Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 3.

FILA A

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 60 minutos

Fecha : 2 de Junio de 2017

1. Exprese el límite:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\sqrt{3n}+\cdots+\sqrt{n^2}}{n^2}\right)$$

como una integral definida y luego calcúlela.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\sqrt{3n}+\cdots+\sqrt{n^2}}{n^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}+\sqrt{2n}+\sqrt{3n}+\cdots+\sqrt{n^2}}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\sqrt{n}}{n}+\frac{\sqrt{2n}}{n}+\frac{\sqrt{3n}}{n}+\cdots+\frac{\sqrt{n^2}}{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+\sqrt{\frac{3}{n}}+\cdots\sqrt{\frac{n}{n}}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{k}{n}}$$

$$= \int_0^1 \sqrt{x}\,dx$$

$$= \frac{2}{3}\left(x^{3/2}\Big|_0^1\right) = \frac{2}{3}.$$

2. Demuestre que la función

$$F(x) = \int_{2x}^{6x} \frac{1}{t}\, dt$$

es constante en $(0, \infty)$.

Solución

$$F(x) = \int_{0}^{6x} \frac{1}{t}\, dt - \int_{0}^{2x} \frac{1}{t}\, dt$$

Por lo tanto al derivar tenemos que:

$$f'(x) = 6\frac{1}{6x} - 2\frac{1}{2x} = 0$$

Por lo tanto la función $F(x) =$ es función constante en $(0, \infty)$.

3. La función $f''(x)$ donde $f(x) = \int_0^x \left(\int_0^u \cos(t^3)\, dt \right) du$ es:

   a) $-\operatorname{sen}(x^3)$

   b) $\cos(x^3)3x^2$

   c) $-\operatorname{sen}(x^3)3x^2$

   d) $\cos(x^3)$ **Respuesta Correcta**

   e) Ninguna de las anteriores.

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 3.

FILA B

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 60 minutos

Fecha :2 de Junio de 2017

1. Exprese el límite

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^3}+\frac{(n+2)^2}{n^3}+\frac{(n+3)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n+n)^2}{n^3}\right)$$

como una integral definida y luego calcúlela.

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)^2}{n^3}+\frac{(n+2)^2}{n^3}+\frac{(n+3)^2}{n^3}+\cdots+\frac{(n+n)^2}{n^3}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{(n+1)^2}{n^2}+\frac{(n+2)^2}{n^2}+\frac{(n+3)^2}{n^2}+\cdots+\frac{(n+n)^2}{n^2}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(\frac{(n+1)}{n}\right)^2+\left(\frac{(n+2)}{n}\right)^2+\left(\frac{(n+3)}{n}\right)^2+\cdots+\left(\frac{(n+n)}{n}\right)^2\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\left(1+\frac{3}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2$$

$$=\int_1^2 x^2\,dx$$

$$\frac{1}{3}\left(x^3\Big|_1^2\right)=\frac{7}{3}$$

2. Demuestre que la función $G(x) = \int_{2x}^{5x} \frac{1}{t}\, dt$ es constante en $(0, \infty)$.

Solución

Tenemos que

$$G(x) = \int_0^{5x} \frac{1}{t}\, dt - \int_0^{2x} \frac{1}{t}\, dt$$

Luego, derigando tenemos:

$$G'(x) = 5\frac{1}{5x} - 2\frac{1}{2x} = 0.$$

Por lo tanto $G(x)$ es función constante en $(0, \infty)$.

3. La función $f''(x)$ si $f(x) = \int_0^x \left(\int_0^u \text{sen}(t^2)\, dt \right) du$ es:

   es:

   a) $\cos(x^2$

   b) $\text{sen}(x^2)2x$

   c) $\text{sen}(x^2)$ **Respuesta Correcta**

   d) $\cos(x^2)2x$

   e) Ninguna de las anteriores.

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.