así, los puntos hallados son:

$$P_1(-1,-1,2) \qquad \wedge \qquad P_2(1/2,1/2,1/2)$$

- Si $\mu = 1$, las dos primeras igualdades del sistema implican que $\lambda = 0$. Con ello, de la tercera igualdad, $z = -1/2$, lo cual contradice a la última igualdad en que se establece que $z = x^2 + y^2 \geq 0$. Así, **no es posible** que $\mu = 1$.

Al evaluar la distancia cuadrática en los puntos P_1 y P_2 hallados,

$$D(P_1) = 1+1+4 = 6 \qquad \wedge \qquad D(P_2) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Por tanto, el punto P_2 es el punto de la elipse más cercano al origen y P_1, el más lejano. ■

(8) **[Propuesto]** Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que $f(\vec{x}) = (x_1 x_2 \cdots x_n)^2$. Buscar los extremos sobre la esfera ${x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2 = \rho^2$. Use este resultado para probar la desigualdad entre la media geométrica y la aritmética.

Solución:

Aplicando los multiplicadores de Lagrange, ya llamando p_0 a nuestro punto máximo, escribimos:

$$\nabla f(p_0) = \lambda \nabla g(p_0)$$

$$g(\vec{x}) = {x_1}^2 + \ldots + {x_n}^2 - \rho^2$$

$$g(p_0) = 0$$

Derivando la igualdad, obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2(x_2 \cdots x_n)(x_1 \cdots x_n) = 2\lambda x_1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 2(x_1 \cdot x_3 \cdots x_n)(x_1 \cdots x_n) = 2\lambda x_2$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} = 2(x_1 \cdots x_{n-1})(x_1 \cdots x_n) = 2\lambda x_n$$

Si multiplicamos la primera igualdad por x_1, la segunda por x_2, etcétera, hasta la última por x_n, tenemos que:

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda {x_1}^2$$

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda {x_2}^2$$

$$\vdots$$

$$(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda {x_n}^2$$

Sumando todas las ecuaciones, llegamos a:

$$n(x_1 \cdots x_n)^2 = \lambda({x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2) = \lambda\rho^2 \quad \longrightarrow \quad \lambda = \frac{n(x_1 \cdots x_n)^2}{\rho^2}$$

Reemplazando λ en las ecuaciones, encontramos

$${x_i}^2 = \frac{\rho^2}{n}$$

Luego, si llamamos $P = \left(\frac{\rho}{\sqrt{n}}, \frac{\rho}{\sqrt{n}}, \ldots, \frac{\rho}{\sqrt{n}}\right)$, f tiene un máximo en P con restricción $g(P) = 0$. Además, dado que P es un máximo, concluimos que para un punto $\vec{x}$ cualquiera que se encuentre en la esfera:

$$\begin{aligned}
f(\vec{x}) &\leq f(P) \\
\left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right) &\leq \left(\frac{\rho^2}{n} \cdots \frac{\rho^2}{n}\right) \\
\left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right) &\leq \left(\frac{\rho^2}{n}\right)^n \\
\left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right)^{\frac{1}{n}} &\leq \left(\frac{\rho^2}{n}\right) \\
\left({x_1}^2 \cdots {x_n}^2\right)^{\frac{1}{n}} &\leq \left(\frac{{x_1}^2 + \ldots {x_n}^2}{n}\right)
\end{aligned}$$

Llamando ${x_i}^2 = a_i$, obtenemos:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

Con lo que hemos probado esta desigualdad. Notar que, aunque lo hemos demostrado para un punto sobre la esfera, a todo $\vec{x}$ en el espacio le podemos asociar un ρ tal que dicho punto esté contenido en una esfera. ■

Cálculo integral en funciones escalares

III.i. Integrales dobles

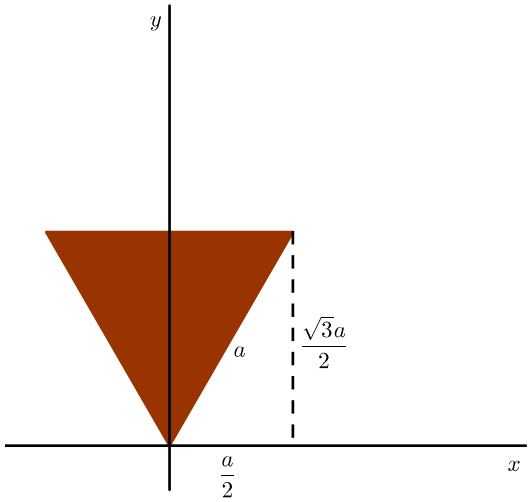
(1) *a*) Calcular la integral de la función $f(x,y) = x^2+y^2$ sobre la región determinada por un triángulo equilátero invertido de lado a, con uno de sus vértices apoyados en el origen.

b) Calcule $\iint\limits_{[1,2]\times[2,4]} ye^{xy}\,dxdy$

c) Evalúe $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dydx$

Solución:

a) La región de integración es la siguiente:



Notamos que, tanto la función como la región, poseen simetría axial con respecto al eje Y. De esta forma. solo calcularemos la integral en la porción de la región ubicada en el primer cuadrante:

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) : 0 \le x \le \frac{a}{2},\ x\sqrt{3} \le y \le \frac{\sqrt{3}a}{2}\right\}$$

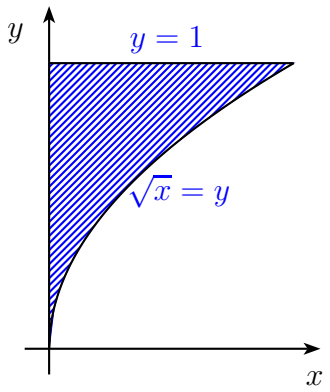
De esta forma,

$$\begin{aligned} I &= 2\int_0^{a/2}\int_{x\sqrt{3}}^{a\sqrt{3}/2} x^2+y^2\ dydx \\ &= 2\int_0^{a/2}\left(yx^2+\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{x\sqrt{3}}^{a\sqrt{3}/2} dx \\ &= 2\int_0^{a/2}\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}x^2+\frac{a^3\sqrt{3}}{8}-2\sqrt{3}x^3\right)\ dx \\ &= 2\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}x^3+\frac{a^3\sqrt{3}}{8}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x^4\right)\Big|_0^{a/2} \\ &= \frac{5\sqrt{3}a^4}{48} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \iint_{[1,2]\times[2,4]} ye^{xy}\ dxdy &= \int_2^4\left(\int_1^2 ye^{xy}\ dx\right)\ dy \\ &= \int_2^4 e^{2y}-e^y\ dy \\ &= \left(\frac{e^{2y}}{2}-e^y\right)\Big|_2^4 \\ &= \frac{e^8}{2}-\frac{e^4}{2}-e^4+e^2 \end{aligned}$$

c) Es claro que conviene integrar primero con respecto a x. La región de integración $\mathcal{R}$ está dada por:



Escrita en términos de y,

$$\mathcal{R}=\{(x,y): 0\le y\le 1,\ 0\le x\le y^2\}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dydx &= \int_0^1 \int_0^{y^2} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dxdy \\ &= \int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}\Big|_0^{y^2} dy \\ &= \int_0^1 y\sqrt{y^2+1} - y\, dy \\ &= \left(\frac{(y^2+1)^{3/2}}{3} - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{6}\end{aligned}$$

■

(2) Calcular el volumen del sólido limitado por el elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solución:

Podemos ver que el sólido está limitado por dos "tapas", dadas por las funciones:

$$f(x,y) = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\,, \quad g(x,y) = -c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

donde (x,y) pertenecen a la región de integración dada por la elipse

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$$

El volumen estará dado por la integral de $f - g$ en la región $\mathcal{E}$. Usamos entonces la simetría del sólido para escribir que:

$$V = \iint_{\mathcal{E}} f - g\; dA = 8c\int_0^a \int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}\; dydx$$

Consideremos ahora solo la integral en dy. Por simplicidad, llamamos $A = A(x) = \sqrt{1 - x^2/a^2}$. Así,

$$\int_0^{bA} \sqrt{A^2 - \frac{y^2}{b^2}}\; dy = A\int_0^{Ab} \sqrt{1 - \frac{y^2}{(Ab)^2}}\; dy$$

Ahora, estamos en cálculo de una variable, por lo que podemos usar *todas* las herramientas que manejamos. Hacemos el cambio de variable $y = Ab\sin t$, $dy = Ab\cos t dt$. Con esto, la integral anterior queda como:

$$A^2 b\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t}\cos t\; dt = A^2 b\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\; dt = \frac{A^2 b\pi}{4} = \frac{\pi b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

Entonces:

$$V = 2\pi bc \int_0^a 1 - \frac{x^2}{a^2}\, dx = \frac{4}{3}\pi abc$$

■

(3) *a*) Una integral doble de una función se reduce a la integral iterada:

$$\int_0^3 \int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x,y)\, dx\, dy$$

Determine la región S e invierta el orden de integración.

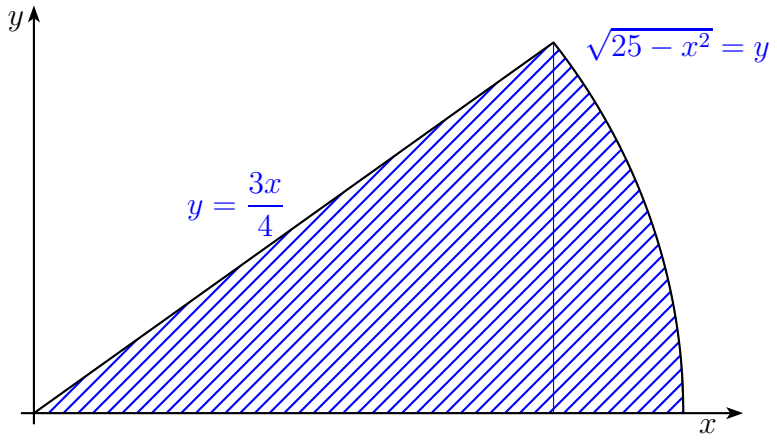
b) Un volumen limitado por una superficie $z = f(x,y)$ y por una región R en el plano XY se expresa de la siguiente forma:

$$V = \int_1^2 \int_x^{x^3} f(x,y)\, dydx + \int_2^8 \int_x^8 f(x,y)\, dydx$$

Dibujar la región R y expresar V con el orden de integración invertido. Calcular V cuando $f(x,y) = x^2/y$.

Solución:

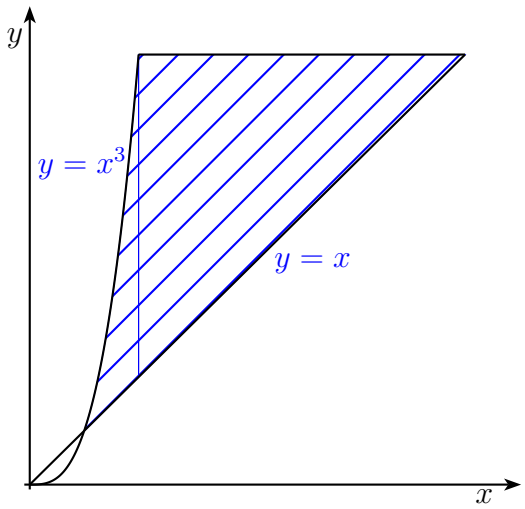
a) Para cada valor de y fijo entre 0 y 3, la integración respecto a x se efectúa entre $4y/3$ y $\sqrt{25-y^2}$. Por lo tanto, la región estará limitada –en x– entre esas dos curvas:



Cuando se invierte el orden de integración, la región se divide de la siguiente forma:

$$\int_0^4 \int_0^{3x/4} f(x,y)\, dydx + \int_4^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x,y)\, dudx$$

b) Para graficar la región, simplemente nos guiamos por los límites de integración. Fijamos los límites en el eje X, y luego vemos los intervalos en los que se mueve y (las funciones de los intervalos). Haciendo ésto, llegamos a la siguiente región:



Luego podemos, del gráfico, deducir los límites para la integral con el orden de integración invertido:

$$V = \int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)\ dxdy$$

Ahora, si $f(x,y) = x^2/y$, podemos usar cualquiera de las dos expresiones para calcular la integral. Si usamos la primera, notamos que $1/y$ integrará $\ln y$; luego, evaluarla en los límites y volver a integral sería complicado. Pero, si usamos la segunda integral, solo encontramos polinomios:

$$V = \int_1^8 \int_{\sqrt[3]{y}}^{y} f(x,y)\ dxdy = \int_1^8 \frac{1}{y}\left(\frac{y^3}{3} - \frac{y}{3}\right)\ dy = \frac{1}{3}\int_1^8 y^2 - 1\ dy = \frac{490}{9}$$

■

(4) *a*) Calcule

$$I = \int_0^1 \int_{y^2}^{1} e^{x^2} y\ dxdy$$

b) Demuestre que

$$\int_0^a \int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\ dxdy = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x)\ dx$$

Solución:

a) Notemos que la función en x no posee primitiva, por lo que debemos invertir el orden de integración. La región en cuestión es simple:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) : 0 \le y \le 1,\ y^2 \le x \le 1\} = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le \sqrt{x}\}$$

Así,

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} e^{x^2} y\ dydx = \frac{1}{2}\int_0^1 x e^{x^2} = \frac{e-1}{4}$$

b) Dado que no podemos efectuar la integración en x por la presencia de f, intentaremos intercambiar el orden de integración. La región es:

$$\mathcal{R} = \{(x,y) : 0 \le y \le a,\ 0 \le x \le y\} = \{(x,y) : 0 \le x \le a,\ x \le y \le a\}$$

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^a \int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\ dxdy &= \int_0^a \int_x^a e^{m(a-x)} f(x)\ dydx \\ &= = \int_0^a e^{m(a-x)} f(x) \int_x^a dy\ dx \\ &= = \int_0^a (a-x) e^{m(a-x)} f(x)\ dx\end{aligned}$$

■

(5) Calcule la siguiente integral

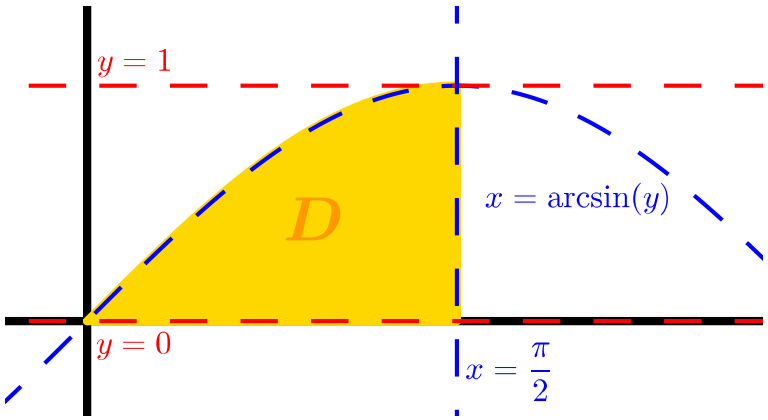
$$\int_0^1 \int_{\arcsin(y)}^{\pi/2} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\ dx\, dy$$

Solución:

Denotemos por D a la región de integración:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 0 \le y \le 1, \arcsin(y) \le y \le \frac{\pi}{2}\right\}$$

Ya sea mediante análisis gráfico o por mera álgebra, es posible describir la región dejando a x como variable independiente. En este caso, dibujamos las curvas frontera $y = 0$, $y = 1$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \arcsin(y) \ \leftrightarrow\ y = \sin(x)$:



Por tanto:

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle|\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \sin(x)\right\}$$

Calculamos la integral intercambiando el orden:

$$\begin{aligned}
\iint_D \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\; dx\, dy &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\sin(x)} \cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\; dy\, dx \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(x)\cos(x)\sqrt{1+\cos^2(x)}\; dx \qquad \Big(u=\cos^2(x)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u}\; du \;=\; \frac{1}{3}(1+u)^{3/2}\Big|_0^1 \\
&= \frac{2\sqrt{2}-1}{3}
\end{aligned}$$

■

(6) Calcule la siguiente integral:

$$\iint_R e^{x/y}\; dA$$

donde R es la región en el plano encerrada por las curvas $y=\sqrt{x}$ e $y=\sqrt[3]{x}$.

Solución:

Lo primero que notamos es que la función

$$f(x,y)=e^{x/y}$$

es fácil de integrar en x. Además, la región en cuestión se puede definir de la siguiente forma:

$$R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0\le y\le 1, y^3\le x\le y^2\}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\iint_R e^{x/y}\; dA &= \int_0^1\int_{y^3}^{y^2} e^{x/y}\; dx\, dy \\
&= \int_0^1 \Big(ye^y - ye^{y^2}\Big)\; dy \\
&= \frac{3-e}{2}
\end{aligned}$$

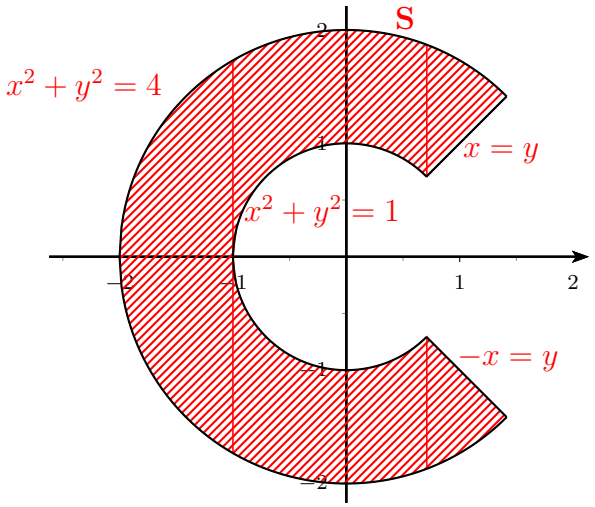
■

(7) **[Propuesto]** La siguiente suma de integrales representa la integral doble de una función $f(x,y)$ sobre una región $\mathcal{S}$. Identifique $\mathcal{S}$ e invierta el orden de integración:

$$\left\{\int_{-2}^{-1}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{-1}^{1/\sqrt{2}}\int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{-1}^{1/\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-\sqrt{1-x^2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{x}^{\sqrt{4-x^2}} + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{-x}\right\} f(x,y)\; dydx$$

Solución:

La región en cuestión es la que sigue:



Si invertimos el orden de integración, encontraremos **7 regiones**, lo cual es mucho trabajo para quien escribe –pero queda propuesto al lector– y por eso es deseable encontrar otra forma de barrer la región. ¿Cómo se haría en polares? La región sería simplemente

$$\mathcal{S} : \{(r,\theta) : \pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4,\ 1 \leq r \leq 2\}$$

y es simplemente un rectángulo. Veremos, en el próximo apartado, que

$$\iint_{\mathcal{S}_{x,y}} f(x,y)\ dxdy = \iint_{\mathcal{S}_{r,\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\ r\,dr\,d\theta$$

pues el elemento de área varía según el radio/ángulo. En este caso, la integral es trivial; esto revela el enorme potencial del Teorema de Cambio de Variable. ■

III.ii. Cambios de variable

(1) Sea R la región en las variables u, v dada por:

$$R = \{(u,v) : 1 \leq u \leq 2,\ 1 \leq v \leq 3\}$$

Grafique la imagen de R bajo la transformación $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$.

Solución:

De la segunda expresión al cuadrado, tenemos que:

$$y^2 = 4u^2v^2 \quad \longrightarrow \quad u^2 = \frac{y^2}{4v^2},\ v \neq 0$$

En la primera expresión:

$$x = \frac{y^2}{4v^2} - v^2$$

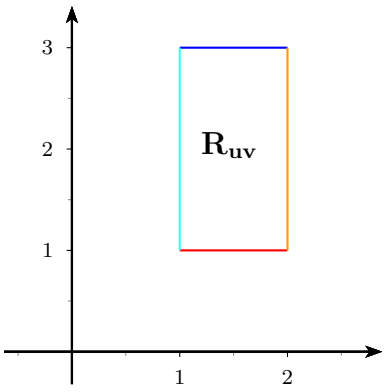
Evaluando las rectas $v = 1, 3$, tenemos las curvas en el plano XY dadas por, respectivamente, las siguientes parábolas:

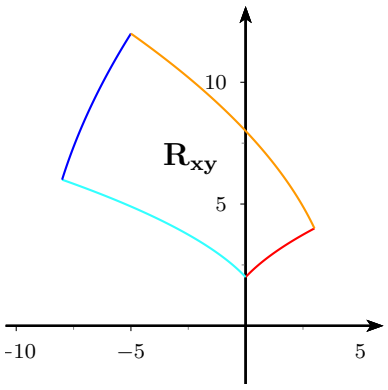
$$x = \frac{y^2}{4} - 1,\ y \in [2, 4] \qquad \wedge \qquad x = \frac{y^2}{36} - 9,\ y \in [6, 12]$$

Para las otras dos rectas de la frontera –$u = 1, u = 2$–, despejamos de manera análoga $v^2 = \dfrac{y^2}{4u^2}$ y por tanto:

$$x = -\frac{y^2}{4} + 1,\ y \in [2, 6] \qquad \wedge \qquad x = -\frac{y^2}{16} + 4,\ y \in [4, 12]$$

Finalmente, las regiones son:





■

(2) Dada la transformación $(x, y) = \vec{F}(u, v) = \dfrac{1}{\sqrt{34}}\left(5\sqrt{9v + u}, 3\sqrt{25v - u}\right)$ definida en la región $\mathcal{R} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq u \leq 9, 1 \leq v \leq 4\}$, se pide encontrar el gráfico de la región imagen $\mathcal{D}$ contenido en el primer cuadrante del plano XY y el jacobiano asociado a la transformación.

Solución:

De la transformación $(u, v) \mapsto (x, y)$ se concluye que:

$$\frac{5}{\sqrt{34}}\sqrt{9v + u} = x \qquad \wedge \qquad \frac{3}{\sqrt{34}}\sqrt{25v - u} = y$$

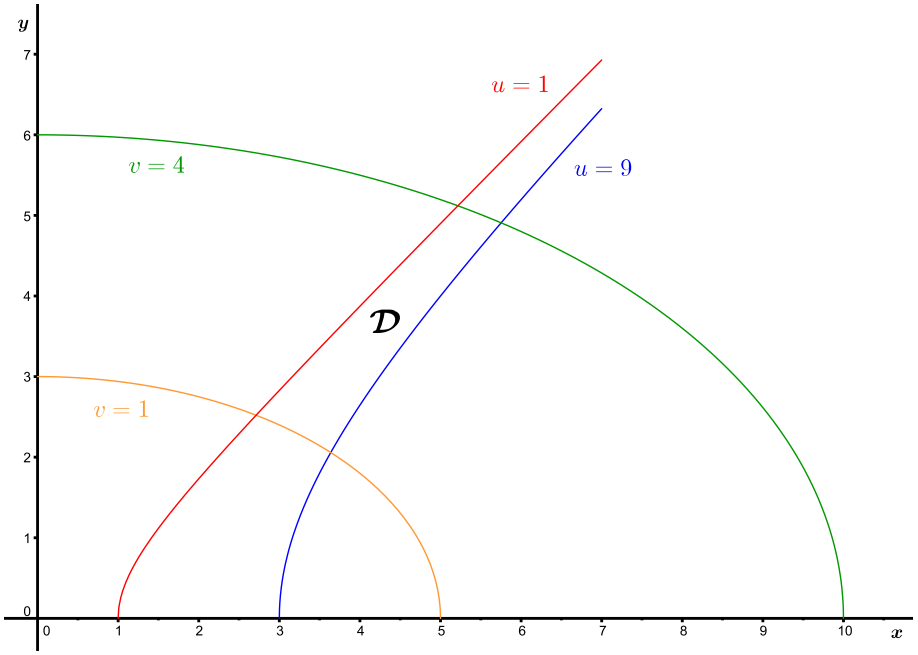
Resolviendo para (u, v) obtenemos:

$$u = x^2 - y^2 \qquad \wedge \qquad v = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9}$$

Como $1 \leq u \leq 9$ y $1 \leq v \leq 4$, se deduce que la imagen $\mathcal{D} = \vec{F}(\mathcal{R})$ está definida por:

$$\mathcal{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 1 \leq x^2 - y^2 \leq 9, 1 \leq \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} \leq 4\right\}$$

Su gráfico es



Ahora bien, el jacobiano se obtiene mediante un cálculo directo:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{15}{4\sqrt{(9v+u)(25v-u)}}$$

■

(3) Calcule

$$\iint_{\mathcal{D}} \cos\left(x-2y\right)^2 \, dA$$

donde $\mathcal{D}$ es la región delimitada por $x+2y=0$, $x-2y=1$ e $y=0$.

Solución:

Sean $u = x+2y$, $x-2y=v$. Con esta sustitución,

- la recta $x+2y=0$ es la recta $u=0$
- la recta $x-2y=0$ es la recta $v=1$
- la recta $y=0$ es la recta $u=v$
- $dA_{xy} = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dA_{uv}$

Entonces, la región de integración en el plano UV es

$$\mathcal{R} = \{(u,v) : 0 \le u \le 1,\ u \le v \le 1\}$$

Por el T.F.In,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|^{-1} = \left|\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\right)\right|^{-1} = \frac{1}{4} \quad \longrightarrow \quad dA_{xy} = \frac{dA_{uv}}{4}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}\iint_{\mathcal{D}} \cos(x-2y)^2 \, dA_{xy} &= \frac{1}{4}\iint_{\mathcal{R}} \cos v^2 \, dA_{uv} \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \int_u^1 \cos v^2 \, dv\, du \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \int_0^v \cos v^2 \, du\, dv \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 v\cos v^2 \, dv \;=\; \frac{\sin v^2}{8}\Big|_0^1 \\ &= \frac{\sin 1}{8}\end{aligned}$$

■

(4) *a*) Sea A la región acotada por $x^2+4y^2=1$. Calcule

$$\iint_A \frac{xy}{x^2+y^2}\, dx\, dy$$

b) Usando coordenadas polares, calcule

$$\iint_R \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\, dA$$

siendo $R=\{(x,y): 1\le x\le 2,\ 0\le y\le x\}$.

Solución:

a) Por la simetría del problema, sean $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$, y de este modo la integral queda como sigue:

$$\mathbf{I}=\iint_{A'} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2}\, rdrd\theta = \iint_{A'} \cos\theta\sin\theta\, rdrd\theta$$

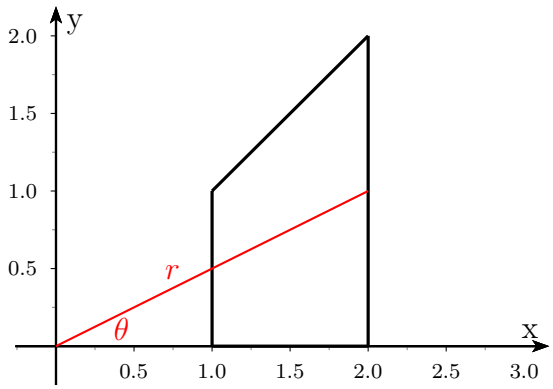
Ahora, debemos hallar A': en coordenadas polares, $x^2+4y^2=1$ se ve como

$$r^2\cos^2\theta + 4r^2\sin^2\theta = r^2+3r^2\sin^2\theta = 1 \quad\longrightarrow\quad r=\frac{1}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}$$

ya que $r\ge 0$. Así,

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1+3\sin^2\theta}^{-1}} r\, dr\, d\theta \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta\sin\theta}{1+3\sin^2\theta}\, d\theta \\ &= \frac{\ln(1+3\sin^2\theta)}{12}\Big|_0^{2\pi} \;=\; 0\end{aligned}$$

b) La región R de integración es la que se muestra en la figura:



Observamos que el ángulo θ varía entre $\theta = 0$ –eje X– y $\theta = \pi/4$ –recta $x = y$–, y que el radio varía desde $\sec\theta$ –cuando $x = 1$– hasta $2\sec\theta$ –cuando $x = 2$– para un valor de θ dado. Por lo tanto, en coordenadas polares,

$$R \to R' = \{(r,\theta) : 0 \le \theta \le \pi/4,\ \sec\theta \le r \le 2\sec\theta\}$$

Así,

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{y\sqrt{x^2+y^2}}{x}\, dA &= \iint_{R'} \frac{r\sin\theta\sqrt{r^2}}{r\cos\theta}\, r\, dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(\int_{\sec\theta}^{2\sec\theta} r^2\, dr\right) d\theta \\
&= \frac{7}{3}\int_0^{\pi/4} \frac{\sin\theta}{\cos^4\theta}\, d\theta \\
&= \frac{7}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$

■

(5) Sea $\mathcal{R}$ la región del plano en el cuarto cuadrante acotada por las rectas

$$x + y = 0\ , \quad x - y = 1\ , \quad y = 0$$

Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{dx\, dy}{(x^2-y^2)^{2/5}}$.

Solución:

La región en cuestión corresponde a un triángulo rectángulo con vértice en el origen. Proponemos el siguiente cambio de variables:

$$u = x + y,\ v = x - y \quad \longrightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \frac{1}{2}$$

Ahora,

- $x + y = 0 \to u = 0$

- $x - y = 1 \to v = 1$
- $y = 0 \to u = v$
- $\mathcal{R}' = \{(u, v) : 0 \leq u \leq 1,\ u \leq v \leq 1\}$

Por lo tanto,

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_u^1 \frac{dv\, du}{(uv)^{2/5}} = \frac{5}{6}\int_0^1 \frac{1 - u^{3/5}}{u^{2/5}}\, du = \frac{25}{36}$$

■

(6) Evalúe la integral

$$\iint\limits_{4x^2-8x+y^2\leq 0} \sqrt{4x^2 + y^2}\, dx\, dy$$

Solución:

Completando cuadrados, notamos que la región de integración es la región encerrada por la elipse

$$(x-1)^2 + \frac{y^2}{4} = 1$$

Debemos decidir qué cambio de variables hacer: podemos elegir uno de modo tal que la región de integración sea trivial, u otro tal que el integrando sea fácil de trabajar. Optaremos por este último: sea $x = r\cos\theta,\ y = 2r\sin\theta$. Con ello:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ 2\sin\theta & 2r\cos\theta \end{vmatrix} = 2r$$

La elipse queda como sigue,

$$4x^2 - 8x + y^2 = 4r^2\cos^2\theta - 8r\cos\theta + 4r^2\sin^2\theta = 0 \quad \longrightarrow \quad r = 2\cos\theta$$

Elegimos $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$. Por tanto,

$$\iint\limits_{4x^2-8x+y^2\leq 0} \sqrt{4x^2 + y^2}\, dx\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} 4r^2\, dr\, d\theta = \frac{32}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^3\theta\, d\theta = \frac{128}{9}$$

■

(7) Calcule la integral

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{dx\, dy}{y^3}$$

donde Ω es la región delimitada por las curvas $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \cos x$ e $y = 2\cos x$ que además satisface $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. Para esto, se sugiere hacer

$$u = \frac{\sin x}{y}\ , \quad v = \frac{\cos x}{y}$$

Solución:

Notemos que

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\cos x}{y} & -\dfrac{\sin x}{y^2} \\ -\dfrac{\sin x}{y} & -\dfrac{\cos x}{y^2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{y^3}$$

Como $u^2 + v^2 = \dfrac{1}{y^2}$, entonces:

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = y^3 \quad \longrightarrow \quad \mathbf{I} = \iint_{\Omega'} du dv$$

De la definición de la región,

$$\Omega' = \left\{ \frac{1}{2} \leq u \leq 1,\ \frac{1}{2} \leq v \leq 1 \right\}$$

Finalmente,

$$\mathbf{I} = \iint_{\Omega'} du\, dv = \int_{1/2}^{1}\int_{1/2}^{1} du\, dv = \frac{1}{4}$$

■

(8) **[Propuesto]** Calcule el valor de:

$$\mathbf{I_n} = \iint_{\mathbb{R}^n} \cdots \int \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$$

Solución:

Transformemos el integrando:

$$\exp\left(-\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2\right) = \exp\left(-{x_1}^2 - {x_2}^2 - \ldots - {x_n}^2\right) = \exp\left(-{x_1}^2\right) \cdots \exp\left(-{x_n}^2\right)$$

Dado que la expresión anterior pudo escribirse como una multiplicación de funciones de variables independientes, queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{I_n} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_1}^2\right)\, dx_1\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_2}^2\right)\, dx_2\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_n}^2\right)\, dx_n\right) \\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-{x_i}^2\right)\, dx_i\right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right)\, dx\right)^n = \mathbf{I}^n \end{aligned}$$

pues las variables de integración son mudas. Esta famosa integral se puede calcular como:

$$\mathbf{I} = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right)\, dx = \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right)\, dx\right)^2} = \sqrt{\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-x^2\right)\, dx\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-y^2\right)\, dy\right)}$$

$$\mathbf{I} = \sqrt{\iint_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-x^2 - y^2\right)\, dx\, dy}$$

Pasando a coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta\ , \quad y = r\cos\theta$$

con jacobiano de transformación $dx\, dy = r\, dr\, d\theta$. Para barrer $\mathbb{R}^2$, nos basta que $\theta \in (0, 2\pi)$ y $r \in (0, \infty)$. Entonces, la integral queda:

$$\mathbf{I}^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} re^{-r^2}\, drd\theta = -\pi e^{-r^2}\Big|_0^{\infty} = \pi$$

Luego, el valor final de la integral inicial es

$$\mathbf{I_n} = \sqrt{\pi^n}$$

■

III.iii. Aplicaciones de integrales dobles

(1) Halle el volumen de la región interior al paraboloide $z = 16 - x^2 - 4y^2$ que queda sobre el plano $z = 2x + 8$.

Solución:

Si $\mathcal{R}_{xy}$ denota la proyección de la región sobre el plano XY, entonces –para cada $(x, y) \in \mathcal{R}_{xy}$– la variable z varía desde $2x + 8$ hasta $16 - x^2 - 4y^2$.

Por tanto, si V denota al volumen pedido,

$$V = \iint_{\mathcal{R}_{xy}} \Big((16 - x^2 - 4y^2) - (2x + 8)\Big)\, dx\, dy = \iint_{\mathcal{R}_{xy}} \Big(8 - x^2 - 2x - 4y^2\Big)\, dx\, dy$$

Ahora bien, $\mathcal{R}_{xy}$ es la región encerrada por la proyección sobre el plano XY de la curva de intersección entre ambas superficies. Calculamos dicha ecuación:

$$16 - x^2 - 4y^2 = 2x + 8 \quad \longleftrightarrow \quad (x + 1)^2 + 4y^2 = 9$$

Por tanto, $\mathcal{R}_{xy} = \{(x, y) : (x + 1)^2 + 4y^2 \leq 9\}$ y, completando cuadrados en el integrando, llegamos a que:

$$V = \iint_{\mathcal{R}_{xy}} \Big(9 - (x + 1)^2 - 4y^2\Big)\, dx\, dy$$

Mediante el cambio de variables $(x+1) = 3r\cos\theta$, $y = \dfrac{3}{2}\sin\theta$ la región $\mathcal{R}_{xy}$ es transformada en la región

$$\mathcal{D} = \{(r,\theta) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta 2\pi\}$$

en el plano $R\Theta$. El integrando se transforma en $9(1-r^2)$. Por tanto,

$$V = \iint_{\mathcal{D}} 9(1-r^2)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| \, dr\, d\theta$$

Se verifica trivialmente que $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \dfrac{9r}{2}$. Finalmente,

$$\begin{aligned} V &= \frac{81}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 (r - r^3)\, dr\, d\theta \\ &= \frac{81}{2}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{81\pi}{4} \end{aligned}$$

■

(2) Considere el sólido C limitado por $(ax)^2 + (by)^2 = 1$ y $0 \leq z \leq 1$, y la superficie S dada por $z^2 = (ax)^2 + (by)^2$. Sean V_1 el volumen bajo S e interior a C, y V_2 el volumen sobre S e interior a C. Demuestre que el cociente entre ambas cantidades es independiente de a y b.

Solución:

Consideremos el cambio de variables:

$$x = \frac{r\cos\theta}{a}\ , \quad y = \frac{r\sin\theta}{b} \quad \longrightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \frac{r}{ab}$$

En estas coordenadas, podemos escribir el sólido C como

$$C = \{(r,\theta,z) : r \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ z \in [0,1]\}$$

La superficie S queda definida por

$$S = \{(r,\theta,z) : r \in [0,1],\ \theta \in [0,2\pi],\ z = r\}$$

Así,

$$V_1 = \int_0^1\int_0^{2\pi} r\ \frac{r}{ab} d\theta\, dr = \frac{2\pi}{3ab}$$

$$V_C = \int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{r}{ab} d\theta\, dr = \frac{2\pi}{2ab}$$

con V_C el volumen del sólido. Así, $V_2 = V_C - V_1 = \dfrac{\pi}{3ab}$. Finalmente,

$$\frac{V_1}{V_2} = 2$$

■

(3) Considere un disco de radio a, y un punto A ubicado en su frontera. La densidad de masa por unidad de área en cualquier punto P del disco es igual a la distancia $d(P, A)$. Encontrar:

a) La masa del disco

b) El centro de masa del disco.

c) El momento de inercia del disco, con respecto a un eje perpendicular que pasa por A.

Solución:

a) Para calcular la masa del disco, recurrimos simplemente a la definición. Dado que la densidad de masa depende de la distancia al punto A, colocaremos a éste en el origen. De esta forma, usando coordenadas polares, la circunferencia –sobre el eje X y apoyada en el origen– se escribe como $r = 2a \sin\theta$. La masa queda entonces (con ρ la densidad) como:

$$M = \iint_D dm = \iint_D \rho \; dA = \int_0^{\pi} \int_0^{2a\sin\theta} r \; r \, dr \, d\theta$$

Resolvemos la integral:

$$M = \frac{1}{3}\int_0^{\pi} 8a^3 \sin^3\theta \; d\theta = \frac{8a^3}{3}\int_0^{\pi} \Big(\sin\theta + \cos^2\theta \sin\theta\Big) \; d\theta = \frac{8a^3}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{32a^3}{9}$$

b) Hacemos lo mismo para el centro de masa del disco. Dado que conocemos $\bar{x}$ (que es cero, por simetría), solo calculamos $\bar{y}$:

$$\bar{y} = \frac{1}{M}\iint_D y\rho \; dm = \frac{9}{32a^3}\int_0^{\pi} \int_0^{2a\sin\theta} r\sin\theta r^3 \; dr \, d\theta$$

Resolvemos la integral:

$$\bar{y} = \frac{9}{32a^3}\int_0^{\pi} 4a^3 \sin^4\theta \sin\theta \; d\theta = \frac{9a}{8}\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta)^2 \sin\theta \; d\theta = \frac{3a}{10}$$

c) Procedemos de la misma forma con el momento de inercia respecto al eje Z:

$$I_{AA} = \iint_D d^2 \; dm = \int_0^{\pi} \int_0^{2a\sin\theta} r^2 \; r \; r \, dr \, d\theta$$

con d la distancia entre el eje y los puntos interiores de la región. Así,

$$I_{AA} = \int_0^{\pi} \frac{32a^5}{5}\sin^5\theta \; d\theta = \frac{32a^5}{5}\int_0^{\pi} (1 - \cos^2\theta)^2 \sin\theta \; d\theta = \frac{48a^2}{25}M$$

■

(4) Considere la región del plano:

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq 1\}$$

Determine los valores de a, b de modo que la integral

$$\iint_{\Omega} 2x^2 + xy + y^2 - x - 2y + 17 \; dx\, dy$$

sea mínima.

Solución:

Lo primero que haremos será proponer el siguiente cambio de variables, que facilita el análisis:

$$u = x - a \; , \quad v = y - b$$

El jacobiano de transformación será 1. La integral entonces queda como:

$$\iint_{\Omega} 2(u + a)^2 + (u + a)(v + b) + (v + b)^2 - (u + a) - 2(v + b) - 17 \; du\, dv$$

Podemos expandir, llegando a:

$$\iint_{\Omega} 2u^2 + 4ua + 2a^2 + uv + av + ub + ab + v^2 + 2vb + b^2 - u - a - 2v - 2b + 17 \; du\, dv$$

Ahora, debemos minimizar. Primero, dividiremos la integral en dos partes: una que depende de a, b, y otra que no:

$$\iint_{\Omega} f(u, v) \; du\, dv + \iint_{\Omega} 4ua + 2a^2 + av + ub + ab + 2vb + b^2 - a - 2b \; du\, dv$$

Haremos una segunda transformación a coordenadas polares. Para efectos de notación, usaremos $S = \sin\theta, \; C = \cos\theta$, y con ello:

$$\iint_{\Omega} f(u, v) \; du\, dv + \int_0^1 \int_0^{2\pi} 4arC + 2a^2 + arS + brC + ab + 2brS + b^2 - a - 2b \; r \, dr\, d\theta$$

Recordando que las integrales de potencias impares de senos y cosenos en un periodo se anulan, tenemos:

$$\iint_{\Omega} f(u, v) \; du\, dv + \underbrace{\int_0^1 \int_0^{2\pi} 2a^2 + ab + b^2 - a - 2b \; r \, dr\, d\theta}_{\pi\left(2a^2 + ab + b^2 - a - 2b\right)}$$

Ya sabemos como buscar mínimos: hacemos gradiente igual a cero. Con esto, y llamando F a la función anterior:

$$\frac{\partial F}{\partial a} = \pi(4a + b - 1) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = \pi(a + 2b - 2) = 0$$

Resolvemos fácilmente este sistema. Reemplazando la segunda ecuación en la primera, obtenemos que $b = 1$. Reemplazando, luego, este valor en la segunda, notamos que $a = 0$. Debemos comprobar que es un mínimo:

$$F_{aa} = 4\pi \ , \quad F_{bb} = 2\pi \ , \quad F_{ab} = \pi$$

Por lo tanto, el hessiano es positivo definido y, con esto, el punto es efectivamente un mínimo. ■

III.iv. Integrales triples

(1) La siguiente integral iterada representa la integral triple de la función $f = f(x, y, z)$ en una región $\mathcal{R}$:

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{1-x} f(x, y, z) \; dz \, dy \, dx$$

a) Escriba esta integral triple como integral iterada en orden $dz\, dx\, dy$.

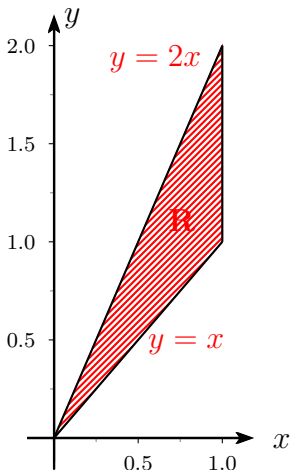
b) Escriba ahora esta integral triple como integral iterada en orden $dx\, dy\, dz$.

Solución:

a) Podemos escribir la integral triple como

$$\int_0^1 \int_x^{2x} \int_0^{1-x} f(x, y, z) \; dz \, dy \, dx = \iint_R \left(\int_0^{1-x} f(x, y, z) \; dz \right) \; dy \, dx$$

donde R es la región en el plano XY que debemos determinar: los valores de x están limitados por 0 y 1, mientras que las cotas de y, para un x fijo, están dadas por x y $2x$. Así, la región queda dibujada como sigue:



Para invertir el orden, deberemos separar la integral $\mathbf{I}$ en una suma de dos integrales:

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \int_{y/2}^{y} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\; dz\, dx\, dy + \int_1^2 \int_{y/2}^{1} \int_0^{1-x} f(x,y,z)\; dz\, dx\, dy$$

b) Por la representación original de la integral, la región $\mathcal{R}$ puede escribirse mediante las siguientes desigualdades:

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ x \leq y \leq 2x \\ 0 \leq z \leq 1 - x \end{cases}$$

Juntando la primera y tercera desigualdad, notamos que:

$$0 \leq z \leq 1$$

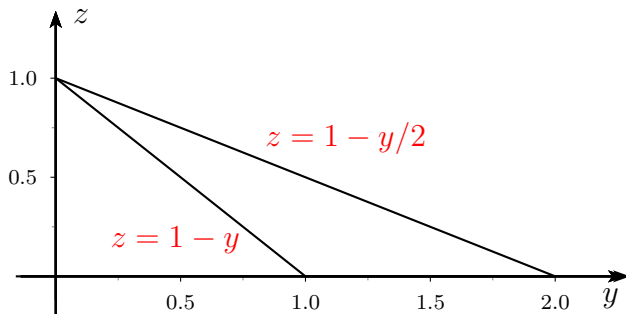
De manera análoga, las desigualdades primera y segunda muestran que $y \geq 0$, mientras que las dos últimas implican que $y \leq 2x \leq 2(1-z)$. Luego,

$$0 \leq y \leq 2(1-z)$$

Ahora bien, de las dos primera desigualdades –tal como se vio en el apartado anterior– se cumple que $x \geq y/2$. Por las tres desigualdades, tenemos que $x \leq 1,\ x \leq y$ y $x \leq 1 - z$. Como $z \in [0,1]$, la tercera condición garantiza la primera, de modo que se puede escribir:

$$\frac{y}{2} \leq x \leq \text{mín}\,\{y, 1-z\}$$

La siguiente figura muestra el triángulo que representa la proyección de $\mathcal{R}$ sobre el plano YZ



Observamos que, bajo la línea $z = 1 - y$, el mínimo es y (simplemente evaluando puntos); mientras que, sobre la línea, es $1 - z$. Así, $\mathcal{R}$ se puede escribir como la unión de las regiones

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - z \\ y/2 \leq x \leq y \end{cases} \quad \wedge \quad \mathcal{R}_2 = \begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ 1 - z \leq y \leq 2(1-z) \\ y/2 \leq x \leq 1 - z \end{cases}$$

Finalmente,

$$\mathbf{I} = \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_{y/2}^{y} f(x,y,z)\; dx\, dy\, dz + \int_0^1 \int_{1-z}^{2(1-z)} \int_{y/2}^{1-z} f(x,y,z)\; dx\, dy\, dz$$

■

(2) Calcular:

$$\iiint_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\Big(7x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 5z^2\Big)^{3/2}\right)\; dx\, dy\, dz$$

donde $\Omega = \{(x,y,z) : 7x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 5z^2 \leq 18\}$.

Solución:

Este tipo de problemas es bastante típico: completemos cuadrados.

$$\begin{aligned} 7x^2 - 4xy + 6y^2 - 4yz + 5z^2 &= \left(7x^2 - 4xy + \frac{4}{7}y^2\right) + \left(5z^2 - 4yz + \frac{4}{5}y^2\right) + \frac{162}{35}y^2 \\ &= \left(\sqrt{7}x - \frac{2}{\sqrt{7}}y\right)^2 + \frac{162}{35}y^2 + \left(\sqrt{5}z - \frac{2}{\sqrt{5}}y\right)^2 \end{aligned}$$

Entonces, tomamos las variables:

$$u = \sqrt{7}x - \frac{2}{\sqrt{7}}y\ , \quad v = \sqrt{\frac{162}{35}}y\ , \quad w = \sqrt{5}z - \frac{2}{\sqrt{5}}y$$

Ahora, queremos el jacobiano de la transformación. Calculamos:

$$\frac{\partial(u,v,z)}{\partial(x,y,z)} = \begin{vmatrix} \sqrt{7} & -\frac{2}{\sqrt{7}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{162}{35}} & 0 \\ 0 & \sqrt{5} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{vmatrix} = -\frac{18\sqrt{2}}{5} \quad \longrightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|^{-1} = \frac{5\sqrt{2}}{36}$$

La región de integración se transforma es

$$u^2 + v^2 + w^2 \leq 18$$

Escribimos de nuevo la integral:

$$\frac{5\sqrt{2}}{36} \iiint_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\Big(u^2 + v^2 + w^2\Big)^{3/2}\right)\; du\, dv\, dw$$

Hacemos un nuevo cambio a coordenadas esféricas:

$$\begin{array}{rcl} u &=& \rho\cos\theta\sin\phi \\ v &=& \rho\sin\theta\sin\phi \\ w &=& \rho\cos\phi \end{array} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \rho^2\sin\phi$$

La integral queda como:

$$\mathbf{I} = \frac{5\sqrt{2}}{36} \iiint_{\Omega} \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\left(\rho^2\right)^{3/2}\right)\rho^2 \sin\phi \; d\rho \, d\theta \, d\phi$$

donde Ω es la región dada por $\rho \leq \sqrt{18}$. Resolvemos la integral:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= 2\pi \cdot \frac{5\sqrt{2}}{36}\left(\int_0^{\sqrt{18}} \sin\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\rho^3\right)\rho^2 \; d\rho\right)\left(\int_0^{\pi} \sin\phi \; d\phi\right) \\
&= \frac{5\sqrt{2}\pi}{9}\left(-\frac{24\sqrt{2}}{\pi}\cos\left(\frac{\pi}{72\sqrt{2}}\rho^3\right)\right)\Bigg|_0^{\sqrt{18}} \\
&= \frac{40\sqrt{2}}{3} + \frac{80}{3}
\end{aligned}$$

■

(3) Considere la región R del espacio limitada al primer octante y

$$x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{1}{2}} + z \leq 1$$

Calcule el volumen de R.

Solución:

Tomemos el siguiente cambio de variables,

$$u = x^{1/3} \; , \quad v = y^{1/2} \; , \quad w = z$$

con jacobiano de transformación:

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} 3u^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6u^2 v$$

La región de integración se transforma en $u + v + w \leq 1$. Con esto, el volumen es:

$$\begin{aligned}
V &= \iiint_R 6u^2 v \; du \, dv \, dw \; = \; \int_0^1 \int_0^{1-u} \int_0^{1-u-v} 6u^2 v \; dw \, dv \, du \\
&= \int_0^1 \int_0^{1-u} (1-u-v) 6u^2 v \; dv \, du \\
&= \int_0^1 6u^2 \int_0^{1-u} v - uv - v^2 \; dv \; du \\
&= \int_0^1 6u^2 \frac{(1-u)^3}{6} \; du \\
&= \frac{1}{60}
\end{aligned}$$

■

(4) *a*) Calcular el volumen de la región acotada por

$$z = 3x + 5y + 3\ , \quad z = 3x - 5y - 10\ , \quad y = 0\ , \quad x = 3\ , \quad y = 2x$$

b) Escriba la integral

$$\mathbf{I} = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{1-x^2-y^2} f(x,y,z)\ dz\, dy\, dx$$

como una integral iterada en el orden $dy\, dz\, dx$.

Solución:

a) Si $\mathcal{T}$ es el triángulo, en el plano XY, delimitado por las rectas $y = 0,\ x = 3,\ y = 2x$, entonces el volumen de la región es

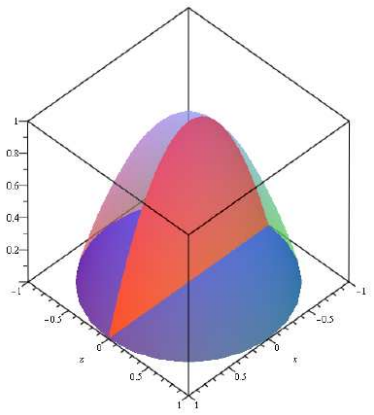
$$V = \iint\limits_{(x,y)\in\mathcal{T}} \int_{3x-5y-10}^{3x+5y+3} dz\, dx\, dy$$

El $\triangle\mathcal{T}$ es la región $0 \le x \le 3,\ 0 \le y \le 2x$. Así,

$$\begin{aligned} V &= \int_0^3 \int_0^{2x} \int_{3x-5y-10}^{3x+5y+3} dz\, dx\, dy \\ &= \int_0^3 \int_0^{2x} 10y + 13\ dy\, dx \\ &= \int_0^3 20x^2 + 26x\ dx \\ &= 297 \end{aligned}$$

b) La región S de integración es $x^2 + y^2 \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2$, que corresponde a la porción del cilindro $x^2 + y^2 \le 1$ comprendida entre el plano $z = 0$ y el paraboloide $z = 1 - x^2 - y^2$.
La proyección del sólido S sobre el plano XZ es la región

$$R = \{(x,z) : -1 \le x \le 1,\ 0 \le z \le 1 - x^2\}$$



El sólido S se puede parametrizar como $(x,z) \in R$, $-\sqrt{1-x^2-z} \leq y \leq \sqrt{1-x^2-z}$. Así,

$$\mathbf{I} = \iint\limits_{(x,z)\in R} \int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x,y,z)\ dy\,dz\,dx = \int_{-1}^{1}\int_{0}^{1-x^2}\int_{-\sqrt{1-x^2-z}}^{\sqrt{1-x^2-z}} f(x,y,z)\ dy\,dz\,dx$$

■

(5) Se considera el sólido S descrito por:

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z \in [0,1],\ x^2+y^2-2x(1-z) \leq 0\}$$

Asumiendo que la distribución de masa μ dentro de S es tal que $\mu(x,y,z) = 1-z$, determinar:

a) la masa de S.

b) la ubicación del centro de masa de S.

Solución:

a) Por definición, la masa de S es:

$$M = \iiint\limits_S \mu(x,y,z)\ dx\,dy\,dz = \iiint\limits_S (1-z)\ dx\,dy\,dz$$

Observamos que, para un z fijo en el intervalo $[0,1]$, la sección S_z definida por:

$$S_z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-2x(1-z) \leq 0\}$$

es un disco centrado en el punto $(0,1-z,z)$ y de radio $(1-z)$. Por lo tanto, su área es $A(S_z) = \pi(1-z)^2$. Integrando,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^1 (1-z)\left(\iint\limits_{S_z} dx\,dy\right)\ dz \ = \ \int_0^1 (1-z)A(S_z)\ dz \\ &= \pi\int_0^1 (1-z)^3\ dz \ = \ \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

b) Las coordenadas del centro de masa $\overline{\mathbf{X}} = (\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ se deducen inmediatamente. Aplicamos el siguiente cambio de variables a coordenadas cilíndricas:

$$(r,\theta,z) \mapsto (x,y,z) = (1-z+r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

Integrando se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{M}\iiint_S x\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{2\pi}(1-z)(r\cos\theta+1-z)\,rd\theta\,dr\,dz \;=\; \frac{4}{5} \\
\bar{y} &= \frac{1}{M}\iiint_S y\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{2\pi}(1-z)(r\sin\theta)\,rd\theta\,dr\,dz \;=\; 0 \\
\bar{z} &= \frac{1}{M}\iiint_S z\mu(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \\
&= \frac{4}{\pi}\int_0^1\int_0^{1-z}\int_0^{2\pi}z(1-z)\,rd\theta\,dr\,dz \;=\; \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

El centro de masa es:

$$\overline{\mathbf{X}} = \left(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5}\right)$$

■

(6) Determine el volumen del sólido encerrado por las superficies

$$z = \sqrt{x^2+y^2}\;, \quad z = \sqrt{3(x^2+y^2)}\;, \quad x^2+y^2+z^2 = 1\;, \quad z = 2$$

Solución:

Lo más simple es usar coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta\sin\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\phi \end{aligned} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\phi)} = r^2\sin\phi$$

En coordenadas esféricas, la ecuación del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ es:

$$\begin{aligned}
r\cos\phi &= \sqrt{(r\cos\theta\sin\phi)^2+(r\sin\theta\sin\phi)^2} \\
&= \sqrt{r^2\sin^2\phi} \\
&= r\sin\phi \\
&\Updownarrow \\
\tan\phi &= 1 \\
&\Updownarrow \\
\phi &= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

De la misma manera, la ecuación del segundo cono es $\tan\phi = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \leftrightarrow \phi = \dfrac{\pi}{6}$.

El plano $z = 2$ en esféricas es $r = \dfrac{2}{\cos\phi}$.

Así, el sólido viene dado por

$$1 \leq r \leq \frac{2}{\cos\phi},\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ \frac{\pi}{6} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$



El volumen del sólido es:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_1^{2/\cos\phi} r^2\sin\phi\ dr\,d\phi\,d\theta \\ &= \frac{2\pi}{3}\int_{\pi/6}^{\pi/4}\sin\phi\left(\frac{8}{\cos^3\phi} - 1\right)\ d\phi\,d\theta \\ &= 2\pi\left(\frac{1}{6}\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right) + \frac{8}{9}\right) \end{aligned}$$

■

(7) Calcule el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2ax$ ($a > 0$ constante) entre el plazo $z = 0$ y el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Solución:

Utilizaremos coordenadas cilíndricas para resolver el problema. La ecuación del cono es:

$$z = \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta} = r$$

La ecuación del cilindro está dada por:

$$r^2 = 2ar\cos\theta \quad \longrightarrow \quad r = 2a\cos\theta$$

Como $r \geq 0$ y $a > 0$, debe cumplirse que $\cos\theta \geq 0$. Lo anterior implica que $-\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. Por tanto, el volumen de la región de integración es:

$$\Omega = \left\{(r,\theta,z)\ \middle|\ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2},\ 0 \leq r \leq 2a\cos\theta,\ 0 \leq z \leq r\right\}$$

Finalmente, el volumen es:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Omega) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^r r\ dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{2a\cos\theta}\int_0^r r^2\ dr\,d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^3\theta\ d\theta \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta(1-\sin^2\theta)\ d\theta \qquad (u=\sin\theta) \\
&= \frac{8a^3}{3}\int_{-1}^{1}(1-u^2)\ du \\
&= \frac{8a^3}{3}\cdot\frac{4}{3} = \frac{32a^3}{9}
\end{aligned}$$

■

(8) Calcule el volumen del sólido limitado por las superficies

$$x^2+y^2=a^2\ , \quad az=2a^2+x^2+y^2$$

y el plano $z=0$, con $a>0$ constante.

Solución:

La segunda superficie puede reescribirse de la siguiente forma:

$$z=2a+\frac{x^2+y^2}{a}>0$$

pues es la suma de dos términos positivos. Así, el sólido puede ser descrito utilizando coordenadas cilíndricas. Ambas superficies, en este nuevo sistema de coordenadas, son:

$$r=a\ , \quad z=2a+\frac{r^2}{a}$$

Notemos que no existe restricción alguna sobre el ángulo, por lo que el sólido se escribe de la siguiente forma:

$$\Omega=\left\{(r,\theta,z)\ \middle|\ 0\le r\le a,\ 0\le\theta\le 2\pi\,,0\le z\le 2a+\frac{r^2}{a}\right\}$$

Por tanto, el volumen es:

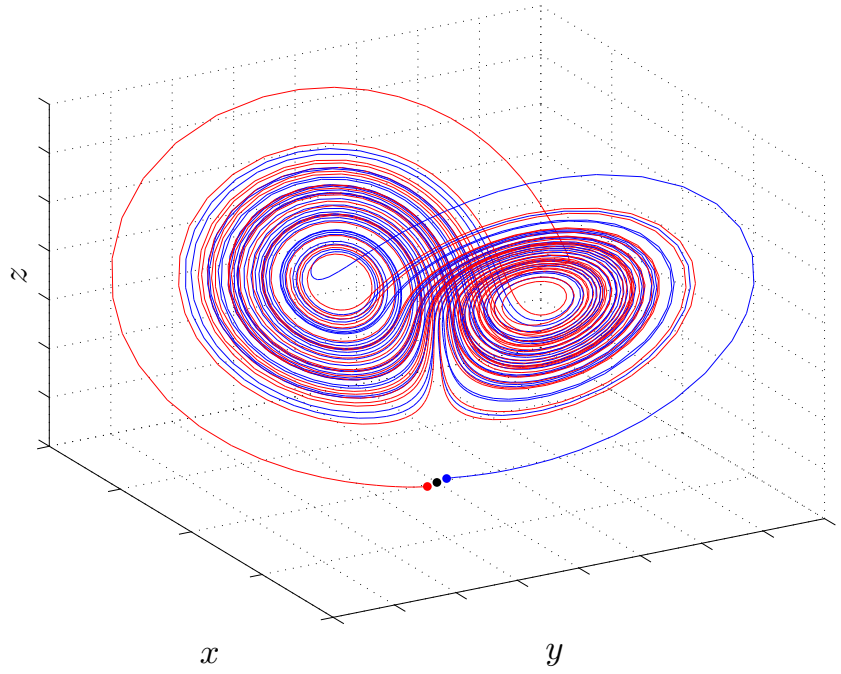
$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(\Omega) &= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_0^{2a+r^2/a} r\ dz\,dr\,d\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^a\left(2a+\frac{r^2}{a}\right)r\ dr\,d\theta \\
&= 2\pi\cdot\frac{5a^3}{4} = \frac{5\pi\,a^3}{2}
\end{aligned}$$

■

6

Funciones vectoriales de varias variables

Atractor de Lorenz (Edward Lorenz, 1963)



Cálculo diferencial en funciones vectoriales

I.i. Diferenciabilidad

(1) *a*) Sean $f(x,y) = (x^2+y^2, x^2-y^2)$ y $g(u,v) = (uv, u+v)$. Se define $F = g \circ f$. Calcular $DF(x,y)$.

b) Sean $w(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ y $v(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$. Calcule, utilizando la regla de la cadena, la matriz derivada de $(w \circ v)$ en el punto (1,0).

Solución:

a) Sabemos que

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Así,

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix} \qquad \wedge \qquad Dg(u,v) = \begin{pmatrix} v & u \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Por la regla de la cadena,

$$DF(x,y) = Dg(f(x,y)) \circ Df(x,y) \qquad \text{Con: } Dg(f(x,y)) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 & x^2+y^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces,

$$DF(x,y) = \begin{pmatrix} x^2-y^2 & x^2+y^2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2x & -2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x^3 & -4y^3 \\ 4x & 0 \end{pmatrix}$$

b) Tenemos que $v(1,0) = (1,0,1)$ y $w(1,0,1) = \sqrt{2}$. La matriz derivada de $w(x,y,z)$ es

$$\begin{pmatrix} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{pmatrix}$$

y por tanto, al reemplazar en (1,0,1) no queda:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Por otra parte, la matriz derivada de $v(r,\theta)$ es

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y con ello, en (1,0):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Finalmente, la matriz derivada de $w \circ v$ en (1,0) es:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

■

(2) Dadas las funciones

$$G(u,v) = (u, u^2, u\cos v) \quad \wedge \quad F(x,y,z) = (x, xy, xyz)$$

se considera la función compuesta $H = F \circ G = (H_1, H_2, H_3)$. Encontrar $\dfrac{\partial H_2}{\partial v}$ y $\dfrac{\partial H_3}{\partial u}$.

Solución:

Observemos que:

$$DG(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2u & 0 \\ \cos v & -u\sin v \end{pmatrix}, \quad DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ y & x & 0 \\ yz & xz & xy \end{pmatrix}$$

Por la regla de la cadena, sabemos que

$$\begin{aligned} DH(u,v) &= DF(G(u,v)) \cdot DG(u,v) \\ &= DF(u, u^2, u\cos v) \cdot DG(u,v) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3u^2 & 0 \\ 4u^3\cos v & -u^4\sin v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde se deduce que:

$$\frac{\partial H_2}{\partial v} = 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial H_3}{\partial u} = 4u^3\cos v$$

■

I.ii. Teoremas de la función implícita e inversa

(1) Considere la función vectorial $(x, y) \to (x, x + 2y + y^2) = (u, v)$

a) Determine todos los puntos (x, y) en los que el Teorema de la Función Inversa garantiza la existencia de una inversa local diferenciable $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ y, sin despejar explícitamente, calcule $y_v,\ y_{vu}$.

b) Encuentre explícitamente la inversa local $x = x(u, v),\ y = y(u, v)$ en una vecindad del punto $(x, y) = (1, -2)$ y, a partir de tales expresiones, calcule nuevamente y_v.

Solución:

Antes que todo, un pequeño recordatorio:

Definición. Sea $F : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. F se dice localmente inyectiva en torno a $\vec{x}_0$ si existe $r > 0$ tal que F es inyectiva en $B(\vec{x}_0, r) \subset \Omega$.

Teorema (de la función inversa). Sea $F : \Omega \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, Ω abierto, una función diferenciable, y sea $\vec{x}_0 \in \Omega$. Si $|DF(\vec{x}_0)| \neq 0$, entonces existe $r > 0$ tal que $F : B(\vec{x}_0, r) \to F(B(\vec{x}_0, r))$ es inyectiva. La inversa $G : F(B(\vec{x}_0, r)) \to B(\vec{x}_0, r)$ es diferenciable y $DG(F(\vec{x}_0)) = DF(\vec{x}_0)^{-1}$.

Notación Diremos que el jacobiano de la transformación $(x, z) \to (F, G)$ es

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, z)} \equiv \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}$$

a) Por definición del jacobiano,

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2(y+1) \end{vmatrix} = 2(y + 1)$$

Así, la función es invertible localmente alrededor de todo punto (x, y) con $y \neq -1$ (el plano menos la recta horizontal $y = -1$). Por el T.F.I. nuevamente,

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} \begin{pmatrix} v_y & -u_y \\ -v_x & u_x \end{pmatrix}$$

Igualando posiciones,

$$\frac{\partial y}{\partial v} = \frac{u_x}{\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{2(y + 1)}$$

Por consiguiente,

$$\begin{aligned} y_{vu} &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{2(y+1)}\right) \\ &= -\frac{y_u}{2(y+1)^2} \end{aligned}$$

Comparando otra vez las matrices de la función inicial y de su inverse, observamos que:

$$\frac{\partial y}{\partial u} = -\frac{v_x}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} = -\frac{1}{2(y+1)}$$

Finalmente, sustituyendo llegamos a que:

$$y_{vu} = \frac{1}{4(y+1)^3}$$

b) Tenemos que

$$\begin{aligned} u &= x \\ v &= x + 2y + y^2 \end{aligned}$$

Entonces, $u = x$ y sustituyendo en la segunda ecuación obtenemos:

$$(u - v) + 2y + y^2 = 0 \quad \longrightarrow \quad y = -1 \pm \sqrt{1 + v - u}$$

Como estamos en una vecindad del punto $(x, y) = (1, -2)$, la cantidad y debe ser menor que -1, y por ello debemos elegir el signo negativo en la última expresión. Por tanto, la inversa local buscada es

$$(u, v) \to (u, -1 - \sqrt{1 + v - u}) = (x, y)$$

Derivando directamente,

$$y_v = \frac{\partial}{\partial v}\Big(- 1 - \sqrt{1 + v - u}\Big) = -\frac{1}{2\sqrt{1 + v - u}} = \frac{1}{2(y+1)}$$

■

(2) Probar que la función $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{F}(x, y) = (u, v) = \Big(e^{-x} + e^{2y}, e^{2x} + e^{3y}\Big)$$

es localmente invertible en todo punto y calcular $\dfrac{\partial^2 x}{\partial u\, \partial v}$ en el punto $(x, y, u, v) = (0, 0, 2, 2)$.

Solución:

Calculemos el jacobiano asociado a la transformación:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -e^{-x} & 2e^{2y} \\ 2e^{2x} & 3e^{3y} \end{vmatrix} = -3e^{3y-x} - 4e^{2(x+y)} = -\Big(3e^{3y-x} + 4e^{2(x+y)}\Big) < 0$$

para todo (x,y), pues el paréntesis es estrictamente positivo al tratarse de una suma de exponenciales. Entonces, por el Teorema de la Función Inversa, $\vec{F}$ es localmente invertible en todo punto. Ahora bien,

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix}_{(u,v)=(2,2)} = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix}^{-1}_{(x,y)=(0,0)} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

y tenemos todos los valores de las primeras derivadas. Para calcular la derivada pedida, tomamos el sistema

$$\begin{cases} u &= e^{-x} + e^{2y} \\ v &= e^{2x} + e^{3y} \end{cases}$$

lo derivamos con respecto a u:

$$\begin{cases} 1 &= -e^{-x}\, x_u + 2e^{2y}\, y_u \\ 0 &= 2e^{2x}\, x_u + 3e^{3y}\, y_u \end{cases}$$

y posteriormente con respecto a v:

$$\begin{cases} 0 &= e^{-x}\, x_u x_v - e^{-x}\, x_{uv} + 4e^{2y}\, y_u y_v + 2e^{2y}\, y_{uv} \\ 0 &= 4e^{2x}\, x_u x_v + 2e^{2x}\, x_{uv} + 9e^{3y}\, y_u y_v + 3e^{3y}\, y_{uv} \end{cases}$$

Sustituyendo $(x,y) = (0,0)$ y los valores de las primeras derivadas antes calculadas, obtenemos:

$$\begin{cases} 0 &= \dfrac{2}{49} - x_{uv} + 2\, y_{uv} \\ 0 &= -\dfrac{6}{49} + 2\, x_{uv} + 3\, y_{uv} \end{cases}$$

Despejando, finalmente obtenemos

$$x_{uv} = \frac{18}{343}$$

■

(3) Sea $G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $G = (G_1, G_2)$ una función con derivadas parciales continuas en $\mathbb{R}^4$ y tal que satisface $G(0,0,0,0) = (0,0)$ y

$$\frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial G_2}{\partial w} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\frac{\partial G_1}{\partial w} \neq 0 \qquad \text{en el punto } (0,0,0,0).$$

Se define $H(x,y,z,w) = (x, y, G_1(x,y,z,w), G_2(x,y,z,w))$.

a) Probar que H es localmente invertible en el origen.

b) Suponga que $\nabla G_1(\vec{0}) = (0,0,2,0)$ y $\nabla G_2(\vec{0}) = (0,0,0,3)$. Calcule la matriz jacobiana de $K = G \circ H^{-1}$ en el origen.

Solución:

a) Si DH denota la matriz jacobiana de H, entonces la función es invertible en una vecindad del origen si su determinante allí es distinto de cero –T.F.I.– y por tanto:

$$DH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ G_{1x} & G_{1y} & G_{1z} & G_{1w} \\ G_{2x} & G_{2y} & G_{2z} & G_{2w} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es

$$|DH(0,0,0,0)| = \frac{\partial G_1}{\partial z}\frac{\partial G_2}{\partial w} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\frac{\partial G_1}{\partial w} \neq 0 \qquad \text{en el origen, por hipótesis.}$$

b) Notamos que $H(0,0,0,0) = (0,0,0,0)$, por lo cual $H^{-1}(\vec{0}) = \vec{0}$. Aplicando la regla de la cadena y el T.F.I. se obtiene:

$$\begin{aligned} DK(0,0,0,0) &= DG(H^{-1}(0,0,0,0)) \cdot DH^{-1}(0,0,0,0) \\ &= DG(H^{-1}(0,0,0,0)) \cdot \Big(DH(0,0,0,0)\Big)^{-1} \end{aligned}$$

Ahora bien, por el apartado anterior,

$$DH(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \Big(DH(0,0,0,0)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Mientras que:

$$DG(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} \nabla G_1(0,0,0,0) \\ \nabla G_2(0,0,0,0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$DK(0,0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

■

(4) Sea $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ una función continua tal que $g(0) = 1$. Considere $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{F}(x,y) = (u,v) = \left(\int_x^y g(t)\ dt, \int_y^{x^2} g(t)\ dt\right)$$

Verifique que $\vec{F}$ admite inversa en una vecindad del punto $(0,0)$. Determine la matriz jacobiana de la inversa en dicho punto.

Solución:

Calculamos el jacobiano de la transformación:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \left|\begin{array}{cc} -g(x) & g(y) \\ 2x\,g(x^2) & -g(y) \end{array}\right|_{(x,y)=(0,0)} = \left|\begin{array}{cc} -g(0) & g(0) \\ 0 & -g(0) \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{array}\right| = 1 \neq 0$$

Ahora, sea $J_F(0,0)$ la matriz jacobiana en el punto $(0,0)$. De la parte anterior del problema, tenemos que:

$$J_F(0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por tanto, y denotando a la matriz jacobiana de la función inversa por $J_{F^{-1}}$,

$$J_{F^{-1}}(0,0) = \Big(J_F(0,0)\Big)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

■

(5) Considere la transformación $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$u = xy^2\ , \quad v = x + 3y\ , \quad w = z - x$$

Se verifica que $F(A) = F(B) = (4, 7, -2) = C$ para los puntos $A = (4, 1, 2)$ y $B = (1, 2, -1)$.

a) Pruebe que en torno a ambos puntos A, B existen inversas locales $(x, y, z) = G_1(u, v, w)$ y $(x, y, z) = G_2(u, v, w)$ que satisfacen $G_1(C) = A$, $G_2(C) = B$.

b) Calcule $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, en el punto C, para ambas inversas.

Solución:

a) Como las funciones u, v, w son polinomios, tienen todas sus derivadas continuas; luego, basta ver qué valores toma el jacobiano en esos puntos.

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)} = \left|\begin{array}{ccc} y^2 & 2xy & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 3y^2 - 2xy$$

Evaluando en los puntos, tenemos:

$$\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(A) = -5 \neq 0 \qquad \wedge \qquad \frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}(B) = 8 \neq 0$$

luego, por el Teorema de la Función Inversa, en ambos puntos hay una inversa local.

b) Para calcular x_v en el punto C, en torno al punto A, consideremos primero la matriz jacobiana de la función F:

$$DF(A) = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |DF(A)| = -5$$

¿Cómo invertir una matriz de 3×3?

(1) Encontrar el determinante de la matriz a invertir, $\det(M)$

(2) Determinar la transpuesta de la matriz a invertir, M^t

(3) Calcular cada uno de los subdeterminates de las submatrices de 2×2 de M^t

(4) Ubique los cofactores $m_{j,k} = m_{fil,col}$ en el lugar que les corresponde –i.e. de donde fueron calculados, en la posición (j,k)–, multiplicándolos por $(-1)^{k+j}$

(5) Divida la matriz obtenida en el paso anterior por el determinante del primer paso, y el resultado será M^{-1}

Para más información, diríjase aquí.

Usando la información anterior,

$$\frac{\partial x}{\partial v}(4,1,2) = \frac{-8}{-5} = \frac{8}{5}$$

En el punto B, la matriz jacobiana es:

$$DF(B) = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad |DF(B)| = 8$$

y con ello:

$$\frac{\partial x}{\partial v}(1,2,-1) = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$$

■

(6) *a*) Considere el sistema dado por $F(x,y,u,v) = 0,\ G(x,y,u,v) = 0$, donde F, G son funciones con derivadas parciales continuas que satisfacen

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$$

Muestre que, para las variables $u = u(x,y),\ v = v(x,y)$ despejadas localmente, se cumple que:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable, con $f(0,0) = 1, f(0,1) = 0, \nabla f(0,0) = (a,b), \nabla f(0,1) = (c,d)$. Se define $g(x,y) = (yf(x,y), x + f(x,y))$. Encontrar $D(g \circ g)(0,0)$.

Solución:

a) Si las funciones despejadas son $u = f(x,y)$ y $v = g(x,y)$, entonces las funciones

$$H_1(x,y) = F(x,y,f(x,y),g(x,y)) \quad \wedge \quad H_2(x,y) = G(x,y,f(x,y),g(x,y))$$

Son constantes iguales a cero. Tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} H_{1x} & H_{1y} \\ H_{2x} & H_{2y} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} F_x + F_u f_x + F_v g_x & F_y + F_u f_y + F_v g_y \\ G_x + G_u f_x + G_v g_x & G_y + G_u f_y + G_v g_y \end{pmatrix} &= \\
\begin{pmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} &=
\end{aligned}$$

Como $\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$, $\begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}$ es invertible. Luego,

$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -F_x & -F_y \\ -G_x & -G_y \end{pmatrix}$$

Tomando los determinantes nos queda

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} \Big/ \frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}$$

b) Tenemos que

$$Dg(x,y) = \begin{pmatrix} yf_x(x,y) & f(x,y) + yf_y(x,y) \\ 1 + f_x(x,y) & f_y(x,y) \end{pmatrix}$$

Se tiene que $D(g \circ g)(0,0) = Dg(g(0,0)) \cdot Dg(0,0)$, y $g(0,0) = (0,1)$; por tanto:

$$D(g \circ g)(0,0) = Dg(0,1) \cdot Dg(0,0) = \begin{pmatrix} c & d \\ 1+c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1+a & b \end{pmatrix}$$

■

(7) Mostrar que las ecuaciones

$$\begin{aligned}
x^2 - y^2 - u^3 + v + 3 &= 0 \\
2xy + y^2 - 2u + \frac{u^4}{4} - \frac{5}{4} &= 0
\end{aligned}$$

determinan funciones $u(x,y),\ v(x,y)$ definidas para (x,y) cerca de $(1,1)$ y tales que $u(1,1) = 1$ y $v(1,1) = -2$. Calcular $u_x,\ u_{xy}$ en $(1,1)$.

Solución:

Antes que todo, un nuevo recordatorio:

Teorema (de la función implícita). Consideremos n ecuaciones en $m = n + k$ variables:

$$\left.\begin{array}{c} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \\ \vdots \\ F_n(x_1, x_2, \ldots, x_m) = 0 \end{array}\right\} (*)$$

Sea $p_0 = ({x_1}^0, {x_2}^0, \ldots, {x_m}^0)$ un punto que satisface el sistema $(*)$. Si

$$\left|\begin{array}{ccc} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_n}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{array}\right| (p_0) \neq 0$$

entonces, existe $r > 0$ y funciones diferenciables $f_1(x_{n+1}, \ldots, x_m), \ldots, f_n(x_{n+1}, \ldots, x_m)$ de modo que toda solución de $(*)$ en un entorno de $B(p_0, r)$ se describe como

$$\begin{array}{c} x_1 = f_1(x_{n+1}, \ldots, x_m) \\ \vdots \\ x_n = f_n(x_{n+1}, \ldots, x_m) \end{array}$$

Las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j},\ i = 1, \ldots, n,\ j = n+1, \ldots, m$ se calculan por regla de la cadena (derivación implícita).

Volviendo al problema que nos convoca, sean

$$F(x, y, u, v) = x^2 - y^2 - u^3 + v + 3\ , \quad G(x, y, u, v) = 2xy + y^2 - 2u + \frac{u^4}{4} - \frac{5}{4}$$

Dado que $F(1, 1, 1, -2) = G(1, 1, 1, -2) = 0$, según el Teorema de la Función Implícita, se pueden despejar localmente u y v en las cercanías de dicho punto si

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \neq 0$$

Tenemos que

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \left|\begin{array}{cc} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cc} -3u^2 & 1 \\ u^3 - 2 & 0 \end{array}\right| = 2 - u^3$$

el cual vale $1 \neq 0$ cuando $x = y = u = 1$ y $v = -2$. Por tanto, sí es posible el despeje. Derivando implícitamente,

$$\begin{array}{rcl} 2x - 3u^2 u_x + v_x & = & 0 \\ 2y - 2u_x + u^3 u_x & = & 0 \end{array}$$

Nos queda un sistema para u_x, v_x. Por Regla de Cramer, tenemos que:

$$u_x = \frac{\begin{vmatrix} 2x & -1 \\ 2y & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3u^2 & -1 \\ 2-u^3 & 0 \end{vmatrix}} = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{2y}{2-u^3}$$

Por tanto, $u_x(1,1,1,-2) = \dfrac{2}{2-1^3} = 2$. Ahora,

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{2y}{2-u^3}\right) = \frac{2(2-u^3) - 2y(-3u^2)u_y}{(2-u^3)^2}$$

Evaluando en el punto $(1,1,1,-2)$ resulta que $u_{xy}(1,1,1,-2) = 2 + 6u_y(1,1)$. Entonces,

$$u_y = -\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = \frac{2y+2x}{2-u^3}$$

de donde $u_y(1,1) = 4$ y, por tanto, $u_{xy}(1,1,1,-2) = 26$. ■

(8) Considere el sistema

$$\begin{cases} x^2y + xe^v + u^2 &= 4 \\ x + 2uv - vy &= 3 \end{cases}$$

a) Comprobar que existen funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$ definidas en una vecindad del punto $(0,1)$ tales que $u(0,1) = 2$, $v(0,1) = 1$ y que resuelven el sistema.

b) Encuentre $\dfrac{\partial u}{\partial x}(0,1)$.

Solución:

a) Las funciones f y g definidas sobre $\mathbb{R}^4$ por:

$$\begin{aligned} f(x,y,u,v) &= x^2y + xe^v + u^2 - 4 \\ g(x,y,u,v) &= x + 2uv - vy - 3 \end{aligned}$$

son de clase $\mathcal{C}^1$ sobre $\mathbb{R}^4$. El punto en cuestión es $\vec{x}_0 = (0,1,2,1)$ que cumple

$$\begin{aligned} f(0,1,2,1) &= 0 \\ g(0,1,2,1) &= 0 \end{aligned}$$

Ahora bien,

$$\left.\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \left.\begin{vmatrix} 2u & xe^v \\ 2v & 2u-y \end{vmatrix}\right|_{\vec{x}=\vec{x}_0} = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0$$

Por el Teorema de la Función Implícita, existen las funciones buscadas en una vecindad del punto $\vec{x}_0$.

b) Derivando implícitamente con respecto a x se obtiene que:

$$\begin{aligned} 2xy + e^v + xe^v\, v_x + 2u\, u_x &= 0 \\ 1 + 2v\, u_x + 2u\, v_x - y\, v_x &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando en $\vec{x}_0$,

$$\begin{aligned} e + 4\, u_x &= 0 \\ 1 + 2\, u_x + 4\, v_x - \, v_x &= 0 \end{aligned}$$

de donde se deduce que:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,1) = -\frac{e}{4}$$

■

(9) Demostrar que el sistema

$$\begin{cases} \sin\left(\dfrac{\pi}{w}\right) &= 0 \\ e^{x+u} - 1 &= 0 \\ 2x - u + v - w + 1 &= 0 \end{cases}$$

define implícitamente a las funciones $u = u(x)$, $v = v(x)$ y $w = w(x)$ en un entorno del punto $(x_0, u_0, v_0, w_0) = (0, 0, 0, 1)$. Además, obtener el desarrollo de Taylor de orden dos de $v(x)$ en torno a $x = 0$.

Solución:

Hagamos algunas definiciones:

$$\begin{aligned} F(x,u,v,w) &= \sin\left(\frac{\pi}{w}\right) \\ G(x,u,v,w) &= e^{x+u} - 1 \\ H(x,u,v,w) &= 2x - u + v - w + 1 \end{aligned}$$

El T.F.Im. garantiza el despeje solicitado en el enunciado si el siguiente jacobiano

$$\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\pi}{w^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{w}\right) \\ e^{x+u} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{\pi}{w^2}\cos\left(\frac{\pi}{w}\right) e^{x+u}$$

es distinto de cero en el punto en cuestión. Como

$$\left.\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}\right|_{(x_0,u_0,v_0,w_0)} = \pi \neq 0$$

se concluye que sí es posible realizar el despeje deseado. Ahora bien, el desarrollo de Taylor pedido es:

$$V(x) = v(0) + v'(0)x + v''(0)\frac{x^2}{2}$$

Por los datos del problema, sabemos que $v(0) = 0$. Derivando el sistema,

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{w^2}\cos\left(\dfrac{\pi}{w}\right) w_x &= 0 \\ e^{x+u}(1+u_x) &= 0 \\ 2 - u_x + v_x - w_x &= 0 \end{cases}$$

Notemos que el sistema admite solo valores de w tales que $\sin\left(\dfrac{\pi}{w}\right) = 0$, lo que garantiza que $\cos\left(\dfrac{\pi}{w}\right) \neq 0$ pues el seno y el coseno no se anulan simultáneamente. Por tanto, la primera igualdad del sistema derivado implica que $w_x \equiv 0$. De manera análoga, el sistema solo admite valores de x, u tales que $e^{x+u} = -1 \neq 0$, por lo que la segunda igualdad del sistema derivado nos dice que $u_x \equiv -1$. Finalmente, de la tercera igualdad,

$$v_x \equiv -3$$

En particular, $v'(0) = -3$. Finalmente, como $v'(x)$ es constante, concluimos que $v''(x) \equiv 0$ y, por tanto, $v''(0) = 0$. Así, el desarrollo de Taylor es:

$$V(x) = -3x$$

■

(10) Sean $F, G : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, $F = F(x, y, u, v)$, $G = G(x, y, u, v)$, dos funciones diferenciables tales que en $P = (1, 2, 1, 2)$ satisfacen

$$\begin{aligned} F_x(P) &= 1, & F_y(P) &= 2, \\ F_u(P) &= 1, & F_v(P) &= -1, \\ G_x(P) &= 0, & G_y(P) &= -1, \\ G_u(P) &= 2, & G_v(P) &= -2. \end{aligned}$$

Considere el sistema

$$F(P) = G(P) = 0$$

a) Compruebe que es posible despejar el sistema $x = x(u, v)$ con $x(1, 2) = 1$, en un entorno de $(u, v) = (1, 2)$, y calcule $x_v(1, 2)$.

b) Compruebe que es posible despejar el sistema $x = x(y, v)$ con $x(2, 2) = 1$, en un entorno de $(y, v) = (2, 2)$, y calcule $x_v(2, 2)$.

Solución:

Definamos primero $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mediante la ecuación

$$T(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} F(x, y, u, v) \\ G(x, y, u, v) \end{pmatrix}$$

a) Usando el T.F.Im, para despejar (x, y) en términos de (u, v) en torno al punto $(u, v) = (1, 2)$, necesitamos que la matriz

$$DT_{x,y}(x, y, u, v)$$

sea invertible. De la información del enunciado,

$$DT_{x,y}(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)} = -1 \neq 0$$

Así, podemos derivar –sin problemas– el sistema con respecto a v:

$$\begin{array}{rcl} F_x x_v + F_y y_v + F_v &=& 0 \\ G_x x_v + G_y y_v + G_v &=& 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_v + 2y_v - 1 &=& 0 \\ -y_v - 2 &=& 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad x_v(1, 2) = 5$$

b) Como el problema es, esencialmente, el mismo que antes, requerimos que la matriz $DT_{x,u}(P)$ sea invertible. Así,

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, u)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

y se cumple. Nuevamente, derivamos el sistema con respecto a v:

$$\begin{array}{rcl} F_x x_v + F_u u_v + F_v &=& 0 \\ G_x x_v + G_u u_v + G_v &=& 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_v + u_v - 1 &=& 0 \\ 2u_v - 2 &=& 0 \end{array} \quad \longrightarrow \quad x_v(2, 2) = 0$$

■

(11) *a*) Determine los valores de a para los cuales el sistema de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{rcl} xz^3 + yu + ax &=& 1 \\ 2xy^3 + u^2 z + a(y - 1) &=& 0 \end{array} \right.$$

define a (x, y) como función implícita de (z, u) en un entorno del punto $(x_0, y_0, z_0, u_0) = (0, 1, 0, 1)$.

b) Denotemos la función implícita de la parte anterior (cuando ésta exista) por $(x, y) = G(z, u)$. Calcule los valores de a para los cuales G admite inversa local diferenciable en torno a un punto $(0, 1)$.

Solución:

a) Sea $P=(0,1,0,1)$, y sean $F_1(x,y,z,u)=xz^3+yu+ax,\ F_2(x,y,z,u)=2xy^3+u^2z+a(y-1)$. De este modo, el sistema queda escrito como $F_1=1,\ F_2=0$.

Vemos que $F_1(P)=y_0u_0=1$ y que $F_2(P)=0$, independiente de los valores que tome el parámetro a, de modo que el punto P es solución del sistema.

Ahora bien, por el T.F.Im, de dicho sistema se pueden despejar localmente x,y si el jacobiano

$$\left.\frac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}\right|_P \neq 0 \quad \longrightarrow \quad \begin{vmatrix} a & 1 \\ 2 & a \end{vmatrix} = a^2-2 \neq 0$$

de modo que se pueden despejar las variables cerca de P si $a \neq \pm\sqrt{2}$.

b) Para $a \neq \pm\sqrt{2}$, el sistema de la parte anterior determina una función implícita $(x,y)=G(z,u)$, la cual satisface $G(0,1)=(0,1)$.

Por el T.F.In, dicha función G posee inversa local –en un entorno de $(0,1)--$ si su matriz jacobiana, $DG(0,1)$, es invertible; i.e.

$$\begin{vmatrix} x_z & x_u \\ y_z & y_u \end{vmatrix} = x_zy_u - x_uy_z \neq 0$$

Por la Regla de Cramer tenemos que, en el punto P,

$$x_z = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(z,y)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = \frac{1}{a^2-2}$$

$$x_u = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = -\frac{a}{a^2-2}$$

$$y_z = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,z)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = -\frac{a}{a^2-2}$$

$$y_u = -\frac{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,u)}}{\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,y)}} = \frac{2}{a^2-2}$$

Por tanto,

$$\det\left(DG(0,1)\right) = \frac{2-a^2}{(a^2-2)^2} = \frac{1}{2-a^2} \neq 0 \quad \text{cuando } a \neq \pm\sqrt{2}$$

■

(12) Considere la ecuación $z^3+z(1-x^2+2x^4+y^2)=8$.

a) Demuestre que esta ecuación define localmente a $z = f(x, y)$ en torno a todo punto (x_0, y_0, z_0) que la satisface.

b) Determine todos los puntos críticos de las funciones $f(x, y)$ así despejadas.

c) Determine la naturaleza de dichos puntos críticos.

Solución:

a) Sea $F(x, y, z) = z^3 + z(1 - x^2 + 2x^4 + y^2)$. Notemos que $F(x, y, 0) = 0 \neq 8$, por lo que z debe ser distinto de cero. Entonces,

$$F_z = 3z^2 + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) = 3z^2 + \left(1 - \frac{x^2}{2}\right)^2 + \frac{7x^2}{4} + y^2 > 0, \ \forall x, y, \ z \neq 0$$

Por el T.F.Im, se deduce que localmente siempre se puede despejar $z = f(x, y)$ en torno a un punto que satisfaga la condición $F = 8$. ¿Qué signo puede tomar $z = f(x, y)$? Sea $A = 1 - x^2 + 2x^4 + y^2 > 0$, como probamos anteriormente. Además, se debe satisfacer que:

$$z^3 + zA = 8 \ \rightarrow \ A = \frac{8 - z^3}{z} = \frac{(2 - z)(z^2 + 2z + 4)}{z} = \frac{(2 - z)\Big((z + 1)^2 + 3\Big)}{z}$$

pues $z \neq 0$. Si $z < 0$, entonces A debiese ser negativo, lo cual es una contradicción. Por tanto, debe cumplirse que $z = f(x, y) > 0$.

b) Derivamos implícitamente para obtener:

$$\begin{aligned} 3f^2 f_x + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_x + (8x^3 - 2x) f &= 0 \\ 3f^2 f_y + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_y + (2y) f &= 0 \end{aligned}$$

Los puntos críticos serán cuando $f_x = f_y = 0$. Dado que $f > 0$, los puntos críticos de f corresponden a $8x^3 - 2x = 2y = 0$, lo que da tres puntos: $(0, 0), \ (\pm 1/2, 0)$.

c) Debemos calcular f_{xx}, f_{yy}, f_{xy} en los puntos críticos. Derivamos las ecuaciones anteriores, y usamos el hecho de que $f_x = 8x^3 - 2x = f_y = 2y = 0$:

$$\begin{aligned} 3f^2 f_{xx} + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_{xx} + (24x^2 - 2) f &= 0 \\ 3f^2 f_{yy} + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_{yy} + 2f &= 0 \\ 3f^2 f_{xy} + (1 - x^2 + 2x^4 + y^2) f_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

Así, en los puntos críticos, se tiene:

$$f_{xx} = -\frac{(24x^2 - 2) f}{F_z} \ , \quad f_{yy} = -\frac{2f}{F_z} \ , \quad f_{xy} = 0$$

Salvo por el múltiplo de $f/F_z > 0$, las matrices Hessianas son:

- En $(0, 0)$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

- En $(\pm 1/2, 0)$:

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Vemos que hay un punto silla en $(0,0)$, y un máximo local en $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$.

■

(13) *a*) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ definida por $\vec{F}(x,y) = (u,v)$, donde $u = x+1$ y $v = x+y^3+1$. Determine los puntos (x,y) en torno a los cuales se puede invertir la función $\vec{F}$. Además, calcule x_u, y_v e y_{uu}.

b) Verifique que el sistema

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2y^2 - 3xy + 4uv &= 6 \\ y^2 + v^2 - xv - yu &= 0 \end{aligned}$$

define implícitamente a $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ en torno al punto $(1,1,1,1)$ y calcule x_{vu}.

Solución:

a) El T.F.Inv. garantiza la existencia de una inversa local diferenciable en torno a los puntos (x,y) donde el jacobiano de la transformación sea no nulo. Por tanto, calculamos:

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3y^2 \end{vmatrix} = 3y^2$$

Por tanto, la función $\vec{F}$ es localmente invertible en torno a todo punto (x,y) con $y \neq 0$. Del mismo jacobiano es posible concluir que $x_u = 1$ y $x_v = 0$. Para hallar y_v, derivamos implícitamente la expresión para v:

$$1 = x_v + 3y^2\, y_v \quad \longrightarrow \quad y_v = \frac{1}{3y^2}$$

Para hallar y_{uu}, derivamos implícitamente la expresión para v:

$$0 = x_u + 3y^2\, y_u \quad \longrightarrow \quad y_u = -\frac{1}{3y^2}$$

Ahora,

$$y_{uu} = -\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{1}{3}\left(\frac{-2\,y_u}{y^3}\right) = -\frac{2}{9y^5}$$

b) Para comprobar que es posible despejar, definimos las siguientes funciones:

$$F(x,y,u,v) = 3x^2 + 2y^2 - 3xy + 4uv - 6\ , \quad G(x,y,u,v) = y^2 + v^2 - xv - yu$$

Sea $\vec{x}_0 = (1,1,1,1)$. Notemos que $F(\vec{x}_0) = G(\vec{x}_0) = 0$. Por otra parte,

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} = \left.\begin{vmatrix} 6x-3y & 4y-3x \\ -v & 2y-u \end{vmatrix}\right|_{\vec{x}_0} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Así, el T.F.Im. garantiza la existencia de $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ en torno a $\vec{x}_0$. Si derivamos el sistema con respecto a v,

$$\begin{aligned} 6x\,x_v + 4y\,y_v - 3x\,y_v - 3y\,x_v + 4u &= 0 \\ 2y\,y_v + 2v - x - v\,x_v - u\,y_v &= 0 \end{aligned}$$

En el punto $\vec{x}_0$, el sistema se torna lineal

$$\begin{aligned} 3\,x_v + y_v + 4 &= 0 \\ y_v + 1 - x_v &= 0 \end{aligned}$$

de donde se extrae que $x_v(1,1) = -3/4$ e $y_v(1,1) = -7/4$. Volvemos a derivar el sistema, ahora con respecto a u:

$$\begin{aligned} 6x\,x_u + 4y\,y_u - 3x\,y_u - 3y\,x_u + 4v &= 0 \\ 2y\,y_u - v\,x_u - u\,y_u - y &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando en el punto $\vec{x}_0$,

$$\begin{aligned} 3\,x_u + y_u + 4 &= 0 \\ y_u - x_u - 1 &= 0 \end{aligned}$$

de donde se extrae que $x_u(1,1) = -5/4$ e $y_u(1,1) = -1/4$. Finalmente, utilizamos el resultado de derivar con respecto a v y lo volvemos a derivar –ahora con respecto a u– para obtener:

$$\begin{aligned} 6\,x_v x_u + 6x\,x_{vu} + 4\,y_v y_u + 4y\,y_{vu} - 3\,y_v x_u - 3x\,y_{vu} - 3y\,x_{vu} - 3\,y_u x_v + 4 &= 0 \\ 2y\,y_{vu} + 2\,y_u y_v - x_u - v\,x_{vu} - u\,y_{vu} - y_v &= 0 \end{aligned}$$

Reemplazando, obtenemos el siguiente sistema lineal

$$\begin{aligned} \frac{17}{4} + 3\,x_{vu} + y_{vu} &= 0 \\ \frac{31}{8} + y_{vu} - x_{vu} &= 0 \end{aligned}$$

con solución:

$$x_{vu}(1,1) = -\frac{3}{32} \qquad \wedge \qquad y_{vu}(1,1) = -\frac{127}{32}$$

■

Cálculo integral en funciones vectoriales

II.i. Integrales de línea

(1) *a*) Calcule

$$\oint_\gamma (3y^2 - 2x)\ ds$$

sobre la curva $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$, recorrida positivamente.

b) Determine el valor de la integral de línea

$$\int_C f\ ds$$

donde $f(x, y, z) = x^2z + y^2z$ y C es la curva parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t^3),\ t \in [0, 5\pi]$$

c) Sea $\vec{F}(x, y) = (x+y)\hat{\imath}+(x-y)\hat{\jmath}$. Calcular $\displaystyle\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$ con γ la curva, recorrida en sentido positivo entre los puntos $(a, 0)$ y $(-a, 0)$, de ecuación $(bx)^2 + (ay)^2 = (ab)^2$.

Solución:

Recordemos que:

∗ Una integral de línea de un campo escalar f sobre una curva γ (recorrida positivamente) se define como:

$$\int_\gamma f\ ds = \int_a^b f\Big(\gamma(t)\Big)\|\gamma'(t)\|\ dt$$

donde $\gamma(t)$ es la parametrización de la curva, y $t \in [a, b]$ la recorre completamente.

∗ Una integral de línea de a un campo vectorial se define como:

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\Big(\gamma(t)\Big) \cdot \gamma'(t)\ dt$$

a) Parametrizamos la curva de la forma $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$, con $t \in [0, 2\pi)$. Notar que el parámetro recorre la curva en contra de las agujas del reloj (orientación positiva). La longitud de largo está dada por

$$ds = \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\|\ dt = \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\sin^4 t \cos^2 t}\ dt = 3|\cos t \sin t|\ dt$$

Entonces, por definición:

$$\mathbf{I}_\gamma = \oint_\gamma (3y^2 - 2x)\ ds = \int_0^{2\pi} (3\sin^6 t - 2\cos^3 t)3|\cos t \sin t|\ dt$$

Si definimos la primitiva

$$\begin{aligned} I(t) &= 3\int (3\sin^6 t - 2\cos^3 t)\cos t \sin t\ dt = 3\int \left(3\sin^7 t \cos t - 2\cos^4 t \sin t\right)\ dt \\ &= 3\left(\frac{3\sin^8 t}{8} - \frac{2\cos^5 t}{5}\right) \end{aligned}$$

Entonces, considerando el valor absoluto en la integral de línea, y notando que $I(0) = I(2\pi)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_\gamma &= \Big(I(\pi/2) - I(0)\Big) - \Big(I(\pi) - I(\pi/2)\Big) + \Big(I(3\pi/2) - I(\pi)\Big) - \Big(I(2\pi) - I(3\pi/2)\Big) \\ &= 2I(\pi/2) - I(0) - 2I(\pi) + 2I(3\pi/2) - I(2\pi) \\ &= 2\Big(I(\pi/2) - I(0) - I(\pi) + I(3\pi/2)\Big) \\ &= 2\left(\frac{9}{8} + \frac{6}{5} - \frac{6}{5} + \frac{9}{8}\right) \\ &= \frac{9}{2} \end{aligned}$$

b) En este caso,

$$\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, 3t^2) \quad \longrightarrow \quad \|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + 9t^4}$$

Entonces,

$$\int_C f\ ds = \int_0^{5\pi} t^3\sqrt{1+9t^4}\ dt = \frac{1}{36}\int_1^{1+9(5\pi)^4} \sqrt{u}\ du = \frac{1}{54}\Big[\Big(1 + 9(5\pi)^4\Big)^{3/2} - 1\Big]$$

c) Comencemos con la parametrización de la curva. Estamos sobre una elipse, por lo que la curva se puede escribir como sigue:

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t \quad \longrightarrow \quad d\vec{r} = \gamma'(t)\ dt = (-a\sin t, b\cos t)\ dt$$

El parámetro satisface $t \in [0, \pi]$. La integral será, entonces,

$$\begin{aligned} \int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_0^\pi (a\cos t + b\sin t, a\cos t - b\sin t)\cdot(-a\sin t, b\cos t)\ dt \\ &= \int_0^\pi \Big(-(a^2+b^2)\cos t \sin t + ab(-\sin^2 t + \cos^2 t)\Big)\ dt \\ &= -\int_0^\pi \left[\frac{a^2+b^2}{2}\sin 2t - ab\cos 2t\right]\ dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

(2) Sea γ la curva que se produce de la intersección del plano $y = x$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$, contenida en el primer octante. Sea $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$ el campo dado por

$$F_1 = \frac{\cos y}{2(1+2z)} \ , \quad F_2 = \frac{\cos x}{2(1+2z)} + \sin y \ , \quad F_3 = \frac{y \cos x}{1+2z}$$

a) Determine todos los puntos $\vec{p} \in \gamma$ para los cuales el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de γ desde el origen $(0,0,0)$ hasta $\vec{p}$ sea igual a 1.

b) Sean $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ dos puntos cualesquiera de la parte anterior. Determinar el trabajo realizado por $\vec{F}$ a lo largo de γ desde $\vec{p}_1$ hasta $\vec{p}_2$.

Solución:

a) Primero que todo, parametrizamos la curva γ. Eligiendo a t como parámetro, $\vec{r}(t) = (t, t, 2t^2),\ t \in \mathbb{R}$. Luego, un punto $\vec{p} \in \gamma$ es de la forma $(a, a, 2a^2)$ para algún $a > 0$, y el trabajo realizado por el campo a lo largo de la curva es:

$$W = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^a \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt$$

Como $\vec{r}\,'(t) = (1, 1, 4t)$ y

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left(\frac{\cos t}{2(1+4t^2)}, \frac{\cos t}{2(1+4t^2)} + \sin t, \frac{t \cos t}{1+4t^2} \right)$$

obtenemos:

$$W = \int_0^a \left(\frac{2\cos t + 8t^2 \cos t}{2(1+4t^2)} + \sin t \right)\ dt = \int_0^a \Big(\cos t + \sin t \Big)\ dt = 1 + \sin a - \cos a$$

Por tanto,

$$W = 1 \iff \cos a = \sin a \iff a_k = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}^+$$

y los puntos $\vec{p}$ solicitados corresponden al conjunto $\{\vec{p}_k\} = (a_k, a_k, 2{a_k}^2)$.

b) Si ambos puntos corresponde a valores a_1, a_2 del parámetro –con a en el conjunto de valores hallados en el apartado anterior– entonces el trabajo W realizado por el campo sobre la curva entre ambos puntos es:

$$\begin{aligned} W &= \int_{a_1}^{a_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt \\ &= \int_0^{a_2} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt - \int_0^{a_1} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\ dt \\ &= 1 - 1 \ = \ 0 \end{aligned}$$

por la definición de los a_k. Luego, el trabajo realizado es **nulo**.

■

(3) Sea $\vec{F} = (e^x \sin y, e^x \cos y, z^2)$.

a) Demuestre que el campo es conservativo y encuentre una función potencial.

b) Se define $f(x,y,z) = \displaystyle\int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$. Calcule $f(x,y,z)$ para todo punto sobre una curva arbitraria C y verifique que f es una función potencial.

Solución:

a) Basta encontrar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $\vec{F} = \nabla g$ para demostrar el carácter conservativo del campo.
Si $\nabla g = \vec{F}$, entonces $g_x = e^x \sin y$, $g_y = e^x \cos y$ y $g_z = z^2$.

- Si $g_x = e^x \sin y$, g debe ser de la forma $g(x,y,z) = e^x \sin y + h(y,z)$ para alguna función h por determinar.
- Por otra parte, como $g_y = e^x \cos y = e^x \cos y + h_y$, es claro que h solo depende de z.
- Como $g_z = h'(z) = z^2$, entonces $h(z) = \dfrac{z^3}{3} + K$.

Tomando una solución particular,

$$g(x,y,z) = e^x \sin y + \frac{z^3}{3}$$

b) Sea C_1 la recta que une los puntos $(1,1,1)$ y $(x,1,1)$, con parametrización

$$\vec{r_1} = \Big(1 + t(x-1), 1, 1\Big), \ t \in [0,1]$$

Así,

$$d\vec{r_1} = (x-1, 0, 0)\ dt$$

Por tanto,

$$\int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r_1} = \int_0^1 e^{1+t(x-1)} \sin(1)(x-1)\ dt = -e \sin 1 + e^x \sin 1$$

Ahora, sea C_2 la recta que une los puntos $(x,1,1)$ y $(x,y,1)$, con parametrización

$$\vec{r_2} = \Big(x, 1 + t(y-1), 1\Big), \ t \in [0,1]$$

con

$$d\vec{r_2} = (0, y-1, 0)\ dt$$

por lo que

$$\int_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{r_2} = \int_0^1 e^x \cos\Big(1 + t(y-1)\Big)(y-1)\ dt = -e^x \sin 1 + e^x \sin y$$

Finalmente, sea C_3 la recta que une los puntos $(x, y, 1)$ y (x, y, z), con parametrización

$$\vec{r_3} = \Big(x, y, 1 + t(z-1)\Big), \ t \in [0, 1]$$

y,

$$d\vec{r_3} = (0, 0, z-1)\ dt$$

De esta forma,

$$\int_{C_3} \vec{F} \cdot d\vec{r_3} = \int_0^1 \Big(1 + t(z-1)\Big)^2 (z-1)\ dt = \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3}$$

Sumando todas las integrales,

$$f(x, y, z) = \int_{(1,1,1)}^{(x,y,z)} \vec{F} \cdot d\vec{r} = e^x \sin y + \frac{z^3}{3} - \frac{1}{3} - e \sin 1$$

y se hace evidente que $\nabla f = \vec{F}$.

■

(4) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (2xe^y, x^2e^y + \cos z, -y \sin z)$ un campo vectorial.

a) ¿Existen funciones f cuyo gradiente ∇f sea igual al campo vectorial $\vec{F}$?

b) Calcule $\displaystyle\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, si C está parametrizada por

$$\mathbf{r}(t) = (e^t, t^2, t), \ t \in [-\pi, \pi]$$

Solución:

a) Sabemos que $\vec{F}(x, y, z) = \Big(P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)\Big)$ es el gradiente de una función f si y solo si

$$P(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad Q(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad R(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial z}$$

Así, si integramos P respecto a x,

$$f(x, y, z) = x^2e^y + g(y, z)$$

Si derivamos f con respecto a y e igualamos a Q, obtendremos que:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \cos z \quad \longrightarrow \quad g(y, z) = y \cos z + h(z)$$

Finalmente, al derivar f con respecto a z e igualar a R,

$$h'(z) = 0 \quad \longrightarrow \quad h(z) = C \text{ (cte)}$$

y, por tanto,

$$f(x, y, z) = x^2e^y + y \cos z + C$$

cumple que $\nabla f = \vec{F}$.

b) Usando el Teorema Fundamental del Cálculo para integrales de línea,

$$\begin{aligned}\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} &= \int_{-\pi}^{\pi} \nabla f\Big(\mathbf{r}(t)\Big)\cdot \mathbf{r}'(t)\; dt \\ &= f\Big(\mathbf{r}(\pi)\Big) - f\Big(\mathbf{r}(-\pi)\Big) \\ &= e^{2\pi}e^{\pi^2} - e^{-2\pi}e^{\pi^2}\end{aligned}$$

■

(5) Sea $\mathcal{C}$ la curva dada por la intersección del plano $x = y$ con el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Calcule la longitud del arco de la curva desde el origen $(0, 0, 0)$ hasta el punto $(1, 1, 2)$.

Solución:

Una posible parametrización de la curva es $\vec{r}(t) = (t, t, 2t^2)$, $0 \le t \le 1$. La longitud de arco es:

$$L = \int_0^1 \|\vec{r}\,'(t)\|\; dt = \int_0^1 \sqrt{1^2 + 1^2 + (4t)^2}\; dt = \sqrt{2}\int_0^1 \sqrt{1 + 8t^2}\; dt$$

Sea $\sqrt{8}t = \sinh u$, de modo tal que la integral $\mathbf{I} = \displaystyle\int \sqrt{1 + 8t^2}\; dt$ queda como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{I} &= \frac{1}{\sqrt{8}}\int \sqrt{1 + \sinh^2 u}\cosh u\; du \;=\; \frac{1}{\sqrt{8}}\int \cosh^2 u\; du \\ &= \frac{1}{4\sqrt{8}}\int \Big(e^u + e^{-u}\Big)^2\; du \;=\; \frac{1}{4\sqrt{8}}\int e^{2u} + 2 + e^{-2u}\; du \\ &= \frac{1}{4\sqrt{8}}\left(\frac{e^{2u}}{2} + 2u - \frac{e^{-2u}}{2}\right)\end{aligned}$$

Notar que $t = 0 \to u = 0$, y que $t = 1$ significa que:

$$\sinh u = \sqrt{8} \;\longrightarrow\; u = \operatorname{arcsinh}\sqrt{8} = \ln\left(\sqrt{8} + \sqrt{(\sqrt{8})^2 + 1}\right) = \ln\Big(2\sqrt{2} + 3\Big)$$

Así, como $\mathbf{I}(0) = 0$,

$$L = \sqrt{2}\left(\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\Big(2\sqrt{2} + 3\Big)\right)$$

■

(6) Determine la masa y el centro de masa de un cable con la forma de una hélice $(t, \cos t, \sin t)$, $0 \le t \le 2\pi$, si la densidad de masa en cualquier punto de la curva es igual al cuadrado de la distancia desde el origen.

Solución:

En este caso, la densidad viene dada por $\rho(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$. Sabemos que,

$$\begin{aligned} m &= \int_C \rho(x,y,z)\ ds \\ &= \int_0^{2\pi} (t^2+1)\sqrt{(1)^2+(-\sin t)^2+(\cos t)^2}\ dt \\ &= \int_0^{2\pi} (t^2+1)\sqrt{2}\ dt \ = \ \frac{2\sqrt{2}\pi(4\pi^2+3)}{3} \end{aligned}$$

Por otra parte,

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \frac{1}{m}\int_C x\,\rho(x,y,z)\ ds \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi(4\pi^2+3)}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}(t^2+1)\ dt \ = \ \frac{3\pi(2\pi^2+1)}{4\pi^2+3} \end{aligned}$$

Mientras que:

$$\begin{aligned} \overline{y} &= \frac{1}{m}\int_C y\,\rho(x,y,z)\ ds \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi(4\pi^2+3)}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}(t^2+1)\cos t\ dt \\ &= -\frac{6\pi}{4\pi^2+3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z} &= \frac{1}{m}\int_C z\,\rho(x,y,z)\ ds \\ &= \frac{3}{2\sqrt{2}\pi(4\pi^2+3)}\int_0^{2\pi} \sqrt{2}(t^2+1)\sin t\ dt \\ &= \frac{6}{4\pi^2+3} \end{aligned}$$

Finalmente,

$$(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \left(\frac{3\pi(2\pi^2+1)}{4\pi^2+3}, -\frac{6\pi}{4\pi^2+3}, \frac{6}{4\pi^2+3}\right)$$

■

(7) *a*) Sea C cualquier curva que une el punto $(0,0,0)$ con el punto $(1,1,1)$. Calcular

$$\int_C y^2z^2\ dx + 2xyz^2\ dy + 2xy^2z\ dz$$

b) Encuentre un campo vectorial $\vec{F} = (P,Q)$ tal que para todo camino C seccionalmente $\mathcal{C}^1$ que va desde $(1,0)$ a $(-1,1)$ se cumpla que

$$\int_C P\ dx + Q\ dy = 25$$

Solución:

a) El campo $\vec{F} = (y^2z^2, 2xyz^2, 2xy^2z)$ está bien definido y es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el espacio. Las componentes del rotor de $\vec{F}$ son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}(2xy^2z) - \frac{\partial}{\partial z}(2xyz^2) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z}(y^2z^2) - \frac{\partial}{\partial x}(2xy^2z) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x}(2xyz^2) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2z^2) &= 0 \end{aligned}$$

En consecuencia, existe una función escalar f tal que $\nabla f = \vec{F}$. Para encontrar el potencial, calculamos:

$$f_x(x,y,z) = y^2z^2 \quad \longrightarrow \quad f(x,y,z) = xy^2z^2 + h(y,z)$$

Así,

$$f_y(x,y,z) = 2xyz^2 + h_y(y,z) = 2xyz^2 \quad \longrightarrow \quad h_y(y,z) = 0$$

y con ello $h = h(z)$. Finalmente,

$$f_z(x,y,z) = 2xy^2z + h'(z) = 2xy^2z \quad \longrightarrow \quad h'(z) = 0$$

con lo que $h(z) = k$ constante. Por simplicidad, tomamos $k \equiv 0$ y el potencial es

$$f(x,y,z) = xy^2z^2$$

Por tanto,

$$\int_C y^2z^2\ dx + 2xyz^2\ dy + 2xy^2z\ dz = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 1$$

b) Como se pide que el resultado de la integral de línea sea independiente de la trayectoria, se concluye que el campo es conservativo. Por tanto, basta encontrar una función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ tal que $f(-1,1) - f(1,0) = 25$ y tomar $\vec{F} = \nabla f$. Una posibilidad, la más simple de todas, es proponer

$$f(x,y) = ax + by$$

De esta forma,

$$f(-1,1) - f(1,0) = -a + b - a = 25$$

Por ejemplo, podemos tomar $a = -5$ y $b = 15$ y así:

$$\vec{F} = \nabla f = (-5, 15)$$

■

II.ii. Teorema de Green

(1) Sea

$$\vec{F} = \left(\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{-x}{x^2+y^2} \right)$$

Sea γ una curva de Jordan (curva continua, cerrada y simple) regular a trozos situada en $\Omega = \mathbb{R}^2 - (0,0)$. Hallar todos los posibles valores de la integral de línea de $\vec{F}$ a lo largo de γ.

Solución:

Recordemos que:

Teorema (de Green). Sean $P(x,y), Q(x,y)$ tales que $\vec{F} = (P,Q)$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en $R \cup \gamma$, donde γ es una curva de Jordan $\mathcal{C}^1$ y R es la región abierta acotada por γ. Si la curva está orientada positivamente, entonces:

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_\gamma P\ dx + Q\ dy = \iint_R \Big[Q_x - P_y \Big]\ dx\, dy$$

En un sentido general,

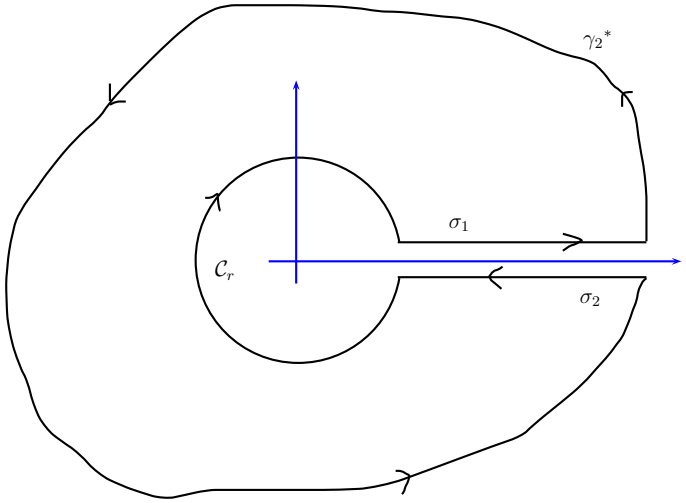
$$\oint_{\partial\mathcal{R}} P\ dx + Q\ dy = \iint_{\mathcal{R}} \Big(Q_x - P_y \Big)\ dA$$

con $\partial\mathcal{R}$ la frontera de $\mathcal{R}$ orientada con la región a mano izquierda.

Notemos que el campo no es conservativo en Ω, pese a que $\nabla \times \vec{F} = 0$ y $P_y = Q_x$.

- Sea γ_1 una curva de Jordan –tal que $\partial R_1 = \gamma_1$– que no encierra el origen. Entonces, por el teorema de Green:
$$\int_{\gamma_1} P\ dx + Q\ dy = \iint_{R_1} \Big(Q_x - P_y \Big)\ dx\, dy = 0$$

- Sea γ_2 una curva de Jordan que sí encierra el origen. P, Q no están definidos en R_2 puesto que la singularidad del campo está dentro. Para calcular el valor de la integral de línea, hacemos:



con $\Gamma = \gamma_2{}^* \cup \sigma_2 \cup \mathcal{C}_r \cup \sigma_2$, con $\mathcal{C}_r$ recorrido en sentido horario. Así,

$$\oint_{\Gamma} P\ dx + Q\ dy = \iint_{R_2{}^*} \Big(Q_x - P_y\Big)\ dx\, dy = 0$$

Tomando el límite cuando $\sigma_1 \to \sigma_2$, tenemos –por la cancelación de las integrales sobre los canales interiores– que:

$$\int_{\gamma_2+\mathcal{C}_r} P\ dx + Q\ dy = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{\circlearrowleft} P\ dx + Q\ dy = \int_{\gamma_2} P\ dx + Q\ dy$$

Ahora bien, $\mathcal{C}_r$ puede ser parametrizado como $(r\cos t, r\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Así,

$$\oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} (\sin t, -\cos t) \cdot (-\sin t, \cos t)\ dt = -2\pi$$

- Ahora, nos queda el mismo caso anterior pero con la curva recorrida en sentido contrario, cuya integral resulta 2π.

■

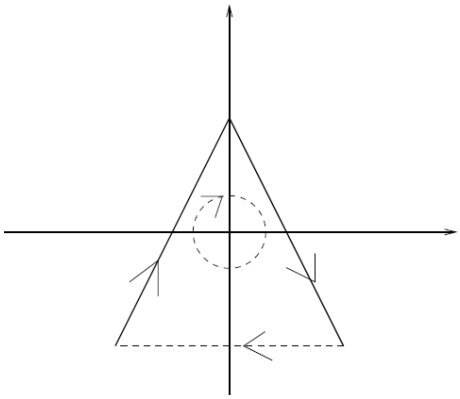
(2) Calcule $\displaystyle\int_{\gamma} P\ dx + Q\ dy$ si

$$P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}\ , \quad Q(x,y) = -\frac{x}{x^2+y^2}$$

y γ es la unión de los trazos rectos γ_1 y γ_2, donde γ_1 va desde $(-1,-1)$ a $(0,1)$ y γ_2 va desde $(0,1)$ hasta $(1,-1)$.

Solución:

Una opción es calcular las integrales sobre cada trazo, pero en este caso haremos lo siguiente: cerraremos el contorno, dibujando γ_3 desde $(-1,-1)$ hasta $(1,-1)$, para aplicar el Teorema de Green. Sea D la región encerrada por estas tres curvas. Notamos que P, Q se indefinen en $(0,0) \in D$; eliminaremos dicho problema mediante la adición de un círculo γ_ϵ de radio ϵ, orientado como la figura.



Ya calculamos, en la pregunta anterior, que

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3} P\ dx + Q\ dy = \int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} P\ dx + Q\ dy + \int\limits_{\gamma_3} P\ dx + Q\ dy = 2\pi$$

Ahora bien, $\gamma_3 : (-t, -1)$, $t \in [-1, 1]$. Por tanto,

$$\int\limits_{\gamma_3} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{-1}^{1} \frac{-1}{1+t^2}\ dt = -\arctan(t)\Big|_{-1}^{1} = -\frac{\pi}{2}$$

Finalmente,

$$\int\limits_{\gamma_1+\gamma_2} P\ dx + Q\ dy = 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

■

(3) *a*) Calcule la integral de línea

$$\mathbf{I} = \int_{\gamma} -y\ dx + \Big(x + \arctan(1+y^2)\sinh^2 y\Big)\ dy$$

donde γ es la porción del círculo $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$ orientado positivamente.

b) Calcule

$$\mathbf{S} = \int_{\gamma} \Big(e^{-x^2/2} - y\Big)\ dx + \Big(e^{-y^2/2} + x\Big)\ dy$$

siendo γ el contorno de la región entre las curvas $x^2+y^2 = 25$, orientada en el sentido contrario a los punteros del reloj, y $x^2 + 4y^2 = 4$, orientada en el sentido de los punteros.

Solución:

a) Pongamos $P = -y$, $Q = x + \arctan(1+y^2)\sinh^2 y$. Sea D la región $x^2 + y^2 \leq 1,\ y \geq 0$. Si borde ∂D consiste del semicírculo $x^2 + y^2 = 1$ con $y \geq 0$ orientado en la dirección contraria al movimiento de las manecillas del reloj, que denotaremos por γ concatenado con el intervalo $[-1, 1]$ recorrido de izquierda a derecha, denotado por ℓ.

Para el campo dado, se cumple que:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$$

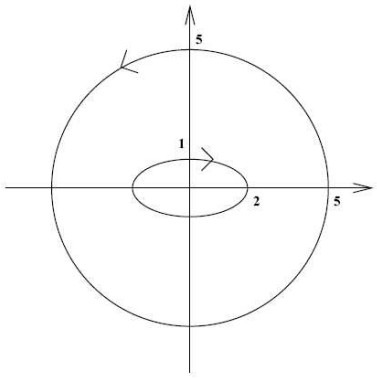
Aplicando el Teorema de Green se obtiene que:

$$\iint_D 2 \; dx\, dy = \int_\gamma \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) \; dt + \int_{-1}^{1} \vec{F}(s,0) \cdot (1,0) \; ds$$

O sea,

$$\mathbf{I} = \iint_D 2 \; dx\, dy - 0 = 2 \cdot A(D) = \pi$$

b) La región D (encerrada por ambas curvas) y su contorno se muestran en la siguiente figura:



Llamamos γ_1 al círculo y γ_2 a la elipse, orientados tal como en la figura. También escribimos $P(x,y) = e^{-x^2/2} - y$ y $Q(x,y) = e^{-y^2/2} + x$ y observamos que ambas funciones son de clase $\mathcal{C}^1$ en todo el plano, y que el contorno está orientado positivamente respecto a D.
Por el Teorema de Green,

$$\int_\gamma P(x,y) \; dx + Q(x,y) \; dy = \iint_D (Q_x - P_y) \; dx\, dy = \iint_D 2 \; dx\, dy = 2 \cdot A(D)$$

El área de D es el área encerrada por el círculo de radio 5 (25π) menos el área encerrada por la elipse de semiejes 1 y 2 (2π). Luego,

$$\mathbf{S} = 2(25\pi - 2\pi) = 46\pi$$

■

(4) Determine las funciones $P = P(x,y),\ Q = Q(y)$ de modo que, para toda curva cerrada simple γ que encierre una región R, se cumplan las tres relaciones:

$$-\int_\gamma Q \; dx = A(R) \; , \quad \int_\gamma (P+Q) \; dx + (2P+Q) \; dy = A(R)\bar{x}_R \; ,$$

$$\int_\gamma -2P \; dx + (2Q - P) \; dy = A(R)\bar{y}_R$$

donde $A(R)$ denota el área de la región R, y $(\bar{x},\bar{y})_R$ son las coordenadas de su centroide.

Solución:

Sabemos que

$$A(R) = -\int_\gamma y\ dx$$

Luego, se cumple el primer requerimiento si $\boxed{Q(y) = y}$. Por otro lado, por el Teorema de Green,

$$\begin{aligned} A(R)\bar{x}_R &= \int_\gamma (P+Q)\ dx + (2P+Q)\ dy &&= \int_\gamma (P+y)\ dx + (2P+y)\ dy \\ &&&= \iint_R \Big((2P+y)_x - (P+y)_y\Big)\ dx\,dy \\ &&&= \iint_R \Big(2P_x - P_y - 1\Big)\ dx\,dy \end{aligned}$$

Pero, se sabe que

$$A(R)\bar{x}_R = \iint_R x\ dx\,dy$$

Así, la igualdad se cumple si escogemos P tal que

$$2P_x - P_y - 1 = x \quad \longrightarrow \quad 2P_x - P_y = 1 + x \tag{6.1}$$

De manera análoga,

$$\begin{aligned} A(R)\bar{y}_R &= \int_\gamma (-2P)\ dx + (2Q-P)\ dy &&= \int_\gamma (-2P)\ dx + (2y-P)\ dy \\ &&&= \iint_R \Big((2y-P)_x + 2P_y\Big)\ dx\,dy \\ &&&= \iint_R \Big(-P_x + 2P_y\Big)\ dx\,dy \end{aligned}$$

Y como $A(R)\bar{y}_R = \iint_R y\ dx\,dy$ obtenemos, igualando,

$$-P_x + 2P_y = y \tag{6.2}$$

Las igualdades (6.1) y (6.2) nos proporcionan un sistema de ecuaciones lineales para $P_x,\ P_y$. Resolviéndolo obtenemos:

$$P_x = \frac{1}{3}(2x+y+2) \qquad \wedge \qquad P_y = \frac{1}{3}(x+2y+1)$$

Integrando P_x con respecto a x,

$$P = \frac{x^2+xy+2x}{3} + \varphi(y)$$

siendo $\varphi(y)$ una función a determinar. Derivando P con respecto a y e igualando,

$$P_y = \frac{x}{3} + \varphi'(y) = \frac{x}{3} + \frac{2y+1}{3}$$

De allí resulta que

$$\varphi'(y) = \frac{2y+1}{3} \quad \longrightarrow \quad \varphi(y) = \frac{y^2+y}{3}$$

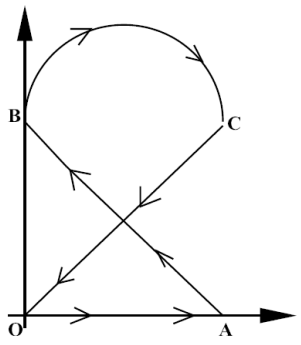
Finalmente,

$$\boxed{P(x,y) = \frac{x^2+y^2+xy+2x+y}{3}}$$

■

(5) *a*) Considere los puntos $O=(0,0), A=(1,0), B=(0,1)$ y $C=(1,1)$, y la curva $\gamma = OABCO$ de la figura. El arco que une B con C es un semicírculo. Sean $P(x,y), Q(x,y)$ funciones con $P_x = 1, P_y = 2, Q_x = -1, Q_y = -3$ para todo (x,y). Evalúe

$$\int_\gamma (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy$$



b) Probar que $\vec{F} = (e^{y^2z} + 2xy^2, 2xyze^{y^2z}, xy^2e^{y^2z})$ no es conservativo, pero que existe una función $f = f(t)$ de modo que

$$\vec{G}(x,y,z) = \left(e^{y^2z} + 2xy^2, 2xyze^{y^2z} + \frac{f(xy)}{y}, xy^2e^{y^2z}\right)$$

es conservativo en todo el espacio.

Solución:

a) Escribimos $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, donde γ_1 es el triángulo inferior $OADO$ –D es el punto de intersección entre $\overline{BA}, \overline{CO}$– y γ_2 es el trozo $DBCD$, cada uno orientado según lo indican las flechas. Así,

$$\int_\gamma = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2}$$

y cada una de ellas se puede hacer apelando al Teorema de Green. Si D_1, D_2 son las regiones encerradas por γ_1, γ_2, respectivamente,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1} (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy &= \iint_{D_1} \Big((Q-P)_x - (P+2Q)_y\Big)\ dA \\ &= \iint_{D_1} \Big(Q_x - P_x - P_y - 2Q_y\Big)\ dA \\ &= \iint_{D_1} 2\ dA \ = \ 2A(D_1) \\ &= 2 \times \frac{1}{4} \ = \ \frac{1}{2}\end{aligned}$$

ya que $D = (1/2, 1/2)$. De forma análoga,

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_2} (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy &= -\iint_{D_2} \Big((Q-P)_x - (P+2Q)_y\Big)\ dA \\ &= -2A(D_2) \ = \ -2 \times \left(\frac{1}{4} + \frac{\pi}{8}\right) \\ &= -\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Por tanto, sumando llegamos a

$$\int_{\gamma} (P+2Q)\ dx + (Q-P)\ dy = -\frac{\pi}{4}$$

b) Como $\vec{F}$ es de clase $\mathcal{C}^1$ en todo $\mathbb{R}^3$, tenemos que

$$\vec{F} \text{ es conservativo si y solo si } \nabla \times \vec{F} = \vec{0}$$

Ahora bien,

$$\nabla \times \vec{F} = \Big(2xyze^{y^2z} - 2xyze^{y^2z},\ y^2e^{y^2z} - y^2e^{y^2z},\ 2yze^{y^2z} - 2yze^{y^2z} - 4xy\Big) = (0, 0, -4xy)$$

y por tanto el campo no es conservativo. Procediendo de manera análoga,

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{G} &= \left(2xyze^{y^2z} - 2xyze^{y^2z},\ y^2e^{y^2z} - y^2e^{y^2z},\ 2yze^{y^2z} + \frac{y}{y}f'(xy) - 2yze^{y^2z} - 4xy\right) \\ &= (0, 0, f'(xy) - 4xy)\end{aligned}$$

Luego, para que sea conservativo, se precisa que:

$$f'(xy) = 4xy \quad \xrightarrow[t=xy]{} \quad f'(t) = 4t$$

por lo cual podemos elegir $f(t) = 2t^2$. Notar que elegimos la constante de integración igual a cero porque, de lo contrario, el campo se indefiniría en el plano $y = 0$, por lo que no sería conservativo en todo el espacio.

■

(6) Sean γ una curva cerrada simple en el plano XY e I_Z el momento de inercia, respecto al eje Z, de la región interior a γ. Encontrar un entero n tal que

$$n\, I_Z = \oint_\gamma x^3\, dy - y^3\, dx$$

Solución:

Recordemos que el momento de inercia de una región plana respecto al eje Z está dado por

$$I_Z = \iint_D (x^2 + y^2)\; dA$$

Por otra parte, la integral de línea es tal que:

$$\oint_\gamma x^3\, dy - y^3\, dx = \oint_\gamma Q\, dy + P\, dx$$

con $P = -y^3$ y $Q = x^3$. Usando el Teorema de Green,

$$\oint_\gamma x^3\, dy - y^3\, dx = \oint_\gamma Q\, dy + P\, dx = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) = 3\iint_D (x^2 + y^2)\; dA$$

siendo D la región interior a la curva. Comparando, ambos resultados, se concluye que $n = 3$. ■

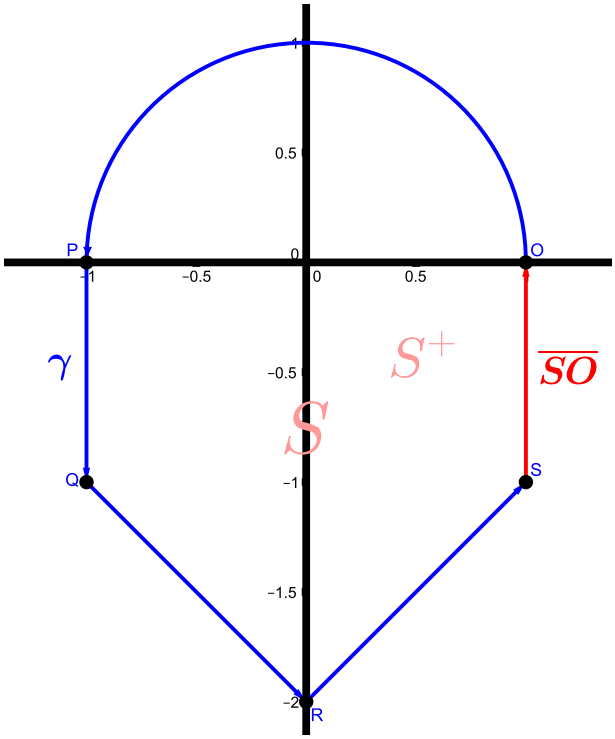
(7) Sea γ la curva formada por la unión de la parte superior de la semicircunferencia de radio 1, centrada en el origen y con extremos en los puntos $O(1,0)$ y $P(-1,0)$, y los segmentos de recta $\overline{PQ}$, $\overline{QR}$ y $\overline{RS}$ con $Q(-1,-1)$, $R(0,-2)$ y $S(1,-1)$. Sea $\vec{\alpha}$ una parametrización de la curva γ recorrida positivamente, i.e. en sentido contrario a los punteros del reloj. Calcule

$$\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\alpha}$$

con $\vec{F} = \Big(2(y^3 - 1) + y^2, 6xy^2 + 3x^2y^2\Big)$.

Solución:

Hagamos un esquema de la situación:



Por la forma de la curva es recomendable cerrarla, uniendo esta con el segmento de recta $\overline{SO}$ de modo tal que la curva cerrada resultante γ^* sea el borde de una región cerrada y acotada S orientada positivamente a través de la parametrización $\vec{r}$. De este modo, es posible calcular la integral de línea sobre γ como

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \oint_{\gamma^*} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\overline{SO}} \vec{F} \cdot d\vec{T}$$

con $\vec{T}$ una parametrización de $\overline{SO}$ que parte en S y termina en O. Dado que el campo $\vec{F} = (P, Q)$ cumple las hipótesis del Teorema de Green, afirmamos que:

$$\oint_{\gamma^*} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, dx\, dy = 6 \iint_S xy^2 \, dx\, dy - 2 \iint_S y \, dx\, dy$$

Observando que la función $f(x, y) = xy^2$ es impar en la variable x, se deduce –por simetría de la región S– que

$$\iint_S xy^2 \, dx\, dy = 0$$

De manera análoga, la función $g(x, y) = y$ es par en la variable x, por lo que –debido, nuevamente, a la simetría de S–

$$\iint_S y \, dx\, dy = 2 \iint_{S^+} y \, dx\, dy$$

donde $S^+ : \{(x,y) \in S \mid x \geq 0\}$. Calculando,

$$\begin{aligned}
\oint_{\gamma^*} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= -4 \iint_{S^+} y \; dx\, dy \\
&= -4 \int_0^1 \int_{x-2}^{\sqrt{1-x^2}} y \; dy\, dx \\
&= -2 \int_0^1 \left(1 - x^2 - (x-2)^2\right) dx \\
&= \frac{10}{3}
\end{aligned}$$

Finalmente, calculamos la integral de línea sobre el segmento $\overline{SO}$. La parametrización es $\vec{T}(t) = (1,t)$, $t \in [-1,0]$. Luego,

$$\int_{\overline{SO}} \vec{F} \cdot d\vec{T} = \int_{-1}^0 \vec{F}(1,t) \cdot (0,1) \; dt = \int_{-1}^0 9t^2 \; dt = 3$$

Con ello,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\alpha} = \oint_{\gamma^*} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\overline{SO}} \vec{F} \cdot d\vec{T} = \frac{10}{3} - 3 = \frac{1}{3}$$

■

(8) Calcular el trabajo realizado por la fuerza

$$\vec{F}(x,y) = \left(x - \frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2} - y\right)$$

al ir desde el punto $(1,0)$ al punto $(1+2\pi, 0)$ a lo largo de la curva γ parametrizada por

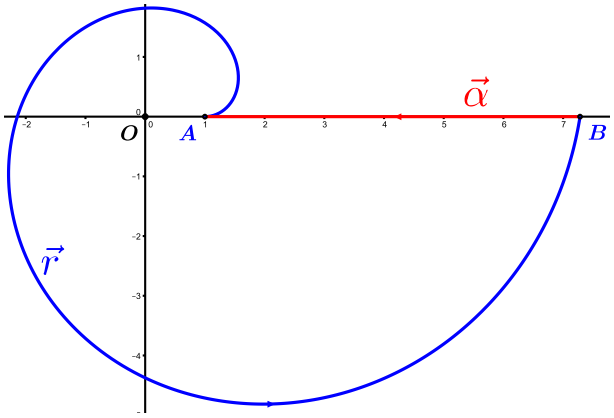
$$\vec{r}(t) = (1 + t\cos t, t \sin t)$$

Solución:

Sean $A(1,0)$ y $B(1+2\pi, 0)$ los puntos mencionados en el enunciado. Notemos que $A = \vec{r}(0)$ y $B = \vec{r}(2\pi)$. Como la curva no es cerrada, la cerramos con el segmento recto $\overline{BA}$, denotado por Γ, parametrizado por:

$$\vec{\alpha}(t) = (1 + 2\pi - t, 0), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Si esbozamos el gráfico de la situación, obtendremos



¿Por qué cerrar la curva? Si denotamos $\vec{F} = (P, Q)$, entonces se cumple que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} = 0$ para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Al cerrar la curva $\vec{r}$ con el segmento $\vec{\alpha}$, encerramos el origen y, en principio, no podemos utilizar el Teorema de Green. Usando el mismo argumento que el primer problema de esta sección, encerramos al origen en una circunferencia de radio ϵ recorrida anti-horaria tal que:

$$\oint_{\gamma+\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\circlearrowleft} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Calculemos esta última integral. La parametrización viene dada por

$$C_\epsilon : \ (\epsilon \cos t, \epsilon \sin t)$$

y el trabajo es

$$\begin{aligned}
\oint_{\circlearrowleft} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left(\epsilon \cos t - \frac{\sin t}{\epsilon}, \frac{\cos t}{\epsilon} - \epsilon \sin t \right) \cdot (-\epsilon \sin t, \epsilon \cos t) \ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(-2\epsilon^2 \sin t \cos t + 1 \Big) \ dt \\
&= 2\pi
\end{aligned}$$

Ahora, calculamos el trabajo a lo largo del segmento recto:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \left(1 + 2\pi - t, \frac{1}{1 + 2\pi - t} \right) \cdot (-1, 0) \ dt \\
&= \int_0^{2\pi} \Big(t - 1 - 2\pi \Big) \ dt \\
&= -2\pi(\pi + 1)
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\circlearrowleft} \vec{F} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi + 2\pi(\pi + 1) = 2\pi(\pi + 2)$$

■

II.iii. Integrales de superficie y Teorema de la Divergencia

(1) Encuentre el área:

a) De la porción de superficie $z = x^2 - y^2$ que está dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

b) De la región comprendida por el manto de ecuación $z = x^2 - y^2 + 4$, en plano XY y el cilindro unitario.

Solución:

Recordemos que:

∗ Una integral de superficie de un campo escalar se define como:

$$\iint_S f \, dS = \iint_R f(S(u,v)) \|S_u \times S_v\| \, du \, dv$$

con R la región dominio de los parámetros u, v.

∗ Para un campo vectorial:

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS = \iint_R F(S(u,v)) \cdot (S_u \times S_v) \, du \, dv$$

con la condición que el vector normal a S, calculado en la práctica como el producto cruz de los tangentes, esté apuntando hacia fuera de la superficie. A esta integral también se le conoce como el *flujo normal exterior* de $\vec{F}$ a través de la superficie S.

a) Parametricemos la porción de superficie por

$$S(x,y) = (x, y, x^2 - y^2)$$

con $x^2 + y^2 \leq 1$. Un cálculo inmediato nos da el elemento de área:

$$dS = \left\| \frac{\partial S}{\partial x} \times \frac{\partial S}{\partial y} \right\| \, dx \, dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \, dx \, dy$$

De este modo, el área A de la porción de superficie está dada, en polares, por

$$A = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} r \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1 + 4r^2} \, r \, dr = \frac{\pi}{6} \left(5^{3/2} - 1\right)$$

b) Dada la forma de la región, elegimos expresar las superficies en coordenadas cilíndricas. Primero, calculamos el área del manto. Podemos parametrizarlo como $M(x,y) = (x, y, x^2 - y^2 + 4)$, entonces la parametrización en coordenadas cilíndricas será:

$$M(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, r^2\cos 2\theta + 4)$$

con $r \int [0,1],\ \theta \in [0, 2\pi]$. Entonces, la normal viene dada por:

$$\vec{n} = M_r \times M_\theta = (-2r^2 \cos\theta, 2r^2 \sin\theta, r)$$

Así, el área es

$$\begin{aligned} A &= \iint_R \|\vec{n}\| \; dr d\theta \; = = \iint_R \sqrt{4r^4\cos^2\theta + 4r^4 \sin^2\theta + r^2} \; dr \, d\theta \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} r\sqrt{4r^2+1} \; dr d\theta \; = \; 2\pi(4r^2+1)^{3/2} \; \frac{2}{8\cdot 3}\Big|_0^1 \\ &= \frac{\pi}{6}\Big(5^{3/2} - 1\Big) \end{aligned}$$

Para el borde, dado por el cilindro, lo que haremos no es la integral de superficie, sino "cortar" el cilindro y estirarlo en el plano. La condición para el cilindro es $r^2 = 1$, y ya sabemos que la altura está determinada por el manto y vale $z = r^2 \cos 2\theta + 4$. Combinando ambas cosas, y el hecho de que al estirar el cilindro la longitud en el plano de la región (la variable) será θ, queda que el área vale:

$$\int_0^{2\pi} \cos 2\theta + 4 \; d\theta = 8\pi$$

Por último, la base es un disco, cuya área es π. Luego, el área total del sólido es:

$$A_{total} = \frac{\pi}{6}\Big(5^{3/2} - 1\Big) + 9\pi$$

■

(2) Sea Σ la porción de la superficie $x^2 + y + z^2 = 1$ correspondiente a $y \geq 0$

a) Calcule el área de Σ

b) Siendo $\vec{F} = (x, -y, 1)$ y $\hat{n}$ la normal unitaria de Σ, determine

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n} \; dS$$

Solución:

a) La superficie Σ puede ser descrita como el conjunto de puntos tales que:

$$\Sigma : \{(x,y,z)\mathbb{R}^3 \mid y = 1 - x^2 - z^2, \; x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Por tanto, la parametrización cartesiana de la misma es:

$$S(x,z) = (x, 1 - x^2 - z^2, z)$$

La normal es, por tanto,

$$\vec{n} = S_x \times S_z = (-2x, -1, -2z)$$

De esta forma, el área de la superficie se calcula de la siguiente forma:

$$A(\Sigma) = \iint_D \|\vec{n}\| \; dx\, dz = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} \; dx\, dz$$

con $D : \; x^2 + z^2 \leq 1$. Basta utilizar coordenadas polares para resolver:

$$\begin{aligned} A(\Sigma) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \sqrt{4r^2 + 1} \; r \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{\pi}{6}\Big(5\sqrt{5} - 1\Big) \end{aligned}$$

b) Para calcular la integral de superficie pedida, es posible utilizar $\pm\vec{n}$, pues no se especifica en el enunciado. La única diferencia radicará en el signo, por lo que utilizaremos $\vec{n}$. Recordamos que

$$\hat{n} \; dS = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \; \|\vec{n}\| \, dx\, dz = \vec{n} \; dx\, dz$$

Con ello,

$$\begin{aligned} \iint_\Sigma \vec{F} \cdot \hat{n} \; dS &= \iint_\Sigma (x, x^2 + z^2 - 1, 1) \cdot (-2x, -1, -2z) \; dx\, dz \\ &= \iint_D \Big(-3x^2 + 1 - z^2 - 2z \Big) \; dx\, dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

(3) Considere la superficie S definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x, y, z \geq 0$. Determine el flujo a través de S del rotor del campo $\vec{F} = (xy, y, z)$.

Solución:

Una parametrización φ de la superficie, que es un octante de la esfera unitaria, es

$$\varphi(u, v) = (\cos u \sin v, \sin u, \sin v, \cos v), \quad 0 \leq u, v \leq \frac{\pi}{2}$$

La normal a la superficie es:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \varphi_u \times \varphi_v \\ &= (-\sin u \sin v, \cos u \sin v, 0) \times (\cos u \cos v, \sin u \cos v, -\sin v) \\ &= -(\cos u \sin^2 v, \sin u \sin^2 v, \sin v \cos v) \end{aligned}$$

Por otra parte, el rotor del campo $\vec{F}$ viene dado por:

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xy & y & z \end{vmatrix} = (0, 0, -x)$$

Por tanto, el flujo a través de S es:

$$\begin{aligned}\iint_S \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS &= \int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos u \sin^2 v \cos v\ du\, dv \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin^2 v \cos v\ dv \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

■

(4) Sea S la superficie del sólido limitado por el cilindro $x^2+y^2=4$, el plano $x+z=4$ y el plano XY. Hallar el flujo hacia fuera, a través de S, del campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \big(x^2+e^y,\ xy-\arctan(z),\ \sin(x)\big)$$

Solución:

Enunciemos el siguiente teorema:

Teorema (de la Divergencia): Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientable, cerrada y regular a tramos que encierra una región Ω, i.e. $\partial\Omega = \mathcal{S}$. Sea $\hat{n}$ la normal exterior de la superficie y $\vec{F} = (P,Q,R)$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Entonces,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{F}\cdot\hat{n}\ dS = \iiint_{\Omega} \nabla\cdot\vec{F}\ dx\, dy\, dz$$

Usaremos el Teorema de la Divergencia, pues deseamos calcular el flujo en una **superficie cerrada**. Sea R el sólido encerrado por la superficie (el que está dentro del cilindro, entre los planos XY y $x+z=4$):

$$R = \{(x,y,z) : x^2+y^2 \le 4,\ 0 \le z \le 4-x\}$$

Por otra parte,

$$\nabla\cdot\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x^2+e^y\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(xy-\arctan(z)\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(\sin(x)\Big) = 3x$$

Por lo tanto,

$$\Phi = \iiint_R \nabla\cdot\vec{F}\ dxdydz = 3\iint_D x\left(\int_0^{4-x} dz\right)\ dxdy = 3\iint_D x(4-x)\ dx\, dy$$

siendo $D = \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calculamos la integral en D usando coordenadas polares:

$$\begin{aligned}
\Phi &= 3\int_0^2 \int_0^{2\pi} r\cos\theta(4 - r\cos\theta)\, r\ d\theta\, dr \\
&= 3\int_0^2 \int_0^{2\pi} (4r^2\cos\theta - r^3\cos^2\theta)\ d\theta\, dr \\
&= 3\int_0^2 4r^2\ dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos\theta\ d\theta}_{0} - 3\int_0^2 r^3\ dr \underbrace{\int_0^{2\pi} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)\ d\theta}_{\pi} \\
&= -12\pi
\end{aligned}$$

■

(5) Considere la región Ω dada por $x^2 + 2y^2 + 4z^2 \leq 1$, $z \geq 0$, y un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$ con $P_x + Q_y = 3$, $R(x,y,z) = x^2 + y^2$. Evalúe el flujo

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS$$

donde S es la porción de $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 1$ con $z \geq 0$, y $\hat{n}$ es la normal unitaria apuntando hacia fuera del elipsoide.

Solución:

Sea S_1 el disco $S_1 = \{x^2 + 2y^2 \leq 1\}$, con normal hacia abajo. Entonces, $S \cup S_1$ constituye una superficie cerrada, orientada positivamente hacia afuera, que es frontera del conjunto Ω.

Aplicando el Teorema de la Divergencia a Ω tenemos que:

$$\iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F}\ dx\, dy\, dz = \iint_{S+S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS + \iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS$$

de donde

$$\Phi = \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS = \underbrace{\iiint_\Omega \nabla \cdot \vec{F}\ dx\, dy\, dz}_{I_1} - \underbrace{\iint_{S_1} \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS}_{I_2}$$

Calculamos, a continuación, los valores de dichas integrales.

- Por hipótesis, tenemos que

$$\nabla \cdot \vec{F} = P_x + Q_y + R_z = 3 + \frac{\partial}{\partial z}\Big(x^2 + y^2\Big) = 3$$

Por tanto, usando coordenadas cilíndricas para describir la región Ω,

$$x = r\cos\theta,\ y = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{2}},\ z = z \quad \longrightarrow \quad \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)}\right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

se obtiene que:

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \nabla \cdot \vec{F}\ dxdydz &= \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-r^2}/2} \frac{3r}{\sqrt{2}}\ dz\,dr\,d\theta \\ &= \frac{3\cdot 2\pi}{2\sqrt{2}}\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\ dr \\ &= \frac{\sqrt{2}\pi}{2}\end{aligned}$$

que corresponde a I_1.

- Como S_1 está orientada hacia abajo, $\hat{n} = (0,0,-1)$. Con ello,

$$\iint_{S_1} \vec{F}\cdot\hat{n}\ dS = \iint_{S_1} (P,Q,R)\cdot(0,0,-1)\ dS = -\iint_{S_1} R\ dS = -\iint_{S_1} x^2+y^2\ dS$$

Usando:

$$x = r\cos\theta,\ y = \frac{r\sin\theta}{\sqrt{2}} \quad\longrightarrow\quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = \frac{r}{\sqrt{2}}$$

Ahora, la segunda integral queda expresada como:

$$\begin{aligned}I_2 &= -\int_0^1\int_0^{2\pi} r^2\cos^2\theta + \frac{r^2}{2}\sin^2\theta\ \frac{r}{\sqrt{2}}d\theta\,dr \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{r^3}{2}\ dr\int_0^{2\pi} 2\cos^2\theta+\sin^2\theta\ d\theta \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{8}\cdot 3\pi \\ &= -\frac{3\sqrt{2}\pi}{16}\end{aligned}$$

Combinando ambos valores,

$$\Phi = I_1 - I_2 = \frac{\sqrt{2}\pi}{2} + \frac{3\sqrt{2}\pi}{16} = \frac{11\sqrt{2}\pi}{16}$$

■

(6) Considere el campo en $\mathbb{R}^3$ dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x+\cos y, y+e^{xz}, z)$. Calcule el flujo normal del campo en la superficie S en $\mathbb{R}^3$ definida por $z = x^2+y^2,\ 1\le z\le 4$.

Solución:

Usaremos el Teorema de la Divergencia, y para ello definiremos $\partial R = S\cup S_1\cup S_2$, donde S_1, S_2 son las tapas superior e inferior –respectivamente– con vector normal apuntando hacia afuera.

Puesto que

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(x+\cos y\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(y+e^{xz}\Big) + \frac{\partial}{\partial z}\Big(z\Big) = 3$$

la integral de superficie pedida es igual a:

$$\Phi = 3\iiint_R dV - \iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\hat{n}_1\ dS_1 - \iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\hat{n}_2\ dS_2$$

Primero que todo, notamos que:

$$3\iiint_R dV = 3\cdot \mathrm{Vol}(R)$$

Calcularemos el volumen vía secciones transversales: cada sección transversal corresponde a un círculo de radio $\sqrt{z}$, por tanto:

$$\mathrm{Vol}(R) = \int_1^4 A(z)\ dz = \int_1^4 \pi z\ dz = \frac{15\pi}{2}$$

Las parametrizaciones para $S_1,\ S_2$ son:

$$S_1:\ (r\cos\theta, r\sin\theta, 4)\ ,\quad 0\le r\le 2,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

$$S_2:\ (r\cos\theta, r\sin\theta, 1)\ ,\quad 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$$

Sus respectivas normales son $\hat{n}_1 = (0,0,1),\ \hat{n}_2 = (0,0,-1)$. Las integrales de superficie sobre cada tapa se reducen a:

$$\begin{aligned}\Phi_{S_1} &= \iint_{S_1}\mathbf{F}\cdot\hat{n}\ dS \ =\ \int_0^2\int_0^{2\pi} 4r\ d\theta\, dr\\ &= 16\pi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Phi_{S_2} &= \iint_{S_2}\mathbf{F}\cdot\hat{n}\ dS \ =\ \int_0^1\int_0^{2\pi} -r\ d\theta\, dr\\ &= -\pi\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\Phi = 3\cdot\frac{15\pi}{2} - 16\pi + \pi = \frac{15\pi}{2}$$

■

(7) Sea $\mathbf{F}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ el campo dado por $\mathbf{F}(x,y,z) = (x-1, y-3, z-8)$. Sea $B\subseteq\mathbb{R}^3$ la esfera unitaria centrada en el origen, y sea C el cono dado por $z\ge 0,\ 4z^2 = 3(x^2+y^2)$. La intersección $B\cap C$ da origen a una curva Γ. Sea M la superficie cerrada compuesta por la porción de C que está debajo de Γ y por la porción de B que está sobre ella. Calcule el flujo normal exterior del campo a través de esta superficie.

Solución:

Es fácil ver que

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = 3$$

Sea W la región acotada por M. Usando el Teorema de la Divergencia, encontramos que

$$\Phi = \iiint_W \nabla \cdot \mathbf{F}\ dV = 3 \cdot \text{Vol}(W)$$

Así, el problema se reduce a calcular un volumen. Usando coordenadas esféricas, encontramos que el cono puede ser descrito por $\phi = \phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$4r^2 \cos^2\phi = 3r^2 \sin^2\phi \quad \longrightarrow \quad |\tan\phi| = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Como $0 \leq z = r\cos\phi$, existe un único ángulo $\phi_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ que satisface la ecuación anterior. Así, tenemos la siguiente descripción para la región:

$$W = \{(r, \theta, \phi) : 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \phi_0\}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \text{Vol}(W) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^{\phi_0} r^2 \sin\phi\ d\phi\, d\theta\, dr \\ &= 2\pi \int_0^1 r^2\ dr \int_0^{\phi_0} \sin\phi\ d\phi \\ &= \frac{2\pi}{3}\Big(1 - \cos\phi_0\Big) \end{aligned}$$

Es fácil ver que:

$$\tan\phi_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad \longrightarrow \quad \cos\phi_0 = \sqrt{\frac{3}{7}}$$

Finalmente,

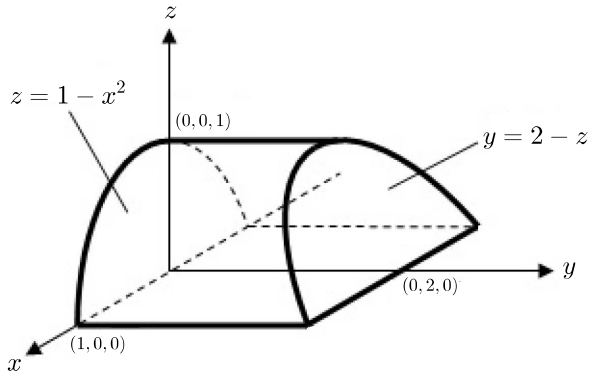
$$\Phi = 2\pi\left(1 - \sqrt{\frac{3}{7}}\right)$$

■

(8) Evaluar el flujo normal exterior de $\vec{F} = \left(xy, y^2 + e^{xz^2}, \sin(xy)\right)$ a través de la superficie S que corresponde a la frontera de la región W acotada por el cilindro parabólico $z = 1 - x^2$ y los planos $z = 0$, $y = 0$ e $y + z = 2$.

Solución:

Podemos graficar para aclarar la situación, pero no es necesario conocer la forma de la región para resolve:



El problema invita a la transformación de la integral de flujo en algún otro tipo de integral, para evitar las complejidades que surgirán de parametrizar el segundo término de la segunda componente del campo vectorial, y también para hacer una sola integral en vez de cuatro. Para aplicar el Teorema de la Divergencia, calculamos:

$$\nabla \cdot \vec{F} = y + 2y = 3y$$

Evaluaremos la integral de volumen de esta función escalar en la región W, la cual es fácil de parametrizar al considerar que:

$$0 \leq y \leq 2 - z\,, \quad 0 \leq z \leq 1 - x^2\,, \quad -1 \leq x \leq 1$$

Así,

$$\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n}\; dS = \iiint_W \nabla \cdot \vec{F}\; dV = 3 \int_{-1}^{1} \int_{0}^{1-x^2} \int_{0}^{2-z} y\; dy\, dz\, dx = \frac{184}{35}$$

■

(9) Sea $C \subset \mathbb{R}^2$ una curva cerrada, simple y suave que encierra una región de área A. Calcule la integral

$$\oint_C \vec{x} \cdot \hat{n}\; ds$$

donde $\vec{x} = (x, y)$ es el vector posición, $\hat{n}$ el vector unitario normal exterior a la curva y ds el diferencial de largo.

Solución:

Recordemos, antes de comenzar, que el vector tangente a una curva parametrizada por $\vec{r} = \Big(x(t), y(t)\Big)$ es

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} dt = (x', y')\; dt$$

El vector normal exterior es, por tanto,

$$\vec{n} = (y', -x')$$

Con ello, podemos afirmar que:

$$\hat{n}\; ds = \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|}\; \|\vec{t}\|\; dt = \vec{n}\; dt$$

pues $\|\vec{t}\| = \|\hat{n}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. Ahora, para un campo $\vec{F} = (M, N)$ arbitrario, se cumple que:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\ ds = \oint_C M\, y'\ dt - N\, x'\ dt = \oint_C -N\ dx + M\ dy = \iint_D M_x + N_y\ dA$$

donde la última igualdad se debe al Teorema de Green. Por tanto, hemos demostrado el **Teorema de la divergencia en el plano**:

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n}\ ds = \iint_D \nabla \cdot \vec{F}\ dA$$

Para nuestro caso,

$$\oint_C \vec{x} \cdot \hat{n}\ ds = \iint_D (1+1)\ dA = 2 \iint_D dA = 2A$$

■

(10) **[Propuesto]** Considerando la ley de Gauss,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n}\ dS = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

con q la carga encerrada por la superficie $\mathcal{S}$, determine el campo eléctrico $\vec{E}$ de una esfera cargar uniformemente, de carga Q y radio a.

Solución:

Primero que todo, calculemos la densidad volumétrica de carga para la esfera:

$$\rho(r) = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi a^3} = \frac{3Q}{4\pi a^3}$$

Por simetría, proponemos que $\vec{E} = E(r)\,\hat{r}$. Como superficies, tomaremos esferas de radio r con normal exterior $\hat{n} = \hat{r}$. Así,

$$\iint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot \hat{n}\ dS = \iint_{\mathcal{S}} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r}\ dS = E(r)\ A(\mathcal{S}) = 4\pi r^2\ E(r) = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

Para calcular la carga encerrada, distinguimos dos casos:

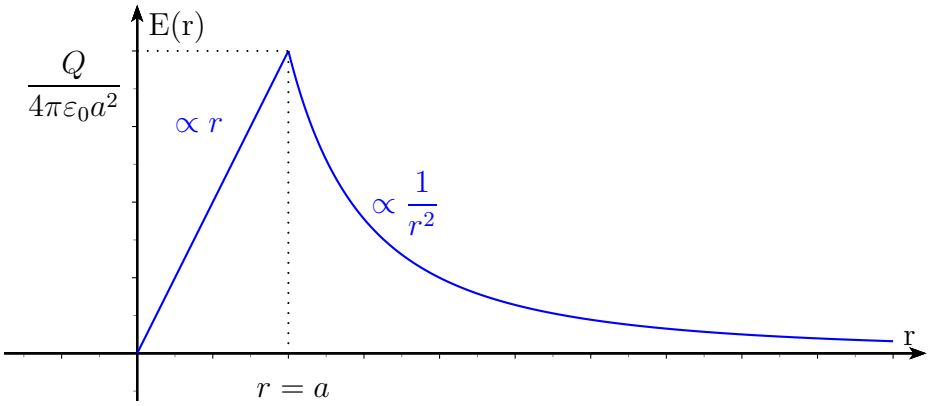
- $\boxed{r > a}$

$$q_{enc} = Q \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, r^2}$$

- $\boxed{r < a}$

$$q_{enc} = \rho(r) \cdot \frac{4}{3}\pi r^3 = Q\left(\frac{r}{a}\right)^3 \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\, a^3}\ r$$

Notar que es continua en $r = a$. Así, el campo eléctrico tiene la siguiente forma:



■

II.iv. Teorema de Stokes

(1) Calcule $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$, siendo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(2y + \arcsin x,\ e^{y^2},\ y^2 + \ln\left(z^2 + 4\right)\right)$$

y $\mathcal{C}$ el contorno del triángulo con vértices en $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 2)$ recorrido en el orden que se indican los vértices.

Solución:

El cálculo directo de la integral de línea es muy complejo (se deja propuesto al lector), así que para evitar complicaciones recurriremos al siguiente teorema:

Teorema (de Stokes):

$$\oint_{\partial\mathcal{S}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{\mathcal{S}} \left(\nabla \times \vec{F}\right) \cdot \hat{n}\ dS$$

Notar que $\mathcal{S}$ es cualquier superficie que tenga a la curva $\partial\mathcal{S}$ como borde, orientada positivamente.

La superficie $\mathcal{S}$ más simple que cumple las hipótesis del Teorema de Stokes es el plano que pasa por los tres vértices, con ecuación $z = 2(1 - x - y)$. Por tanto,

$$\hat{n}\ dS = \frac{(-z_x, -z_y, 1)}{\|{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1\|}\ \|{z_x}^2 + {z_y}^2 + 1\|\, dxdy = (2, 2, 1)\ dxdy$$

Por otro lado,

$$\nabla \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = (2y, 0, -2)$$

Así, tenemos que:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D (2y, 0, -2) \cdot (2, 2, 1)\ dxdy = 2\iint_D (2y - 1)\ dxdy$$

donde D es la proyección de $\mathcal{S}$ sobre el plano XY. Esto es,

$$D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= 2\int_0^1 \int_0^{1-x} (2y - 1)\ dydx \\ &= 2\int_0^1 \Big(y^2 - y\Big)\Big|_0^{1-x}\ dx \\ &= 2\int_0^1 (x^2 - x)\ dx \\ &= -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

■

(2) Considere el plano $\mathcal{P} : x + y + z = 1$ con normal en la dirección $(1, 1, 1)$. Determine un campo $\vec{F}(x, y, z) = \Big(P(x), Q(y, z), R(y, z)\Big)$ de modo que, para toda curva cerrada simple $\gamma \subset \mathcal{P}$, se tenga que:

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{t}\ ds = A(D)$$

donde $A(D)$ denota el área de la región $D \subset \mathcal{P}$ encerrada por γ.

Solución:

Se cumplen las condiciones para aplicar el Teorema de Stokes, según lo cual

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{t}\ ds = \iint_D \Big(\nabla \times \vec{F}\Big) \cdot \hat{n}\ dS$$

donde, de acuerdo al enunciado, $\hat{n} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Tenemos que:

$$\nabla \times \Big(P(x), Q(y, z), R(y, z)\Big) = (R_y - Q_z, 0, 0)$$

Así,

$$\oint_{\gamma} \vec{F} \cdot \hat{t}\ ds = \iint_{D} \frac{R_y - Q_z}{\sqrt{3}}\ dS$$

Obtenemos como resultado $A(D)$ si el integrando es 1, para la cual existen distintas combinaciones. Por ejemplo:

$$P = 0\ , \quad Q = 0\ , \quad R = y\sqrt{3} \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = \sqrt{3}(0, 0, y)$$

o bien

$$P = 0\ , \quad Q = -z\sqrt{3}\ , \quad R = 0 \quad \longrightarrow \quad \vec{F} = \sqrt{3}(0, -z, 0)$$

■

(3) *a*) Muestre que si $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son dos funciones a valores reales, entonces

$$\nabla \times (f\, \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$$

b) Dadas $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, $g(x, y, z) = \dfrac{\arctan\,(1 + z^2)}{1 + x^2 + y^2}$, calcule la integral de superficie

$$\iint_{\Sigma} \Big(\nabla f \times \nabla g\Big) \cdot \hat{n}\ dS$$

donde Σ es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ y $\hat{n}$ es la normal que apunta hacia el origen.

Solución:

a) Recordemos que, para un campo vectorial $\vec{F} = (P, Q, R)$,

$$\nabla \times \vec{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{\imath} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Para el campo vectorial $\vec{F} = f\ \nabla g$:

$$P = f\frac{\partial g}{\partial x},\ Q = f\frac{\partial g}{\partial y},\ R = f\frac{\partial g}{\partial z}$$

De aquí, la primera componente del rotor es

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(f\frac{\partial g}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(f\frac{\partial g}{\partial y}\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial g}{\partial y}$$

Claramente el término de la derecha corresponde a la primera componente de $\nabla f \times \nabla g$. El mismo cálculo en las otras coordenadas nos conduce a:

$$\nabla \times \Big(f\, \nabla g\Big) = \nabla f \times \nabla g$$

b) Usando lo anterior, notamos que:

$$\iint_{\Sigma} \Big(\nabla f \times \nabla g\Big) \cdot \hat{n}\, dS = \iint_{\Sigma} \Big(\nabla \times (f\, \nabla g)\Big) \cdot \hat{n}\, dS$$

Aplicando el Teorema de Stokes al segundo término de la ecuación anterior, obtenemos:

$$\iint_{\Sigma} \Big(\nabla \times (f\, \nabla g)\Big) \cdot \hat{n}\, dS = \oint_{\gamma} f\, \nabla g \cdot \hat{t}\, ds$$

donde γ es la curva frontera de la superficie Σ, y como $\hat{t}$ es el tangente unitario de esta curva. La curva γ es una curva cerrada que se puede describir como

$$\gamma = \{x^2 + y^2 = 1,\ z = 0\}$$

Notamos que sobre esta curva la función f es constante e igual a 1. Deducimos que:

$$\oint_{\gamma} f\, \nabla g \cdot \hat{t}\, ds = \oint_{\gamma} \nabla g \cdot \hat{t}\, ds$$

Finalmente, puesto que la curva γ es cerrada, y la función g no tiene singularidades, concluimos que:

$$\oint_{\gamma} \nabla g \cdot \hat{t}\, ds = 0$$

En resumen,

$$\iint_{\Sigma} \Big(\nabla f \times \nabla g\Big) \cdot \hat{n}\, dS = 0$$

■

(4) Calcule $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ si $\vec{F}(x, y, z) = \left(-\dfrac{y}{x^2 + y^2}, \dfrac{x}{x^2 + y^2}, z\right)$ y Γ es:

a) La intersección entre el cilindro $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

b) La intersección entre el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + z = 1$.

Solución:

Primero, vemos que:

$$\nabla \times \vec{F} = \left(0, 0, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) = (0, 0, 0)$$

para todo (x, y, z) con $x, y \neq 0$, i.e. todos los puntos fuera del eje Z.

a) En este caso, Γ es una curva cerrada que no toca ni encierra el eje Z, y por tanto podemos usar el Teorema de Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_{S} \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\, dS$$

donde S es la porción del plano $x + z = 1$ encerrado por Γ, orientada hacia arriba. Pero, como $\nabla \times \vec{F} \equiv \vec{0}$ en S, tenemos que

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

b) A diferencia del caso anterior, esta vez la curva cerrada Γ sí encierra al eje Z, conjunto en el cual el rotor del campo **no está definido**. Por tanto, no podemos usar el Teorema de Stokes y deberemos integrar explícitamente.

Primero que todo, podemos parametrizar la curva mediante la función vectorial

$$\vec{r}(t) = (\cos t, \sin t, 1 - \cos t),\ 0 \leq t \leq 2\pi$$

con

$$\vec{r}\,'(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t) \quad \wedge \quad \vec{F}(\vec{r}(t)) = (-\sin t, \cos t, 1 - \cos t)$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_0^{2\pi} \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}\,'(t)\, dt \\ &= \int_0^{2\pi} 1 + \sin t - \sin t \cos t\, dt \\ &= 2\pi \end{aligned}$$

■

(5) Sean

$$\vec{F}_1(x,y) = \left(-\frac{y}{(x-1)^2 + y^2}, \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} \right) \quad \wedge \quad \vec{F}_2(x,y) = \left(-\frac{y}{(x+1)^2 + y^2}, \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2} \right)$$

Calcule $\displaystyle\oint_{C} \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) \cdot d\vec{r}$ cuando C es:

a) La circunferencia $x^2 + (y-3)^2 = 1$, orientada contra–reloj

b) El triángulo con vértices $(-4,-2)$, $(0,0)$ y $(1,1)$ orientado contra–reloj

c) El triángulo con vértices $(-4,-2)$, $(4,-2)$ y $(0,2)$ orientado contra–reloj

Solución:

Los campos $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son continuamente diferenciables en todo $\mathbb{R}^2$ excepto en los puntos $(1,)$ y $(-1,0)$, respectivamente. Además,

$$\nabla \times \vec{F}_1 = \nabla \times \vec{F}_2 = \vec{0}$$

excepto en los puntos antes aludidos.

a) La circunferencia encierra una región D que no contiene a los puntos de conflicto, por lo que se puede aplicar directamente el Teorema de Stokes y concluir que, con $\hat{n} = (0, 0, 1)$,

$$\oint_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r} = \iint_D \nabla \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot \hat{n}\ dS = 0$$

b) El triángulo mencionado encierra una región A que, al igual que en el caso anterior, no encierra puntos de conflicto. Así,

$$\oint_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r} = \iint_A \nabla \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot \hat{n}\ dS = 0$$

c) En esta parte, el triángulo C encierra una región T que contiene a ambos puntos de conflicto, por lo que no se puede aplicar el Teorema de Stokes directamente. Escribamos

$$\oint_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2\right) \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

y estudiemos la integral de $\vec{F}_1$. Sea $D_1 = \{(x-1)^2 + y^2 \leq \epsilon\}$, con $0 < \epsilon < 1$, suficientemente pequeño como para que D_1 esté contenido en la parte interior de T. Como $\widetilde{T} = T \backslash D_1$ es una región que no contiene a $(1, 0)$ (i.e. removimos el punto donde $\vec{F}_1$ tiene problemas) podemos aplicar el Teorema de Stokes y concluir

$$\oint_{\partial\widetilde{T}} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \iint_{\widetilde{T}} \nabla \times \vec{F}_1 \cdot \hat{n}\ dS = 0$$

El borde de $\widetilde{T}$ consiste en el triángulo C original y la circunferencia $\Gamma_1 = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 = \epsilon^2\}$. La orientación consistente para el Teorema de Stokes es $\partial\widetilde{T} = C \cup (-\Gamma_1)$, con C orientada contra–reloj y $(-\Gamma_1)$ orientada a favor del reloj. Así,

$$0 = \oint_{\partial\widetilde{T}} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \oint_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} + \oint_{-\Gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} \quad \longrightarrow \quad \oint_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}$$

Parametrizamos Γ_1 (contra–reloj) como

$$\gamma\theta = (\epsilon\cos\theta + 1, \epsilon\sin\theta),\ \theta \in [0, 2\pi] \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} \gamma'(\theta) &= \epsilon(-\sin\theta, \cos\theta) \\ \vec{F}_1(\gamma(\theta)) &= \left(-\frac{\epsilon\sin\theta}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon\cos\theta}{\epsilon^2}\right) \end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\oint_C \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma_1} \vec{F}_1 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\epsilon\sin\theta}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon\cos\theta}{\epsilon^2}\right) \cdot \epsilon(-\sin\theta, \cos\theta)\ d\theta = 2\pi$$

Para la integral de $\vec{F}_2$ a lo largo de C, hacemos un análisis análogo considerando $D_2 = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 \leq \epsilon^2\}$ y $\Gamma_2 = \{(x,y) : (x+1)^2 + y^2 = \epsilon^2\}$. En este caso, la conclusión es:

$$\oint_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}$$

Parametrizando Γ_2 como $\gamma(\theta) = (\epsilon\cos\theta - 1, \epsilon\sin\theta)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, obtenemos:

$$\oint_C \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \oint_{\Gamma_2} \vec{F}_2 \cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\epsilon\sin\theta}{\epsilon^2}, \frac{\epsilon\cos\theta}{\epsilon^2} \right) \cdot \epsilon(-\sin\theta, \cos\theta)\ d\theta = 2\pi$$

Finalmente,

$$\oint_C \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 \right) \cdot d\vec{r} = 4\pi$$

■

(6) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ el campo vectorial dado por $\vec{F}(x,y,z) = (e^{xy}\cos z, -x^2 z, xy)$, y sea S la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, orientada en la dirección del eje X positivo (la normal apuntando hacia afuera de la esfera). Calcule

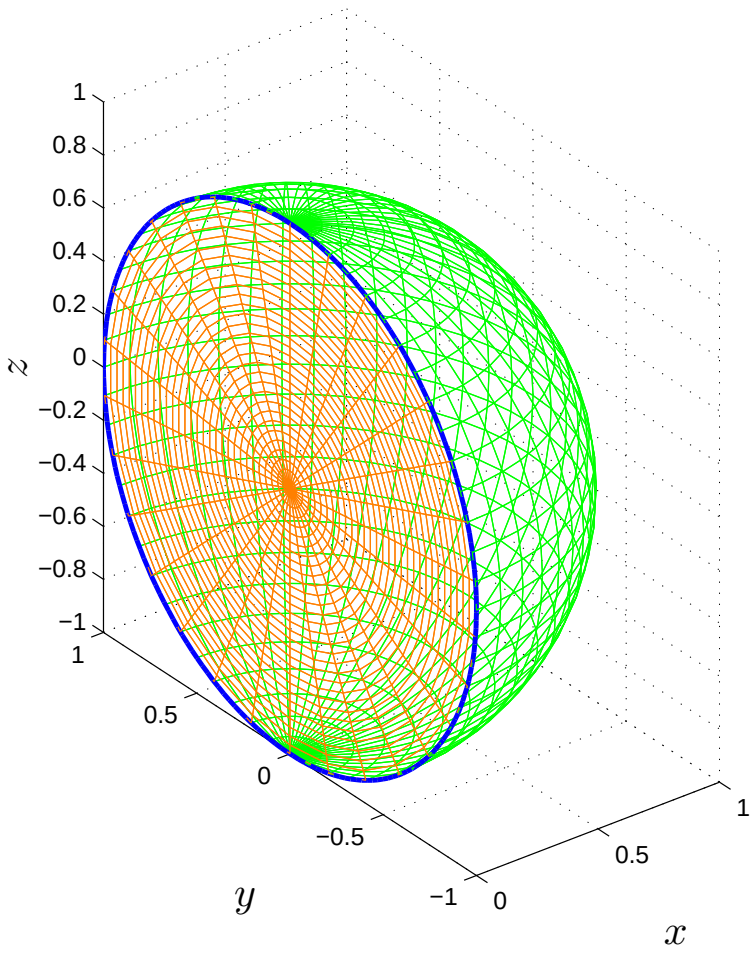
$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Solución:

Un cálculo directo de la integral de línea sería complicado, pero el lector está invitado a probar por dicha vía. En este caso, preferimos utilizar el Teorema de Stokes. Para ello, calculamos el rotor del campo:

$$\nabla \times \vec{F} = (x + x^2, -y - e^{xy}\sin z, -2xz - xe^{xy}\cos z)$$

El contorno sobre el que deseamos calcular la integral del línea posee infinitas superficies tales que su frontera coincide con la curva. Las dos más evidentes son el hemisferio S y el disco D:



(•) Disco D, (•) Superficie S y (•) Curva frontera ∂S

Notemos que el disco D posee coordenadas tales que $x = 0$, por lo que el rotor se reduce a $(0, -y - \sin z, 0)$ lo cual es muy simple de integrar. El Teorema de Stokes permite usar **cualquier** superficie que tenga como frontera a la curva deseada, por lo que utilizaremos al disco D como región de integración:

$$D: \ \varphi(y,z) = (0,y,z) \quad y^2 + z^2 \leq 1$$

La normal está dada por:

$$\vec{n} = \pm\varphi_y \times \varphi_z = \pm(1,0,0)$$

¿Qué signo elegimos? Como la curva está orientada de manera que la normal de la esfera apunta hacia afuera, también ocurre lo mismo con el disco. Por tanto, $\vec{n} = (1,0,0)$. Luego,

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \iint_D \nabla \times \vec{F} \cdot \vec{n} \, dy\, dz \\ &= \iint_D (0, -y - \sin z, 0) \cdot (1,0,0) \, dy\, dz \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

(7) Calcule la siguiente integral de línea

$$\int_C (x^2 - yz)\,dx + (y^2 - xz)\,dy + (z^2 - xy)\,dz$$

donde C es el segmento de la curva

$$\left\{(x, y, x) \in \mathbb{R}^3 : x = a\,\cos t\,,\ y = a\,\sin t\,,\ z = \frac{h\,t}{2\pi}\,,\ t \in \mathbb{R}\right\}$$

desde el punto $(a, 0, 0)$ hasta el punto $(a, 0, h)$, con $a > 0$ y $h > 0$ constantes.

Solución:

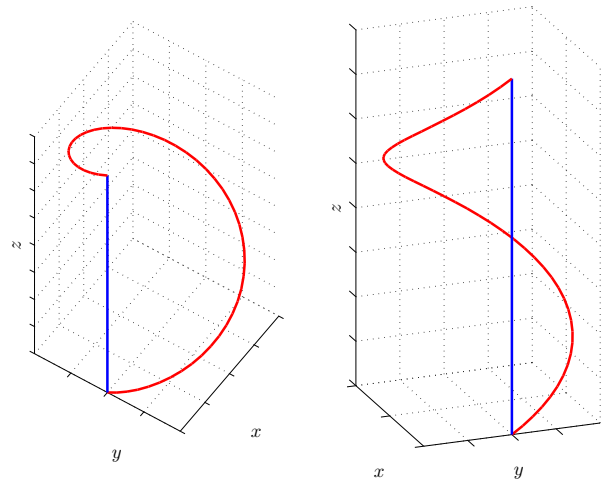
Si analizamos la curva, esta satisface que sus componentes x e y cumplen que

$$x(t)^2 + y(t)^2 = a^2$$

lo que significa que la curva está contenida en un cilindro infinito de radio a, por lo que puede ser una circunferencia o una hélice. Puesto que $z(t)$ no se mantiene constante, concluimos que se trata de una hélice. Esta curva no es cerrada, por lo que no podemos utilizar directamente el Teorema de Stokes; por tanto, introducimos el segmento

$$R:\ \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = a\,, y = 0\,, z = h - t\,, t \in [0, h]\right\}$$

de modo tal que $\Gamma = C \cup R$ sea una curva cerrada, como muestra la figura:



(•) Curva C y (•) Segmento R

Sea $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ cualquier superficie regular acotada tal que $\partial\Sigma = \Gamma$. Entonces, por el Teorema de Stokes tenemos que:

$$\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_\Sigma \nabla \times \vec{F} \cdot \hat{n}\ dS$$

En este caso,

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 0)$$

por lo que

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad \longrightarrow \quad \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{R} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Calculamos la última integral:

$$\int_{R} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{0}^{h} (h-t)^2 \, dt = -\frac{h^3}{3}$$

Finalmente,

$$\int_{C} (x^2 - yz)\, dx + (y^2 - xz)\, dy + (z^2 - xy)\, dz = \frac{h^3}{3}$$

■