PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

Ayudantía 9- MAT1610

1. Considere la función $y = \sqrt[3]{x^2(6-x)}$ y determine, si existen: valores críticos, intervalos donde es creciente, intervalos donde es decreciente, mínimos locales, máximos locales, intervalos donde es cóncava hacia arriba, intervalos donde es cóncava hacia abajo, puntos de inflexión, asíntotas. A partir de la información obtenida, grafique la curva asociada.
Dominio: $\mathbb{R}$
Solución:
Derivada: (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)

$$f'(x) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}\,(6-x)^{\frac{2}{3}}}$$

Valores críticos:
Valores donde $f'(x) = 0$: $x = 4$
Valores del dominio donde $f'(x)$ no existe: $x = 0$ y $x = 6$.

Estudio signo de la derivada
$(6-x)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{6-x}\right)^2 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.
$x^{\frac{1}{3}}$ tiene el mismo signo de x.

Intervalo	$x^{\frac{1}{3}}$	$4-x$	f'	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	decreciente
$(0, 4)$	+	+	+	creciente
$(4, 6)$	+	-	-	decreciente
$(6, \infty)$	+	-	-	decreciente

Intervalos donde f es creciente: $(0, 4)$
Intervalos donde f es decreciente: $(-\infty, 0)$, $(4, 6)$ y $(6, \infty)$
$f(0) = 0$ es un mínimo local de f.
$f(4) = 2\sqrt[3]{4}$ es un máximo local de f.
Nota: En $x = 6$, no hay cambio de monotonía, no se alcanza valor extremo. (En $(6, 0)$ la recta tangente es vertical)

Estudio signo de la segunda derivada
$f''(x) = \dfrac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$ (el cálculo se muestra al final de l ejercicio)
$x^{\frac{4}{3}} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^4 \geq 0$, no define signo de $f'(x)$.

$(6-x)^{\frac{5}{3}}$ tiene el mismo signo de $6-x$.

Intervalo	-8	$(6-x)^{\frac{5}{3}}$	f''	f
$(-\infty, 0)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(0, 4)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(4, 6)$	-	+	-	cóncava hacia abajo
$(6, \infty)$	-	-	+	cóncava hacia arriba

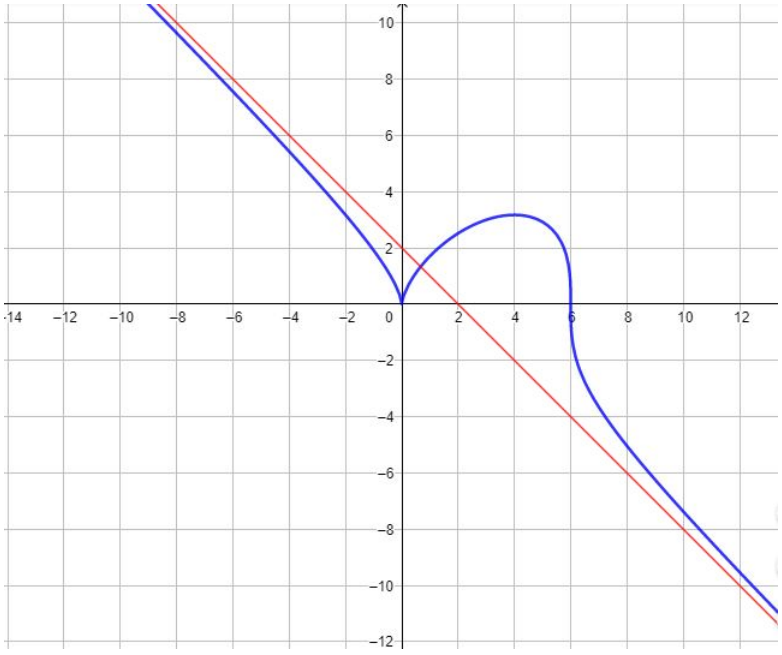
Intervalos donde f es cóncava hacia arriba: $(6, \infty)$
Intervalos donde f es cóncava hacia abajo: $(-\infty, 0)$, $(0, 4)$ y $(4, 6)$
Punto inflexión: $(6, 0)$

Asíntotas:
Vertical: No tiene
Horizontal: No tiene, ya que
$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty} x^2(6-x)} = -\infty$ (no finito)
$\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to-\infty} x^2(6-x)} = \infty$ (no finito)
Oblicua: $y = mx + b$
$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{x^2(6-x)}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{6x^2-x^3}{x^3}} = \sqrt[3]{\lim_{x\to\infty} \frac{6}{x} - 1} = -1$

$$
\begin{aligned}
b &= \lim_{x\to\infty} f(x) - mx \\
&= \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2(6-x)} - (-1)x \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{(x^2(6-x)+x^3)}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6x^2}{\left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)^2 - x\sqrt[3]{x^2(6-x)} + x^2} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\frac{\sqrt[3]{36x^4-12x^5+x^6}}{x^2} - \frac{\sqrt[3]{x^2(6-x)}}{x} + 1} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\frac{36}{x^2} - \frac{12}{x} + 1} - \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} + 1} \\
&= \frac{6}{1-(-1)+1} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Ecuación: $y = -x + 2$
Nota: La asíntota oblicua hacia $-\infty$ tambi[en es la recta $y = -x + 2$ (dejar de ejercicio a los estudiantes)

Cálculo primera derivada



$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt[3]{x^2(6-x)}\right)' \\ &= \frac{1}{3}\left(x^2(6-x)\right)^{-\frac{2}{3}}\left(x^2(6-x)\right)' \\ &= \frac{2x(6-x)-x^2}{3\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{x(4-x)}{\left(x^2(6-x)\right)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}} \end{aligned}$$

Cálculo Segunda derivada:
Sea $w = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}$
Entonces,
$\ln(w) = \ln(4-x) - \frac{1}{3}\ln(x) - \frac{2}{3}\ln(6-x)$
Así
$\frac{w'}{w} = -\frac{1}{4-x} - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3(6-x)} = \frac{-3x(6-x)-(4-x)(6-x)+2x(4-x)}{3x(4-x)(6-x)} = \frac{-3x(6-x)+3(4-x)(x-2)}{3x(4-x)(6-x)}$
es decir,
$\frac{w'}{w} = \frac{-x(6-x)-(4-x)(x-2)}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x(4-x)(6-x)}$
o
$w' = w\left(\frac{-8}{x(4-x)(6-x)}\right) = \frac{(4-x)}{x^{\frac{1}{3}}(6-x)^{\frac{2}{3}}}\frac{-8}{x(4-x)(6-x)} = \frac{-8}{x^{\frac{4}{3}}(6-x)^{\frac{5}{3}}}$

2. Con una lámina cuadrada de 10 cm de lado se quiere construir una caja sin tapa. Para ello, se recorta un cuadrado en cada vértice. Determine la longitud del lado del cuadrado recortado

para que el volumen de la caja sea máximo.

Solución

Sea x la longitud del lado del cuadrado a recortar en cada vértice. Note que $0 < x < 5$ (dominio) Entonces, la base(cuadrada) de la caja tiene lado de longitud $10 - 2x$ y como área $(10 - 2x)^2$ y la altura es x y, por lo tanto, el volúmen de la caja es

$$v(x) = (10 - 2x)^2 x = 100x - 40x^2 + 4x^3$$

y

$$v'(x) = 100 - 80x + 12x^2 = 4(25 - 20x + 3x^2)$$

Entonces, $v'(x) = 0$ si $25 - 20x + 3x^2 = 0$, es decir, $x = \frac{20 \pm \sqrt{400-300}}{6} = \frac{20 \pm 10}{6} = \frac{10 \pm 5}{3}$, y $x = 5$ o $x = \frac{5}{3}$. pero, $x = 5$ no está en el dominio, por lo que el valor crítico es $x = \frac{5}{3}$.
Por otro lado, $v''(x) = (4(25 - 20x + 3x^2))' = -80 + 24x$ y $v''(\frac{5}{3}) = -80 + 40 = -40 < 0$, lo cual indica que $v\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2000}{27} cm^3$ es un valor máximo del volumen. Así, la longitud del lado del cuadrado recortado para que el volumen de la caja sea máximo es $\frac{5}{3}$ cm.

3. Determine los valores de a para que

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$$

Solución

Sea $y = \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x$, entoonces

$\lim_{x\to\infty} \ln(y) = \lim_{x\to\infty} x \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)}{\frac{1}{x}}$
Note que
$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty} \frac{x-a}{x+a}\right) = \ln(1) = 0$, $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$ y
$\lim_{x\to\infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x+a}{x-a}\frac{2a}{(x+a)^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax^2}{a^2-x^2} = -2a$
Así,
$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = \lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty} e^{ln(y)} = e^{\lim_{x\to\infty} \ln(y)} = e^{-2a}$
y por lo tanto, $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x-a}{x+a}\right)^x = e$ si $e^{-2a} = e$, es decir, $-2a = 1$,o, $a = -\frac{1}{2}$.

4. Determine todos los valores de a y b de modo que

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\text{sen}(at)}{t^2} + \frac{2}{t} + b\right) = -3$$

Solución:

Observe que

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{\text{sen}(at)}{t^2} + \frac{2}{t} + b\right) = \lim_{t\to 0} \left(\frac{\text{sen}(at) + 2t + bt^2}{t^2}\right)$$

es de la forma $0/0$ independiente de los valores de a y b, por lo tanto podemos usar L'Hôpital obteniendo que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\text{sen}(at)}{t^2}+\frac{2}{t}+b\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{a\cos(at)+2+2bt}{2t}\right)$$

al detenernos en este límite observamos que el denominador tiende a cero, luego para que el límite de ese cociente exista el numerador debe tender a cero, es decir

$$\lim_{t\to 0}(a\cos(at)+2+2bt)=a+2=0$$

obteniendo que necesariamente $a=-2$, haciendo el reemplazo correspondiente tenemos que calcular el siguiente límite

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{-2\cos(-2t)+2+2bt}{2t}\right)$$

que también resulta ser de la forma $0/0$, aplicando L'Hôpital nuevamente obtenemos que

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{-2\cos(-2t)+2+2bt}{2t}\right)=\lim_{t\to 0}\left(\frac{-4\text{sen}(-2t)+2b}{2}\right)=b$$

obteniendo que $b=-3$.