**Facultad de Matemáticas**
**Departamento de Matemática**
Primer semestre 2014.

# MAT 1610 - Cálculo 1
# Pauta Interrogación 3

1. Calcular

*a)* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx.$

**Solución:**

Hacemos: $u = \arcsin(x^2) \Longrightarrow du = \dfrac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \Longrightarrow \dfrac{1}{2}\, du = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^4}}\, dx$

Además: $x = 0 \longrightarrow u = 0$ y $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \longrightarrow u = \dfrac{\pi}{6}$

luego:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} u\, du = \frac{1}{4} \left( u^2 \Big|_0^{\pi/6} \right) = \frac{\pi^2}{144}$$

*b)* $\displaystyle\int_0^{\ln(2)} e^x \sqrt{e^x - 1}\, dx.$

**Solución:**

Hacemos: $u = e^x - 1 \Longrightarrow du = e^x\, dx$

Además: $x = 0 \longrightarrow u = 0$ y $x = \ln(2) \longrightarrow u = 1$

luego:

$$\int_0^{\ln(2)} e^x \sqrt{e^x - 1}\, dx = \int_0^1 \sqrt{u}\, du = \frac{2}{2} \left( u^{3/2} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{3}$$

*c)* $\displaystyle\int_{-3}^{4} |x-1|\, dx.$

**Solución:**

$$\int_{-3}^{4} |x-1|\, dx = \int_{-3}^{1} |x-1|\, dx + \int_1^4 |x-1|\, dx = \int_{-3}^{1} -(x-1)\, dx + \int_1^4 (x-1)\, dx$$

$$= \left( x - \frac{x^2}{2} \Big|_{-3}^1 \right) + \left( \frac{x^2}{2} - x \Big|_1^4 \right) = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2\,a}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\,a}{n}\right)\right) = \frac{1-cos(a)}{a}\ ,\ a\neq 0.$$

**Solución:**

La expresión de la izquierda la podemos escribir como:

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\left(\frac{ka}{n}\right).$$

En ella reconocemos la función $f(x)=\operatorname{sen}(ax)$, una partición regular de largo $\dfrac{1}{n}$ del intervalo $[0,1]$ y valores $x_k=\dfrac{k}{n}$ escogidos para evaluar la respectiva suma. En resumen tenemos una suma de Riemann asociada a la función integrable $f(x)=\operatorname{sen}(ax)$ en el intervalo $[0,1]$.

Al tomar límite de esta expresión se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(\operatorname{sen}\left(\frac{a}{n}\right)+\operatorname{sen}\left(\frac{2\,a}{n}\right)+\cdots+\operatorname{sen}\left(\frac{(n-1)\,a}{n}\right)\right)=\int_0^1 \operatorname{sen}(ax)dx.$$

Como esta última integral tiene por primitiva $\dfrac{-\cos(ax)}{a}$, en este caso evaluada en $x=0, x=1$, respectivamente, se tiene que

$$\int_0^1 \operatorname{sen}(ax)dx = -\frac{\cos(a)}{a}+\frac{\cos(0)}{a},$$

que es el valor pedido.

*b*) Calcular $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt}{x^4}$.

**Solución:**

El límite es de la forma $\dfrac{0}{0}$, luego aplicando la regla de L'Hôpital, y el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt}{x^4} \overset{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^3)}{4\,x^3} = \frac{1}{4}\lim_{\substack{x\to 0\\ x^3\to 0}}\frac{\operatorname{sen}(x^3)}{x^3}=\frac{1}{4}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x \operatorname{sen}(t^3)\,dt}{x^4}=4$$

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, sen(x-t)\, dt.$$

Verifique que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene $f''(x) + f(x) = g(x)$.

Indicación: Recuerde que $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}(\alpha)\, \cos(\beta) - \cos(\alpha)\, \operatorname{sen}(\beta)$.

**Solución:**

$$f(x) = \int_0^x g(t)\, sen(x-t)\, dt = \int_0^x g(t) \Big( sen(x)\, \cos(t) - \cos(x)\, \operatorname{sen}(t) \Big)\, dt$$

$$\Longrightarrow f(x) = sen(x) \int_0^x g(t)\, \cos(t)\, dt - cos(x) \int_0^x g(t)\, \operatorname{sen}(t)\, dt$$

Por el Teorema Fundamental del Cálculo, se tiene:

$$\begin{aligned} f'(x) = \cos(x) \int_0^x g(t)\, \cos(t)\, dt + \operatorname{sen}(x)\, g(x)\, \cos(x) \\ + \operatorname{sen}(x) \int_0^x g(t)\, \operatorname{sen}(t)\, dt - cos(x)\, g(x)\, \operatorname{sen}(x) \end{aligned}$$

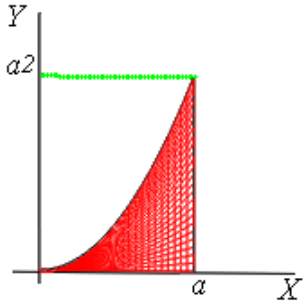
$$\Longrightarrow f'(x) = \cos(x) \int_0^x g(t)\, \cos(t)\, dt + \operatorname{sen}(x) \int_0^x g(t)\, \operatorname{sen}(t)\, dt$$

$$\Longrightarrow f''(x) = -\operatorname{sen}(x) \int_0^x g(t)\, \cos(t)\, dt + \cos^2(x)\, g(x) + \cos(x) \int_0^x g(t)\, \operatorname{sen}(t)\, dt + \operatorname{sen}^2(x)\, g(x)$$

$$\Longrightarrow f''(x) + f(x) = \cos^2(x)\, g(x) + \operatorname{sen}^2(x)\, g(x) = g(x)$$

y la recta $x = a$. Determine $a \in \mathbb{R}^+$ de modo que el volumen del sólido generado al rotar la región $\mathcal{R}$ en torno al eje $Y$ sea $\dfrac{81\,\pi}{2}$.

**Solución:**
Se tiene:




El volumen $V$ del sólido, está dado por

$$V = \pi \int_0^{a^2} a^2\,dy - \pi \int_0^{a^2} y\,dy = \pi\,a^4 - \frac{\pi}{2}\left(y^2\Big|_0^{a^2}\right) = \pi\,a^4 - \frac{\pi}{2}\,a^4 = \frac{\pi}{2}\,a^4$$

Como el volumen debe ser $\dfrac{81\,\pi}{2}$, entonces

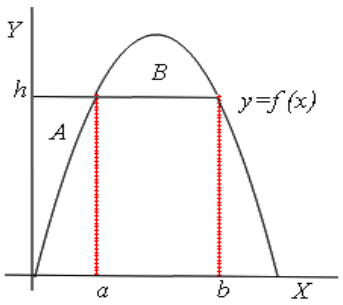
$$V = \frac{\pi}{2}\,a^4 = \frac{81\,\pi}{2} \Longrightarrow a = 3 \quad , \text{ pues } a > 0$$

Otra forma de calcular el volumen es:

$$V = 2\,\pi \int_0^{a} x \cdot x^2\,dx = 2\,\pi \int_0^{a} x^3\,dx = \frac{\pi}{2}\left(x^4\Big|_0^{a}\right) = \frac{\pi}{2}\,a^4$$

el resto del resultado sigue como antes.

las areas $A$ y $B$ de la figura sean iguales.




**Solución:**

Notemos que los puntos $a$ y $b$ son tales que $0 < a < b < \dfrac{2}{3}$.

Las área $A$ y $B$ están dadas por:

$$A = \int_0^a h - (2x - 3x^2)\, dx = \left( hx - x^2 + x^3 \Big|_0^a \right) = ha - a^2 + a^3$$

$$B = \int_a^b \Big( (2x - 3x^2) - h \Big)\, dx = \left( x^2 - x^3 - hx \Big|_a^b \right) = (b^2 - b^3 - hb) - (a^2 - a^3 - ha)$$

Ahora:

$$A = B \iff ha - a^2 + a^3 = (b^2 - b^3 - hb) - (a^2 - a^3 - ha) \iff b^2 - b^3 - hb = 0$$

$$\iff b\,(b - b^2 - h) = 0 \overset{b \neq 0}{\Longrightarrow} b - b^2 - h = 0 \Longrightarrow h = b - b^2$$

Como $f(b) = h$, entonces:

$$2b - 3b^2 = h = b - b^2 \Longrightarrow 2b^2 - b = 0 \Longrightarrow b(2b - 1) = 0 \overset{b \neq 0}{\Longrightarrow} b = \frac{1}{2} \Longrightarrow h = \frac{1}{4}$$

Otra forma de calcular es primero calcular al área $A_1$, bajo la curva $f(x) = 2x - 3x^2$ para $x$ entre 0 y $b$, esto es:

$$A_1 = \int_0^b 2x - 3x^2\, dx = \left( x^2 - x^3 \Big|_0^b \right) = b^2 - b^3$$

Como $A = B$, entonces al área $A_1$ coincide con el área del rectángulo, de base $b$ y altura $h$, esto es:

$$A_1 = b\,h \Longrightarrow b^2 - b^3 = b\,h \Longrightarrow b^2 - b^3 = b\,f(b) \overset{b \neq 0}{\Longrightarrow} b - b^2 = 2b - 3b^2$$

$$\Longrightarrow 2b^2 - b = 0 \Longrightarrow b(2b - 1) = 0 \overset{b \neq 0}{\Longrightarrow} b = \frac{1}{2} \Longrightarrow h = \frac{1}{4}$$