Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

A

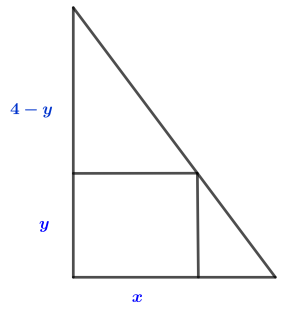
Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito en un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 3 cm y 4 cm si dos de los lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos.

   Solución:
   Observe que si los lados del rectángulo inscrito los denotamos por x e y, como lo muestra la figura adjunta, tenemos que la relación entre ellos está dada por

   $$\frac{x}{4-y} = \frac{3}{4}$$

   por lo tanto la función que modela el área del rectángulo inscrito, en función de uno de sus lados, en este caso, y, es:

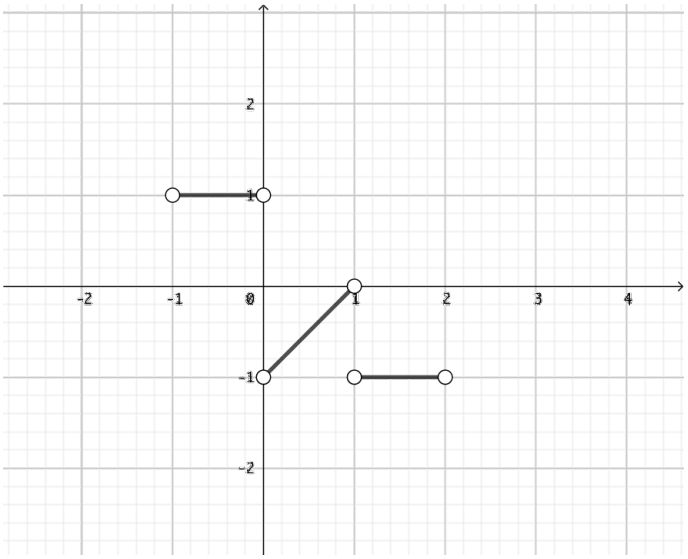
   $$A(y) = 3y - \frac{3}{4}y^2 \text{ con } y \in (0,4)$$

   Derivando, obtenemos que $A'(y) = 0$ si y sólo si $y = 2$, además $A''(y) = -\frac{3}{2}$, por lo tanto $A(2) = 3\text{cm}^2$ es el área máxima que puede tener un rectángulo inscrito en dicho triángulo.

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por la relación entre los lados del rectángulo.
   - (2 puntos) por determinar la función área en término de uno de sus lados.
   - (1 punto) por encontrar el punto crítico.
   - (1 punto) por justificar que el punto crítico encontrado se alcanza un máximo.
   - (1 punto) por responder la pregunta.

2. La figura adjunta corresponde al gráfico de $y = f(x)$, si g es una antiderivada de f que es continua en el intervalo $[-1, 2]$ y tal que $g(-1) = 3$, encuentre una fórmula para g.



Solución:
Observe que $g'(x) = 1$ en el intervalo $(-1, 0)$, por lo tanto en ese intervalo $g(x) = x + c_1$, como g es continua y $g(-1) = 3$, tenemos que en el intervalo $[-1, 0]$, la función es $g(x) = x + 4$.

Análogamente tenemos que $g'(x) = x - 1$ en el intervalo $(0, 1)$, por lo tanto en este intervalo $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + c_2$, como g es continua tenemos que $c_2 = 4$, luego $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 4$ en $[0, 1]$.

Finalmente tenemos que $g'(x) = -1$ en el intervalo $(1, 2)$, por lo que $g(x) = -x + c_3$ en dicho intervalo, como g es continua $c_3 = \dfrac{9}{2}$. En resumen tenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} x + 4 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + 4 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -x + \dfrac{9}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por cada una de las ramas.
- (1 punto) por cada una de las constantes.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

B

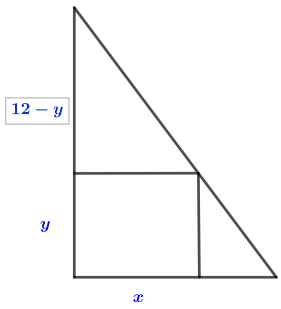
Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede ser inscrito en un triángulo rectángulo con catetos de longitudes 5 cm y 12 cm si dos de los lados del rectángulo se encuentran a lo largo de los catetos.

   Solución:
   Observe que si los lados del rectángulo inscrito los denotamos por x e y, como lo muestra la figura adjunta, tenemos que la relación entre ellos está dada por

$$\frac{x}{12-y} = \frac{5}{12}$$



   por lo tanto la función que modela el área del rectángulo inscrito, en función de uno de sus lados, en este caso, y, es:

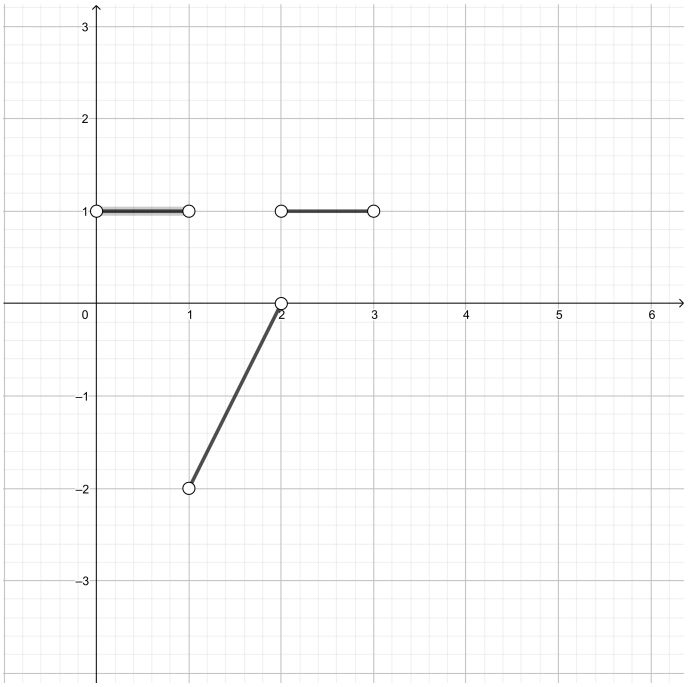
$$A(y) = 5y - \frac{5}{12}y^2 \text{ con } y \in (0, 12)$$

   Derivando, obtenemos que $A'(y) = 0$ si y sólo si $y = 6$, además $A''(y) = -\frac{5}{6}$, por lo tanto $A(6) = 15\text{cm}^2$ es el área máxima que puede tener un rectángulo inscrito en dicho triángulo.

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por la relación entre los lados del rectángulo.
   - (2 puntos) por determinar la función área en término de uno de sus lados.
   - (1 punto) por encontrar el punto crítico.
   - (1 punto) por justificar que el punto crítico encontrado se alcanza un máximo.
   - (1 punto) por responder la pregunta.

2. La figura adjunta corresponde al gráfico de $y = f(x)$, si g es una antiderivada de f que es continua en el intervalo $[0, 3]$ y tal que $g(0) = 2$, encuentre una fórmula para g.



Solución:
Observe que $g'(x) = 1$ en el intervalo $(0, 1)$, por lo tanto en ese intervalo $g(x) = x + c_1$, como g es continua y $g(0) = 2$, tenemos que en el intervalo $[0, 1]$, la función es $g(x) = x + 2$.

Análogamente tenemos que $g'(x) = 2x - 4$ en el intervalo $(1, 2)$, por lo tanto en este intervalo $g(x) = x^2 - 4x + c_2$, como g es continua tenemos que $c_2 = 6$, luego $g(x) = x^2 - 4x + 6$ en $[1, 2]$.

Finalmente tenemos que $g'(x) = 1$ en el intervalo $(2, 3)$, por lo que $g(x) = x + c_3$ en dicho intervalo, como g es continua $c_3 = 0$. En resumen tenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ x^2 - 4x + 6 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por cada una de las ramas.
- (1 punto) por cada una de las constantes.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

C

Cálculo I- MAT1610

Control 2

1. Una caja con base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 32000 cm^3. Encuentre las dimensiones que debe tener la caja para minimizar la cantidad de material que se utiliza en su fabricación.

   Solución:
   Si denotamos por x el lado de la base y por y la altura de la caja, tenemos que la relación entre estas variables está dada por

   $$x^2 y = 32000$$

   por lo tanto la función que modela el material que se usará, en función de uno de sus lados, en este caso, x, es:

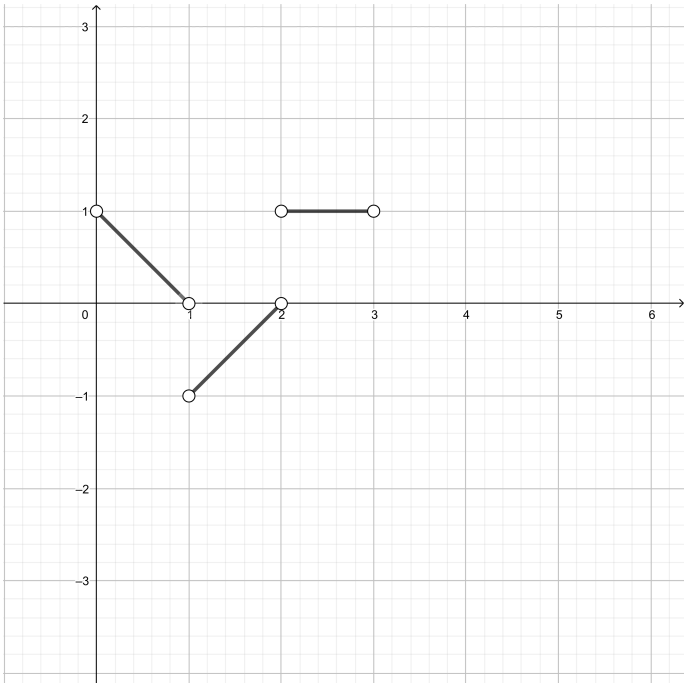
   $$A(x) = x^2 + \frac{64000}{x} \text{ con } x \in (0, \infty)$$

   Derivando, obtenemos que $A'(x) = 0$ si y sólo si $x = 10\sqrt[3]{32}$, además $A''(x) = 2 + \frac{128000}{x^3}$, por lo tanto $A(10\sqrt[3]{32})$ es el mínimo de la función y por lo tanto las dimensiones deben ser $x = 10\sqrt[3]{32}$ y altura $y = 10\sqrt[3]{32}$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por la relación entre los lados de la caja.
   - (2 puntos) por determinar la función material usado en término de uno de sus lados.
   - (1 punto) por encontrar el punto crítico.
   - (1 punto) por justificar que en el punto crítico encontrado se alcanza un mínimo.
   - (1 punto) por responder la pregunta.

2. La figura adjunta corresponde al gráfico de $y = f(x)$, si g es una antiderivada de f que es continua en el intervalo $[0, 3]$ y tal que $g(3) = 2$, encuentre una fórmula para g.



Solución:
Observe que $g'(x) = 1$ en el intervalo $(2, 3)$, por lo tanto en ese intervalo $g(x) = x + c_1$, como g es continua y $g(3) = 2$, tenemos que en el intervalo $[2, 3]$, la función es $g(x) = x - 1$.

Análogamente tenemos que $g'(x) = x - 2$ en el intervalo $(1, 2)$, por lo tanto en este intervalo $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + c_2$, como g es continua tenemos que $c_2 = 3$, luego $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3$ en $[1, 2]$.

Finalmente tenemos que $g'(x) = -x + 1$ en el intervalo $(0, 1)$, por lo que $g(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x + c_3$ en dicho intervalo, como g es continua $c_3 = 1$. En resumen tenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x^2}{2} + x + 1 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2}{2} - 2x + 3 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por cada una de las ramas.
- (1 punto) por cada una de las constantes.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

D

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

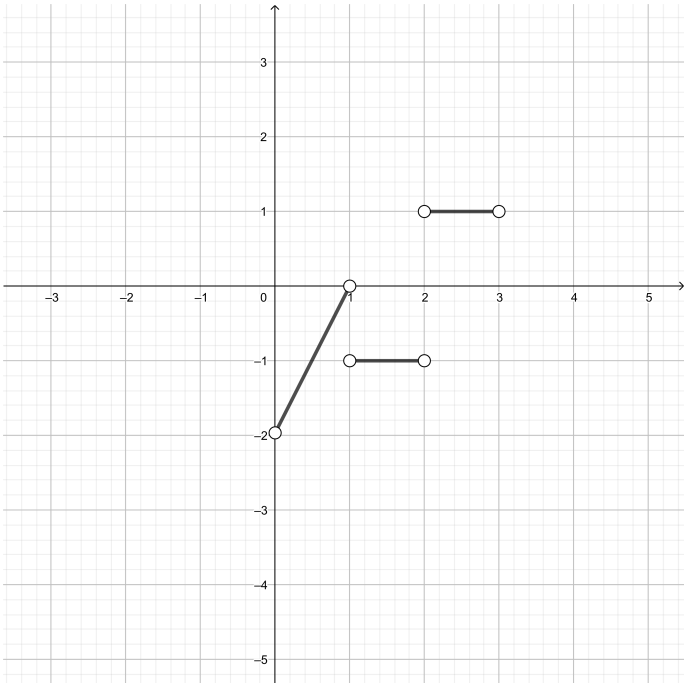
1. Una caja con base cuadrada, abierta en la parte superior, debe tener un volumen de 500cm^3. Encuentre las dimensiones que debe tener la caja para minimizar la cantidad de material que se utiliza en su fabricación.

   Solución:
   Si denotamos por x el lado de la base y por y la altura de la caja, tenemos que la relación entre estas variables está dada por
   $$x^2y = 500$$
   por lo tanto la función que modela el material que se usará, en función de uno de sus lados, en este caso, x, es:
   $$A(x) = x^2 + \frac{1000}{x} \text{ con } x \in (0, \infty)$$
   Derivando, obtenemos que $A'(x) = 0$ si y sólo si $x = \sqrt[3]{500}$, además $A''(x) = 2 + \frac{2000}{x^3}$, por lo tanto $A(\sqrt[3]{500})$ es el mínimo de la función y por lo tanto las dimensiones deben ser $x = \sqrt[3]{500}$ y altura $y = \sqrt[3]{500}$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por la relación entre los lados de la caja.
   - (2 puntos) por determinar la función material usado en término de uno de sus lados.
   - (1 punto) por encontrar el punto crítico.
   - (1 punto) por justificar que en el punto crítico encontrado se alcanza un mínimo.
   - (1 punto) por responder la pregunta.

2. La figura adjunta corresponde al gráfico de $y = f(x)$, si g es una antiderivada de f que es continua en el intervalo $[0, 3]$ y tal que $g(3) = -3$, encuentre una fórmula para g.



Solución:
Observe que $g'(x) = 1$ en el intervalo $(2, 3)$, por lo tanto en ese intervalo $g(x) = x + c_1$, como g es continua y $g(3) = -3$, tenemos que en el intervalo $[2, 3]$, la función es $g(x) = x - 6$.

Análogamente tenemos que $g'(x) = -1$ en el intervalo $(1, 2)$, por lo tanto en este intervalo $g(x) = -x + c_2$, como g es continua tenemos que $c_2 = -2$, luego $g(x) = -x - 2$ en $[1, 2]$.

Finalmente tenemos que $g'(x) = 2x - 2$ en el intervalo $(0, 1)$, por lo que $g(x) = x^2 - 2x + c_3$ en dicho intervalo, como g es continua $c_3 = -2$. En resumen tenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ -x - 2 & \text{si} \quad 1 < x < 2 \\ x - 6 & \text{si} \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por cada una de las ramas.
- (1 punto) por cada una de las constantes.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

E

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Se necesita fabricar una lata cilíndrica sin tapa de volumen 1000cm^3. Determine las dimensiones que debe tener la lata de manera que se use el menos material posible en su construcción.

   Solución:
   Si denotamos por x el radio de la base y por y la altura del cilindro, tenemos que la relación entre estas variables está dada por

   $$\pi x^2 y = 1000$$

   por lo tanto la función que modela el material que se usará, en función de uno de sus lados, en este caso, x, es:

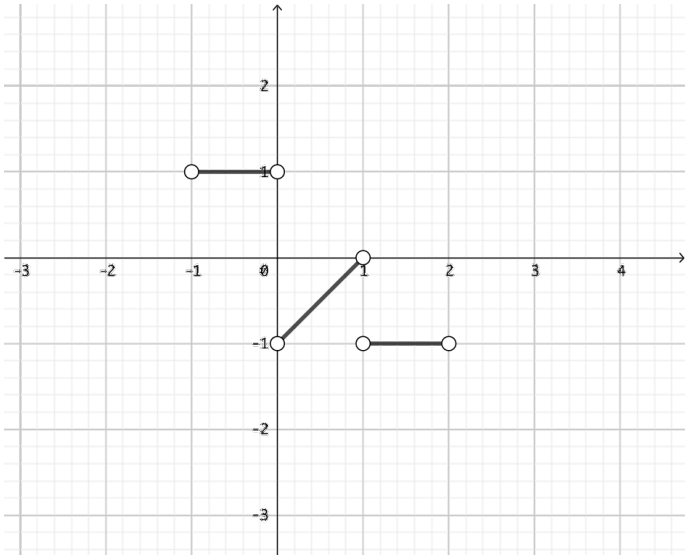
   $$A(x) = \pi x^2 + \frac{2000}{x} \text{ con } x \in (0, \infty)$$

   Derivando, obtenemos que $A'(x) = 0$ si y sólo si $x = 10\sqrt[3]{1/\pi}$, además $A''(x) = 2\pi + \frac{4000}{x^3}$, por lo tanto $A(10\sqrt[3]{1/\pi})$ es el mínimo de la función y por lo tanto las dimensiones deben ser $x = 10\sqrt[3]{1/\pi}$ de radio y altura $y = 10\sqrt[3]{1/\pi}$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por la relación entre las diemnsiones del cilíndro.
   - (2 puntos) por determinar la función material usado en término de uno de sus dimensiones.
   - (1 punto) por encontrar el punto crítico.
   - (1 punto) por justificar que en el punto crítico encontrado se alcanza un mínimo.
   - (1 punto) por responder la pregunta.

2. La figura adjunta corresponde al gráfico de $y = f(x)$, si g es una antiderivada de f que es continua en el intervalo $[-1, 2]$ y tal que $g(-1) = 1$, encuentre una fórmula para g.



Solución:
Observe que $g'(x) = 1$ en el intervalo $(-1, 0)$, por lo tanto en ese intervalo $g(x) = x + c_1$, como g es continua y $g(-1) = 1$, tenemos que en el intervalo $[-1, 0]$, la función es $g(x) = x + 2$.

Análogamente tenemos que $g'(x) = x - 1$ en el intervalo $(0, 1)$, por lo tanto en este intervalo $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + c_2$, como g es continua tenemos que $c_2 = 2$, luego $g(x) = \dfrac{x^2}{2} - x + 2$ en $[0, 1]$.

Finalmente tenemos que $g'(x) = -1$ en el intervalo $(1, 2)$, por lo que $g(x) = -x + c_3$ en dicho intervalo, como g es continua $c_3 = \dfrac{5}{2}$. En resumen tenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si} \quad -1 \leq x \leq 0 \\ \dfrac{x^2}{2} - x + 2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ -x + \dfrac{5}{2} & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por cada una de las ramas.
- (1 punto) por cada una de las constantes.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

F

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Se necesita fabricar una lata cilíndrica sin tapa de volumen 216 cm^3. Determine las dimensiones que debe tener la lata de manera que se use el menos material posible en su construcción.

   Solución:
   Si denotamos por x el radio de la base y por y la altura del cilindro, tenemos que la relación entre estas variables está dada por

   $$\pi x^2 y = 216$$

   por lo tanto la función que modela el material que se usará, en función de uno de sus lados, en este caso, x, es:

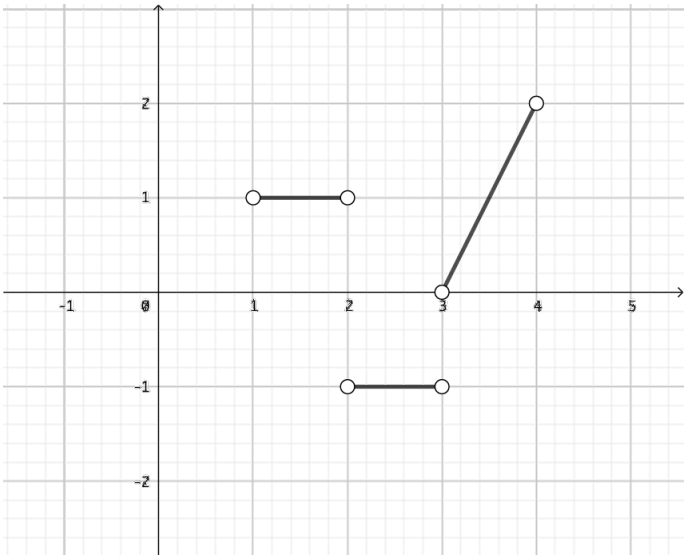
   $$A(x) = \pi x^2 + \frac{432}{x} \text{ con } x \in (0, \infty)$$

   Derivando, obtenemos que $A'(x) = 0$ si y sólo si $x = 6\sqrt[3]{1/\pi}$, además $A''(x) = 2\pi + \frac{864}{x^3}$, por lo tanto $A(6\sqrt[3]{1/\pi})$ es el mínimo de la función y por lo tanto las dimensiones deben ser $x = 6\sqrt[3]{1/\pi}$ de radio y altura $y = 6\sqrt[3]{1/\pi}$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por la relación entre las diemnsiones del cilíndro.
   - (2 puntos) por determinar la función material usado en término de uno de sus dimensiones.
   - (1 punto) por encontrar el punto crítico.
   - (1 punto) por justificar que en el punto crítico encontrado se alcanza un mínimo.
   - (1 punto) por responder la pregunta.

2. La figura adjunta corresponde al gráfico de $y = f(x)$, si g es una antiderivada de f que es continua en el intervalo $[1, 4]$ y tal que $g(4) = -2$, encuentre una fórmula para g.



Solución:
Observe que $g'(x) = 2x-6$ en el intervalo $(3, 4)$, por lo tanto en ese intervalo $g(x) = x^2-6x+c_1$, como g es continua y $g(4) = -2$, tenemos que en el intervalo $[3, 4]$, la función es $g(x) = x^2-6x+6$.

Análogamente tenemos que $g'(x) = -1$ en el intervalo $(2, 3)$, por lo tanto en este intervalo $g(x) = -x + c_2$, como g es continua tenemos que $c_2 = 0$, luego $g(x) = -x$ en $[2, 3]$.

Finalmente tenemos que $g'(x) = 1$ en el intervalo $(1, 2)$, por lo que $g(x) = x + c_3$ en dicho intervalo, como g es continua $c_3 = -4$. En resumen tenemos que:

$$g(x) = \begin{cases} x - 4 & \text{si} \quad 1 \leq x \leq 2 \\ -x & \text{si} \quad 2 < x < 3 \\ x^2 - 6x + 6 & \text{si} \quad 3 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por cada una de las ramas.
- (1 punto) por cada una de las constantes.