Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2018

A

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+5x}$

   Solución:
   Al amplificar por $\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+5x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2+3x} + \sqrt{x^2+5x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-x\left(\sqrt{1+3/x} + \sqrt{1+5/x}\right)} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por amplificar adecuadamente.
(1 punto) Por sacar adecuadamente $-x$ de la raíz.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

   b) $\lim_{x\to\pi} \frac{\text{sen}(3x)}{\pi - x}$
   Solución:
   Haciendo el cambio de variable $t = 3(\pi - x)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{\text{sen}(3x)}{\pi - x} &= \lim_{t\to 0} \frac{3\text{sen}(3\pi - t)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{3\text{sen}(t)}{t} \\ &= 3\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por hacer cambio de variable adecuado.
(1 punto) Por usar propiedades que conviertan el límite a límites fundamentales.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

2. a) Demuestre que la ecuación $\cos(x) = x^2 - x$ tiene una solución positiva.

Solución:

Sea $h(x) = x^2 - x - \cos(x)$, observe que h es continua en $[0, 2]$ ya que es suma de funciones continuas en todo los reales.

Por otro lado tenemos que $h(0) = -1 < 0$ y que $h(2) = 2 - \cos(2) > 0$, por lo tanto el TVI implica que existe $c \in (0, 2)$ tal que $h(c) = 0$ obteniendo que c es una raíz positiva de la ecuación.

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por definir h y justificar la continuidad.

(1 punto) Por establecer el intervalo y verificar el resto de las hipótesis del TVI.

(1 punto) Por concluir la respuesta usando el TVI.

b) Sea $f(x) = x - |2x + 3|$, use la definición de derivada para calcular $f'(1)$.

Solución

Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f'(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{x - |2x + 3| + 4}{x - 1} \end{aligned}$$

como cerca de $x = 1$ la expresión $2x + 3$ es positivo, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to 1} \frac{x - (2x + 3) + 4}{x - 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{1 - x}{x - 1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por escribir la definición de $f'(1)$.

(1 punto) Por desarrollar el límte justificando como queda el valor absoluto.

(1 punto) Por concluir que $f'(1) = -1$

NOTA Acá el alumno podría resolverlo sin usar límite, **Justificando** que la función cerca de 1 la función es $-x - 3$ y por lo tanto la pendiente es -1 obteniendo 3 puntos. Sin la justificación obtendría 2 puntos.

B

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x$

   Solución:
   Al amplificar por $\sqrt{x^2+x+1}-x$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1}+x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+1/x)}{-x\left(\sqrt{1+1/x+1/x^2}+1\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por amplificar adecuadamente.
(1 punto) Por sacar adecuadamente $-x$ de la raíz.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

   b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(2x)}{2x-\pi}$

   Solución:
   Haciendo el cambio de variable $t = 2x-\pi$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\tan(2x)}{2x-\pi} &= \lim_{t\to0} \frac{\tan(t+\pi)}{t} \\ &= \lim_{t\to0} \frac{\tan(t)}{t} \\ &= \lim_{t\to0} \frac{\operatorname{sen}(t)}{\cos(t)t} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por hacer cambio de variable adecuado.
(1 punto) Por usar propiedades que conviertan el límite a límites fundamentales.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

2. a) Demuestre que la ecuación $\text{sen}(x) = x^2 - x$ tiene una solución positiva.

Solución:
Sea $h(x) = x^2 - x - \text{sen}(x)$, observe que h es continua en $[1, 2]$ ya que es suma de funciones continuas en todo los reales.

Por otro lado tenemos que $h(1) = -\text{sen}(1) < 0$ y que $h(2) = 2 - \text{sen}(2) > 0$, por lo tanto el TVI implica que existe $c \in (1, 2)$ tal que $h(c) = 0$ obteniendo que c es una raíz positiva de la ecuación.

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por definir h y justificar la continuidad.

(1 punto) Por establecer el intervalo y verificar el resto de las hipótesis del TVI.

(1 punto) Por concluir la respuesta usando el TVI.

b) Sea $f(x) = |x + 3| - 1$, use la definición de derivada para calcular $f'(2)$.

Solución
Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{|x + 3| - 1 - 4}{x - 2} \end{aligned}$$

como cerca de $x = 2$ la expresión $x + 3$ es positivo, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to 1} \frac{x - 2}{x - 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por escribir la definición de $f'(2)$.

(1 punto) Por desarrollar el límte justificando como queda el valor absoluto.

(1 punto) Por concluir que $f'(2) = 1$

NOTA Acá el alumno podría resolverlo sin usar límite, **Justificando** que la función cerca de 2 la función es $x + 2$ y por lo tanto la pendiente es 1 obteniendo 3 puntos. Sin la justificación obtendría 2 puntos.

C

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x+5$

   Solución:
   Al amplificar por $\sqrt{x^2+2x}-(x+5)$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+2x}+x+5 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-8x-25}{\sqrt{x^2+2x}-(x+5)} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x(8+25/x)}{-x\left(\sqrt{1+2/x}+(1+5/x)\right)} \\ &= 4\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por amplificar adecuadamente.
(1 punto) Por sacar adecuadamente $-x$ de la raíz.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

   b) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{sen}(x)-1}{2x-\pi}$

   Solución:
   Haciendo el cambio de variable $t = x-\pi/2$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)-1}{2x-\pi} &= \lim_{t\to0} \frac{\operatorname{sen}(t+\pi/2)-1}{2t} \\ &= \lim_{t\to0} \frac{\cos(t)-1}{2t} \\ &= 0\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por hacer cambio de variable adecuado.
(1 punto) Por usar propiedades que conviertan el límite a límites fundamentales.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

2. a) Demuestre que la ecuación $\ln(x) = x^2-2$ tiene una solución positiva.
   Solución:

Sea $h(x) = x^2 - 2 - \ln(x)$, observe que h es continua en $[1, e]$ ya que es suma de funciones continuas en todo los reales.

Por otro lado tenemos que $h(1) = -1 < 0$ y que $h(e) = e^2 - 3 > 0$, por lo tanto el TVI implica que existe $c \in (1, e)$ tal que $h(c) = 0$ obteniendo que c es una raíz positiva de la ecuación.

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por definir h y justificar la continuidad.

(1 punto) Por establecer el intervalo y verificar el resto de las hipótesis del TVI.

(1 punto) Por concluir la respuesta usando el TVI.

b) Sea $f(x) = 2 + |3x - 1|$, use la definición de derivada para calcular $f'(2)$.

Solución

Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2 + |3x - 1| - 7}{x - 2} \end{aligned}$$

como cerca de $x = 2$ la expresión $3x - 1$ es positiva, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to 1} \frac{2 + 3x - 1 - 7}{x - 2} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{3(x - 2)}{x - 2} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por escribir la definición de $f'(2)$.

(1 punto) Por desarrollar el límte justificando como queda el valor absoluto.

(1 punto) Por concluir que $f'(2) = 3$

NOTA Acá el alumno podría resolverlo sin usar límite, **Justificando** que la función cerca de 2 la función es $3x + 1$ y por lo tanto la pendiente es 3 obteniendo 3 puntos. Sin la justificación obtendría 2 puntos.

D

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x}+3x$

   Solución:
   Al amplificar por $\sqrt{9x^2+x}-3x$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{9x^2+x}+3x &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{9x^2+x}-3x}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\left(\sqrt{9+1/x}+3\right)}\\ &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por amplificar adecuadamente.
(1 punto) Por sacar adecuadamente $-x$ de la raíz.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

   b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(2x)}{x-\frac{\pi}{2}}$

   Solución:
   Haciendo el cambio de variable $t=2x-\pi$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\text{sen}(2x)}{x-\frac{\pi}{2}} &= \lim_{t\to0} \frac{2\text{sen}(t+\pi)}{t}\\ &= \lim_{t\to0} \frac{-2\text{sen}(t)}{t}\\ &= -2\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por hacer cambio de variable adecuado.
(1 punto) Por usar propiedades que conviertan el límite a límites fundamentales.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

2. a) Demuestre que la ecuación $\ln(x)=2-x$ tiene una solución positiva.

   Solución:

Sea $h(x) = \ln(x) + x - 2$, observe que h es continua en $[1, e]$ ya que es suma de funciones continuas en todo los reales.

Por otro lado tenemos que $h(1) = -1 < 0$ y que $h(e) = e - 1 > 0$, por lo tanto el TVI implica que existe $c \in (1, e)$ tal que $h(c) = 0$ obteniendo que c es una raíz positiva de la ecuación.

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por definir h y justificar la continuidad.

(1 punto) Por establecer el intervalo y verificar el resto de las hipótesis del TVI.

(1 punto) Por concluir la respuesta usando el TVI.

b) Sea $f(x) = 2 - 3|x + 5|$, use la definición de derivada para calcular $f'(-1)$.

Solución

Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2 - 3|x + 5| + 10}{x + 1} \end{aligned}$$

como cerca de $x = -1$ la expresión $x + 5$ es positivo, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to 1} \frac{-3 - 3x}{x + 1} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{-3(x + 1)}{x + 1} \\ &= -3 \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por escribir la definición de $f'(-1)$.

(1 punto) Por desarrollar el límte justificando como dejar el valor absoluto.

(1 punto) Por concluir que $f'(-1) = -3$

NOTA Acá el alumno podría resolverlo sin usar límite, **Justificando** que la función cerca de -1 la función es $-13 - 3x$ y por lo tanto la pendiente es -3 obteniendo 3 puntos. Sin la justificación obtendría 2 puntos.

E

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+3x}$

   Solución:
   Al amplificar por $\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+3x}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+x+1} - \sqrt{x^2+3x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x+1}{\sqrt{x^2+x+1} + \sqrt{x^2+3x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{-x(2-1/x)}{-x\left(\sqrt{1+1/x+1/x^2} + \sqrt{1+3/x}\right)} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por amplificar adecuadamente.
(1 punto) Por sacar adecuadamente $-x$ de la raíz.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

   b) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2x-\pi}$

   Solución:
   Haciendo el cambio de variable $t = x - \pi/2$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{2x-\pi} &= \lim_{t\to 0} \frac{\cos(t+\pi/2)}{2t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{-\text{sen}(t)}{2t} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por hacer cambio de variable adecuado.
(1 punto) Por usar propiedades que conviertan el límite a límites fundamentales.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

2. a) Demuestre que la ecuación $e^x = 2 - x^2$ tiene una solución positiva.

   Solución:

Sea $h(x) = e^x + x^2 - 2$, observe que h es continua en $[0, 1]$ ya que es suma de funciones continuas en todo los reales.

Por otro lado tenemos que $h(0) = -1 < 0$ y que $h(1) = e - 1 > 0$, por lo tanto el TVI implica que existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$ obteniendo que c es una raíz positiva de la ecuación.

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por definir h y justificar la continuidad.

(1 punto) Por establecer el intervalo y verificar el resto de las hipótesis del TVI.

(1 punto) Por concluir la respuesta usando el TVI.

b) Sea $f(x) = 3x + |1 - x|$, use la definición de derivada para calcular $f'(-3)$.

Solución

Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f'(-3) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{3x + |1 - x| + 5}{x + 3} \end{aligned}$$

como cerca de $x = -3$ la expresión $1 - x$ es positivo, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to 1} \frac{2x + 6}{x + 3} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2(x + 3)}{x + 3} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por escribir la definición de $f'(-3)$.

(1 punto) Por desarrollar el límte justificando como queda el valor absoluto.

(1 punto) Por concluir que $f'(-3) = 2$

NOTA Acá el alumno podría resolverlo sin usar límite, **Justificando** que la función cerca de -3 la función es $2x + 1$ y por lo tanto la pendiente es 2 obteniendo 3 puntos. Sin la justificación obtendría 2 puntos.

F

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+7x} - \sqrt{x^2+6x}$

   Solución:
   Al amplificar por $\sqrt{x^2+7x} + \sqrt{x^2+6x}$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+7x} - \sqrt{x^2+6x} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+7x} + \sqrt{x^2+6x}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{-x\left(\sqrt{1+7/x} + \sqrt{1+6/x}\right)} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por amplificar adecuadamente.
(1 punto) Por sacar adecuadamente $-x$ de la raíz.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

   b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\tan(3x)}{x-\pi}$
   Solución:
   Haciendo el cambio de variable $t = 3x - 3\pi$ obtenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{\tan(3x)}{x-\pi} &= \lim_{t\to0} \frac{3\tan(t+3\pi)}{t} \\ &= \lim_{t\to0} \frac{3\text{sen}(t)}{\cos(t)t} \\ &= 3\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

(1 punto) Por hacer cambio de variable adecuado.
(1 punto) Por usar propiedades que conviertan el límite a límites fundamentales.
(1 punto) Por calcular el valor del límite.

2. a) Demuestre que la ecuación $e^x = 3 - 2x$ tiene una solución positiva.
   Solución:
   Sea $h(x) = e^x + 2x - 3$, observe que h es continua en $[0,1]$ ya que es suma de funciones continuas en todo los reales.

Por otro lado tenemos que $h(0) = -2 < 0$ y que $h(1) = e - 1 > 0$, por lo tanto el TVI implica que existe $c \in (0, 1)$ tal que $h(c) = 0$ obteniendo que c es una raíz positiva de la ecuación.

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por definir h y justificar la continuidad.

(1 punto) Por establecer el intervalo y verificar el resto de las hipótesis del TVI.

(1 punto) Por concluir la respuesta usando el TVI.

b) Sea $f(x) = 2x + |1 - x|$, use la definición de derivada para calcular $f'(-2)$.

Solución

Por definición tenemos que

$$\begin{aligned} f'(-2) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(-2)}{x + 2} \\ &= \lim_{x \to 1} \frac{2x + |1 - x| + 1}{x + 2} \end{aligned}$$

como cerca de $x = -2$ la expresión $1 - x$ es positivo, tenemos que

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \to 1} \frac{x + 2}{x + 2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

(1 punto) Por escribir la definición de $f'(-2)$.

(1 punto) Por desarrollar el límte justificando como dejar el valor absoluto.

(1 punto) Por concluir que $f'(-2) = 1$

NOTA Acá el alumno podría resolverlo sin usar límite, **Justificando** que la función cerca de -2 la función es $x + 1$ y por lo tanto la pendiente es 1 obteniendo 3 puntos. Sin la justificación obtendría 2 puntos.