Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2017

# MAT1610 ⋆ CÁLCULO I
# EXAMEN

1. Calcule
$$\int e^{-x} \ln(1+e^x)\, dx.$$

2. Calcule
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}\, dx.$$

3. Calcule
$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\, dx.$$

4. Calcule
$$\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2}{x^3}\, dx.$$

5. Calcule
$$\int \tan^3(x)\sec(x)\, dx.$$

6. Calcule
$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{4-\cos^2(x)}\, dx.$$

7. Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}$
$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n(x)\, dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2}(x)\, dx.$$

8. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   *a*) Si $f$ es una función continua entonces
   $$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 f(1-x)\, dx.$$

   *b*) Si $f$ una función impar y derivable entonces
   $$\int_{-4}^4 x f'(x)\, dx = 0.$$

**Una solución**

1. Para calcular la primera de las integrales, utilizaremos el método de integración por partes, para ello consideramos

$$u = \ln(1+e^x), \qquad \frac{du}{dx} = \frac{e^x}{1+e^x}$$
$$\frac{dv}{dx} = e^{-x}, \qquad v = -e^{-x}.$$

con esto obtenemos

$$\int e^{-x}\ln(1+e^x)\,dx = -e^{-x}\ln(1+e^x) + \int \frac{dx}{1+e^x}.$$

Para la segunda integral realizamos la sustitución $t = e^x$ se obtiene la primitiva pedida,

$$-e^{-x}\ln(1+e^x) + \ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right) + C.$$

**Asignación de puntaje.**

- Asignar 3 puntos por correcta utilización de la teécnica de integración.
- Asignar 3 puntos por el cálculo correcto de la primitiva. Descontar 1 punto por la ausencia de la constante de integración.

2. Para la integral definida a calcular utilizamos la sustitución

$$x = 2\cos(t), \qquad \frac{dx}{dt} = -2\,\mathrm{sen}(t),$$

con lo cual los bordes de integración resultan

$$x = 1 \longrightarrow t = \pi/3, \qquad x = 2 \longrightarrow t = 0$$

y la integral se transforma en

$$\int_0^{\pi/3} \tan^2(t)\,dt = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}.$$

**Asignación de puntaje.**

- Asignar 2 puntos por correcta utilización de la teécnica de integración.
- Asignar 1 punto por la utilizacion correcta de los bordes de integración.
- Asignar 3 puntos por el cálculo correcto de la primitiva.

3. Para calcular esta integral utilizamos el método de descomposición en fracciones parciales,

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+4},$$

resolviendo se obtiene

$$A = 1, \qquad B = 1, \qquad C = -1,$$

con lo cual

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx. = \ln(x) + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan(x/2) + C.$$

**Asignación de puntaje.**

- Asignar 3 puntos por la correcta descomposicion en fracciones parciales.
- Asignar 3 puntos por el cálculo correcto de la primitiva.

4. Para calcular la integral pedida, comenzaremos calculando la respectiva primitiva. Para ello realizamos integración por partes con

$$\begin{aligned} u &= \ln^2(x), & \frac{du}{dx} &= \frac{2\ln(x)}{x} \\ \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{x^3}, & v &= -\frac{x^{-2}}{2}, \end{aligned}$$

de donde obtenemos,

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x^3}\,dx = -\frac{\ln^2(x)}{2x^2} + \int \frac{\ln(x)}{x^3}\,dx$$

para continuar volvemos a realizar integración por partes, esta vez,

$$u = \ln(x), \qquad \frac{dv}{dx} = \frac{1}{x^3}.$$

Con lo cual

$$\int \frac{(\ln(x))^2}{x^3}\,dx = -\left(\frac{2\ln^2(x) + 2\ln(x) + 1}{4x^2}\right) + C.$$

Y por lo tanto la integral pedida es

$$\int_1^2 \frac{(\ln(x))^2}{x^3}\,dx = \frac{1}{4} - \frac{2\ln^2(2) + 2\ln(2) + 1}{16}.$$

**Asignación de puntaje.**

- Asignar 2 puntos por correcta utilización de la tećnica de integración, primera integración por partes
- Asignar 2 puntos por la segunda integración por partes.
- Asignar 2 puntos por el cálculo correcto de la primitiva.

5. Para calcular esta primitiva, comenzamos reescribiendo

$$\int \tan^3(x)\sec(x)\,dx = \int \tan(x)(\sec^2(x)-1)\sec(x)\,dx = \int (\tan(x)\sec^3(x) - \tan(x)\sec(x))\,dx$$

en la primera parte de la integral consideramos

$$u = \sec(x), \qquad \frac{du}{dx} = \sec(x)\tan(x),$$

y la segunda parte es un primitiva directa, es la derivada de $\sec(x)$, con lo cual

$$\int (\tan(x)\sec^3(x) - \tan(x)\sec(x))\,dx = \frac{1}{3}\sec^3(x) - \sec(x) + C.$$

**Asignación de puntaje.**

- Asignar 3 puntos por correcta utilización de la teécnica de integración.
- Asignar 3 puntos por el cálculo correcto de la primitiva.

6. Para esta integral realizamos la sustitución

$$u = \cos(x) \qquad \frac{du}{dx} = -\operatorname{sen}(x),$$

con lo cual se tiene

$$\int \frac{\operatorname{sen}(x)}{4-\cos^2(x)}\,dx = -\int \frac{du}{(2-u)(2+u)},$$

la cual se puede descomponer en fracciones parciales,

$$= \frac{-1}{4}\int \left(\frac{1}{2-u} + \frac{1}{2+u}\right)\,du = \frac{-1}{4}\left(\ln(|2-u|) - \ln(|2+u|)\right) + C.$$

**Asignación de puntaje.**

- Asignar 2 puntos por correcta utilización de la teécnica de integración.
- Asignar 2 puntos por la descomposición en fracciones parciales.
- Asignar 2 puntos por el cálculo correcto de la primitiva.Descontar 1 punto por la ausencia de la constante de integración.

7. Para demostrar la recurrencia pedida, comenzaremos en el lado izquierdo integrando por partes

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{sen}^{n-1}(x) & \frac{du}{dx} &= (n-1)\operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos(x), \\ v &= -\cos(x) & \frac{dv}{dx} &= \operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

con lo cual

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = -\cos(x)\operatorname{sen}^{n-1}(x) + (n-1)\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx$$

pero como $\cos^2(x) = 1 - \operatorname{sen}^(\, x)$, tenemos

$$\int \operatorname{sen}^n(x)\,dx = \frac{-1}{n}\cos(x)\operatorname{sen}^{n-1}(x) + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2}(x)\,dx.$$

Finalmente se evalúa en los bordes de integración para concluir lo pedido.
**Asignación de puntaje.**

- Asignar 3 puntos por correcta utilización de la teécnica de integración.
- Asignar 2 puntos por despejar de manera correcta la integral pedida.
- Asignar 1 punto por la utilización correcta de los bordes de integración.

8. *a*) Verdadero, para verificarlo basta considerar la sustición $u = 1 - x$.

   *b*) Verdaero, para verificarlo basta realizar integración por partes considerando

$$u = x, \qquad \frac{dv}{dx} = f'(x)$$

   y utilizando la imparidad de $f$.

**Asignación de puntaje.**

- Asignar 3 puntos por cada respuesta justifica correctamente.