Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 2.

FILA A

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 45 minutos

Fecha : 30 de Septiembre de 2016

1. Demuestre que:
$$1 - \frac{a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b}{a} - 1, \quad \text{con } 0 < a < b$$

Solución
Sea $f(x) = \ln(x)$ entonces f es función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Por lo tanto podemos aplicar el Teorema del Valor Medio, lo que nos dá:

$$\frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} = \frac{1}{c},\ c \in (a, b)$$

Pero $0 < a < c < b$ por lo tanto $\frac{1}{b} < \frac{1}{c} < \frac{1}{a}$

Por lo tanto
$$\frac{1}{b} < \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a}$$

Lo que es equivalente a:

$$1 - \frac{a}{b} < \ln(b) - \ln(a) < \frac{b}{a} - 1, \quad \text{con } 0 < a < b$$

2. Sean f y g funciones derivables con dominio $\mathbb{R}$ tales que:

$$f'(x) = g(x),\ g'(x) = f(x),\ f(0) = 1 \text{ y } g(0) = 0$$

Demuestre que $h(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2$ es función constante y determine la constante.

Solución

Para ver que $h(x)$ es función constante en $\mathbb{R}$, basta con comprobar que su derivada es 0 para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2(f(x)g(x) - g(x)f(x)) = 0$$

Por lo tanto, $h(x)$ es función constante y para determinar la constante, la evaluamos en 0:

$$h(0) = (f(0))^2 - (g(0))^2 = 1 - 0 = 1$$

Por lo tanto

$$h(x) = 1,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Dada la función real $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 1$ entonces se cumple solamnete que:

   a) f es creciente en $(-\infty, -1)$ y decreciente en $(0, 2)$.

   b) f es decreciente en $(-1, 0)$ y creciente en $(2, \infty)$

   c) f convexa (es decir, cóncava hacia arriba) en $\left(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3}\right)$

   d) f tiene exactamente dos puntos de inflexión **Respuesta correcta.**

   e) Ninguna de las anteriores.

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 2.

FILA B

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 45 minutos

Fecha : 30 de Septiembre de 2016

1. Demuestre que para $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$ se cumple:

$$\operatorname{sen}(b)(a-b) < \cos(b) - \cos(a) < \operatorname{sen}(a)(a-b)$$

Solución

Sea $f(x) = \cos(x)$ entonces f es función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b).
Por lo tanto podemos aplicar el Teorema del Valor Medio, lo que nos dá:

$$\frac{\cos(b) - \cos(a)}{b-a} = -\operatorname{sen}(c),\ c \in (a, b) \subset (0, \frac{\pi}{2}$$

Pero $0 < a < c < b < \dfrac{\pi}{2}$ y como la función $\operatorname{sen}(x)$ es creciente en dicho intervalo, entonces $\operatorname{sen}(a) < \operatorname{sen}(c) < \operatorname{sen}(b)$ con lo cual tenemos que

$$-\operatorname{sen}(b) < -\operatorname{sen}(c) < sen(a)$$

Por lo tanto

$$-\operatorname{sen}(b) < \frac{\cos(b) - \cos(a)}{b-a} < -\operatorname{sen}(a)$$

Lo que es equivalente a:

$$\operatorname{sen}(b)(a-b) < \cos(b) - \cos(a) < \operatorname{sen}(a)(a-b)$$

2. Sean f y g funciones derivables con dominio $\mathbb{R}$ tales que:

$$f'(x) = g(x),\ g'(x) = f(x),\ f(0) = 2 \text{ y } g(0) = -1$$

Demuestre que $h(x) = (f(x))^2 - (g(x))^2$ es función constante y determine la constante.

Solución

Para ver que $h(x)$ es función constante en $\mathbb{R}$, basta con comprobar que su derivada es 0 para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = 2f(x)f'(x) - 2g(x)g'(x) = 2(f(x)g(x) - g(x)f(x)) = 0$$

Por lo tanto, $h(x)$ es función constante y para determinar la constante, la evaluamos en 0:

$$h(0) = (f(0))^2 - (g(0))^2 = 4 - 1 = 3$$

Por lo tanto

$$h(x) = 3,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Dada la función real $f(x) = \frac{x^4}{2} - \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 2$ entonces se cumple solamente que:

   a) f es creciente en $(-2, 0)$ y decreciente en $(1, \infty)$.

   b) f es decreciente en $(0, 1)$ y creciente en $(-\infty, -2)$

   c) f tiene exactamente dos puntos de inflexión **Respuesta correcta.**

   d) f convexa(es decir,cóncava hacia arriba) en $(\frac{1-\sqrt{7}}{3}, \frac{1+\sqrt{7}}{3})$

   e) Ninguna de las anteriores.

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.