FACULTAD DE MATEMÁTICAS
PONTIFICIA UNIVERSIDAD
CATÓLICA DE CHILE

Interrogación 3
MAT1610 - Cálculo I

1. Considere la función $g : [-10, 3) \cup (3, 10] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \dfrac{x^2 - 5}{|x - 3|}$. Grafique, identificando elementos relevantes como extremos locales, concavidad, puntos de inflexión, asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

   Solución:

   En primer lugar podemos reescribir la definición de la función:

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2 - 5}{x - 3} & \text{si } x < 3 \\ \dfrac{x^2 - 5}{x - 3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

   Las derivadas de g para $x > 3$ se calculan

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{2x(x-3) - (x^2-5)}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} \\ g''(x) &= \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2-6x+5)2(x-3)}{(x-3)^4} \\ &= \frac{(2x-6)(x-3) - 2(x^2-6x+5)}{(x-3)^3} \\ &= \frac{2x^2 - 12x + 18 - 2x^2 + 12x - 10}{(x-3)^3} \\ &= \frac{8}{(x-3)^3}. \end{aligned}$$

   Notemos que si $x < 3$ solo hay que multiplicar por -1.

$$g'(x) = \begin{cases} -\frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2} & \text{si } x < 3 \\ \frac{(x-1)(x-5)}{(x-3)^2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$g''(x) = \begin{cases} -\frac{8}{(x-3)^3} & \text{si } x < 3 \\ \frac{8}{(x-3)^3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

   de manera que los puntos críticos en el dominio de g son $x = 1$ y $x = 5$. Ambos corresponden a mínimos locales pues $g''(x) > 0$ para todo x en el dominio. Reemplazando tenemos que $g(1) = -2$ y $g(5) = 10$ de manera que el mínimo global o absoluto se alcanza en $x = 1$.

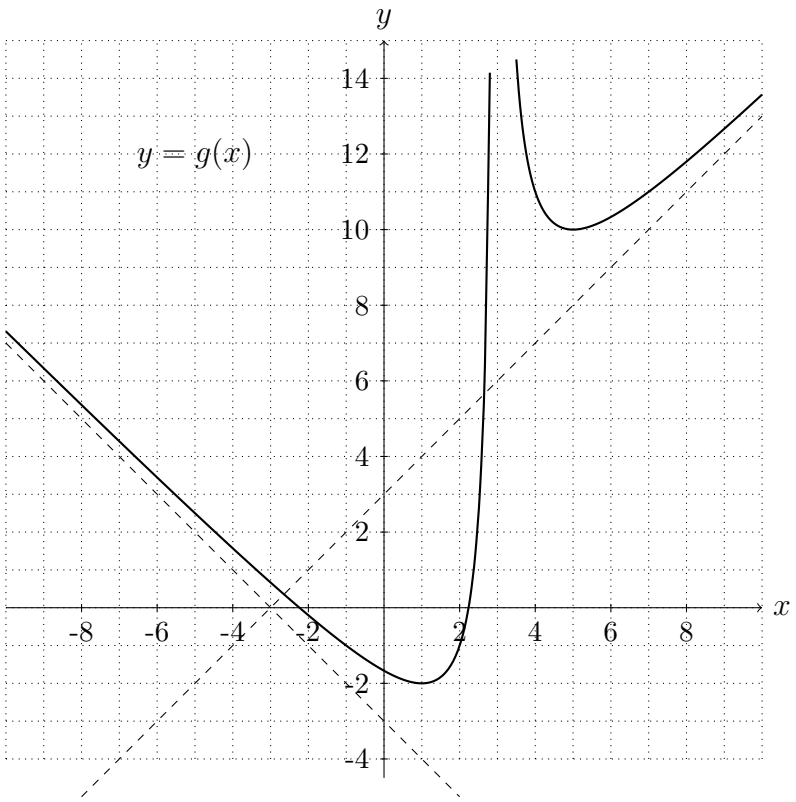
   Además tenemos una asíntota vertical en $x = 3$ pues

$$\lim_{x \to 3} g(x) = +\infty.$$

Para buscar asíntotas oblicuas, podemos usar el método aprendido en clase, o podemos notar que otra forma de escribir $g(x) = \frac{x^2-9+4}{|x-3|}$ es

$$g(x) = \begin{cases} -x - 3 - \frac{4}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ x + 3 + \frac{4}{x-3} & \text{si } x > 3. \end{cases}$$

De esta forma es claro que la recta de ecuación $y = -x - 3$ es asíntota oblicua hacia $-\infty$ y la recta de ecuación $y = x + 3$ es asíntota oblicua hacia $+\infty$.



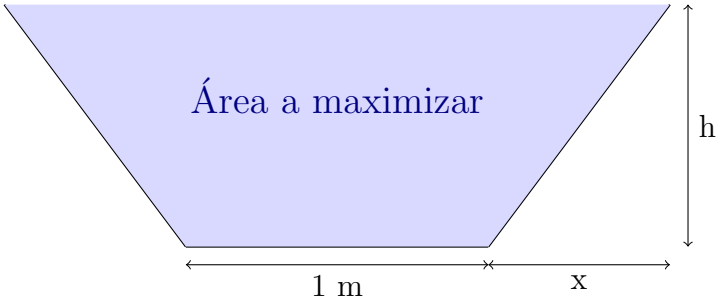
Puntaje:

- Calcula y factoriza primera derivada [5 ptos]
- Calcula segunda derivada [5 ptos]
- Dibuja correctamente el gráfico en los dos intervalos del dominio ([-10,3), (3,10]) [10 ptos]
- Identifica y explica extremos locales ($x = 1$, $x = 5$) [10 ptos]
- Determina concavidad y justifica que no hay puntos de inflexión. [5 ptos]
- Describe correctamente la asíntota vertical (en $x = 3$) [5 ptos]
- Analiza asíntotas oblicuas (en $y = -x - 3$ para $x < 3$, $y = x + 3$ para $x > 3$) [10 ptos]
- Usa correctamente derivadas y límites para sustentar el análisis [10 ptos]

2. Se desea construir un canal cuya sección transversal sea un trapecio isósceles, como el mostrado en la figura, utilizando una lámina metálica de 3 metros de ancho. El canal debe tener una base horizontal de exactamente 1 metro de ancho, y los dos lados inclinados deben formarse a partir del resto de la lámina (1 metro cada uno).

¿Cuál debe ser la forma del trapecio para que el **área de la sección transversal** del canal sea máxima?

Solución: Consideremos que la base superior del trapecio mide $1 + 2x$ y que la altura es h.



Por Pitágoras,

$$x^2 + h^2 = 1.$$

El área del trapecio es

$$A = \frac{1}{2}(1 + 1 + 2x)h = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$$

Para que el problema tenga sentido, x debe ser positivo y menor a 1 por lo que el dominio de A es $[0, 1]$.

Derivemos para encontrar puntos críticos.

$$A'(x) = \sqrt{1 - x^2} + (1 + x)\frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}(1 - x^2 - x - x^2)$$

Debemos resolver la ecuación

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

La solución positiva es

$$x = \frac{1}{2}$$

Ahí, $A(\frac{1}{2}) = \frac{3\sqrt{3}}{4} > 1$. Comparando con los valores en los extremos vemos que este es el máximo absoluto de la función en el intervalo.

Al conocer la medida de la base superior del trapecio isósceles, tenemos su forma.

NOTA:

Se puede considerar el ángulo exterior θ que se forma al doblar la lámina y calcular el área en función de este.

Una base del trapecio mide 1 y la otra $1 + 2\cos(\theta)$. La altura del trapecio es $\operatorname{sen}(\theta)$. Ahora podemos expresar el área como función de θ.

$$A(\theta) = (1 + \cos(\theta)) \cdot \operatorname{sen}(\theta).$$

El dominio es $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calculamos la derivada para encontrar puntos críticos.

$$A'(\theta) = -\operatorname{sen}^2(\theta) + (1 + \cos(\theta))\cos(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 + \cos(\theta)$$

Usando una variable auxiliar $x = \cos(\theta)$, debemos resolver

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Acá llegamos a la situación de la solución anterior por lo que $x = \frac{1}{2}$ y $\theta = \frac{\pi}{3}$ para maximizar el área.

Puntaje:

- Plantea las variables y la relación entre ellas ($x^2 + h^2 = 1$ o $h = \operatorname{sen}\theta$) [12 ptos]
- Expresa el área en términos apropiados ($A = (1+x)\sqrt{1-x^2}$, o en función del ángulo) [12 ptos]
- Deriva y encuentra puntos críticos correctamente [12 ptos]
- Justifica que el punto crítico ($x = \frac{1}{2}$ o $\theta = \frac{\pi}{6}$) corresponde al máximo. [12 ptos]
- Interpreta y presenta correctamente la forma óptima del trapecio [12 ptos]

3. Determine una región cuya área sea igual al límite dado, identificándolo como una suma de Riemann.

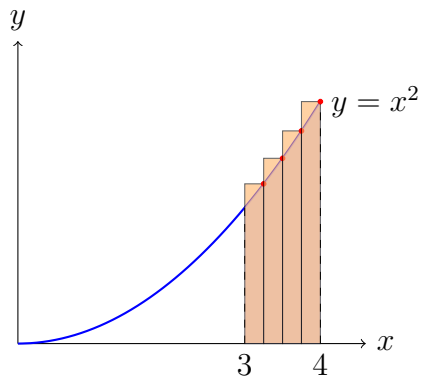
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9n^2 + 6kn + k^2}{n^3}$$

Evalúe la suma de Riemann para $n = 4$ y grafique los rectángulos correspondientes junto a la región determinada.

Solución: Reescribiendo la suma tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{9n^2 + 6kn + k^2}{n^3} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(3 + \frac{k}{n})^2$$

Esta suma se puede identificar con una suma de Riemann con n intervalos para la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[3, 4]$.



Cuando $n = 4$, la suma es

$$\sum_{k=1}^{4} \frac{144 + 24k + k^2}{64} = \frac{576 + 240 + 30}{64} = \frac{423}{32}$$

Puntaje:

- Reescribe correctamente la suma de Riemann y asocia con función en intervalo ($[3, 4]$, $[1, 2]$ u otro intervalo acorde a la función interpretada.) [20 ptos]

- Identifica correctamente la función ($f(x) = x^2$ o $f(x) = (x+3)^2$) y grafica la región correspondiente. [20 ptos]
- Calcula el valor de la suma para $n = 4$ correctamente. [10 ptos]
- Grafica correctamente los rectángulos en relación a la región bajo la curva. [10 ptos]

4. Calcule los siguientes límites

(a)
$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_x^0 \operatorname{sen}(t^2)dt}{x^3}$$

Solución:

(a) Como el límite es de la forma 1^∞, veremos si podemos usa la regla de l'Hôpital con el logaritmo de la función. Si $f(x) = (2-x)^{\tan(\frac{\pi x}{2})}$, entonces

$$\ln(f(x)) = \tan(\frac{\pi x}{2})\ln(2-x) = \frac{\ln(2-x)\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}{\cos(\frac{\pi x}{2})}$$

Ahora $\lim_{x\to 1}\ln(2-x)\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) = 0$ y $\lim_{x\to 1}\cos(\frac{\pi x}{2}) = 0$ por lo que veremos si el límite del cociente de las derivadas converge.

$$\frac{-\frac{1}{2-x}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + \frac{\pi}{2}\ln(2-x)\cos(\frac{\pi x}{2})}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})}$$

Como el límite existe, podemos usar la regla de l'Hôpital y deducir que

$$\lim_{x\to 1}\tan(\frac{\pi x}{2})\ln(2-x) = \lim_{x\to 1}\frac{-\frac{1}{2-x}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2}) + \frac{\pi}{2}\ln(2-x)\cos(\frac{\pi x}{2})}{-\frac{\pi}{2}\operatorname{sen}(\frac{\pi x}{2})} = \frac{-1}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}$$

Finalmente
$$\lim_{x\to 1}(2-x)^{\tan(\frac{\pi x}{2})} = e^{\frac{2}{\pi}}$$

(b) Como $\operatorname{sen}(t^2)$ es una función continua, sabemos que es integrable y que

$$\lim_{x\to 0}\int_x^0 \operatorname{sen}(t^2)dt = \int_0^0 \operatorname{sen}(t^2)dt = 0.$$

Además
$$\lim_{x\to 0} x^3 = 0.$$

Calculemos las derivadas. Escribamos

$$f(x) = \int_x^0 \operatorname{sen}(t^2)dt = -\int_0^x \operatorname{sen}(t^2)dt$$

Por TFC,
$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x^2)$$

Consideremos ahora (límite conocido)

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x^2)}{3x^2} = -\frac{1}{3}$$

Por l'Hôpital concluimos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_x^0 \operatorname{sen}(t^2)dt}{x^3} = -\frac{1}{3}.$$

Puntaje:

- *a*) Justifica la forma indeterminada 1^∞ [8 ptos]
- Plantea correctamente el uso de logaritmos y L'Hôpital [8 ptos]
- Calcula correctamente las derivadas [7 ptos]
- Obtiene el límite correcto [7 ptos]
- *b*) Justifica la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ [6 ptos]
- Aplica correctamente el Teorema Fundamental del Cálculo y L'Hôpital [10 ptos]
- Calcula correctamente las derivadas [7 ptos]
- Obtiene el límite correcto [7 ptos]

Instrucciones:

- Cada pregunta vale 60 puntos, las partes de una pregunta valen lo mismo.
- Justifique todas sus respuestas.
- **En caso de ser sorprendido con un celular, tablet u otro dispositivo electrónico durante la prueba, esta será evaluada con nota mínima.**
- Duración: 120 minutos.