Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

A

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2e^x - e^{-3x}}{e^x + 4e^{-x}}$

   Solución:

   Observe que

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2e^x - e^{-3x}}{e^x + 4e^{-x}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^x(2 - e^{-4x})}{e^x(1 + 4e^{-2x})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2 - e^{-4x}}{1 + 4e^{-2x}} \\ &= 2\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por desarrollo deálgebra de límites correcto y que lleve a la solución.
   - (1 punto) por usar que $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ o algo equivalente.
   - (1 punto) por calcular correctamente el valor.

   b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|} \operatorname{sen}(x - 1)$

   Solución:

   Observe que $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen}(x - 1) = 0$ y que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ es una función acotada en una vecindad de $x = 1$, por lo tanto del Teorema del Sandwich tenemos que

   $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} \operatorname{sen}(x - 1) = 0$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por decir que $\lim\limits_{x\to 1} \operatorname{sen}(x - 1) = 0$
   - (1 punto) por decir que $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ es una función acotada en una vecindad
   - (1 punto) por concluir, justificadamente, el valor del límite.

   NOTA: Este problema puede ser resuelto por medio de límites laterales, en talcaso asignar 1 punto a cada límite lateral y 1 punto a la conclusión.

2. Determine todos los valores de a y b para los que la función f es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{3x^3-|x+1|}{x-2} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{3x^3-|x+1|}{x-2} \\ &= \frac{1}{2} \\ &= f(0) \end{aligned}$$

por lo tanto para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

Por otra parte para que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2}$ exista es necesario que $b = \sqrt{a}$, y una vez que tenemos esta condición podemos ver que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+a}+b} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $a = b = 1$

Distribución de puntaje:

- (2 punto) Por determinar, justificadamente que f será continua en $x = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2}$.
- (2 punto) por determinar que para la existencia del límite lateral derecho $b = \sqrt{a}$.
- (1 punto) por determinar que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
- (1 punto) por deetrminar los valores de a y b.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

B

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2e^{2x}-3e^{-3x}}{2e^{x}+e^{-3x}}$

   Solución:

   Observe que

   $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{2e^{2x}-3e^{-3x}}{2e^{x}+e^{-3x}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-3x}(2e^{5x}-3)}{e^{-3x}(2e^{4x}+1)}\\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{(2e^{5x}-3)}{(2e^{4x}+1)}\\ &= -3\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por desarrollo deálgebra de límites correcto y que lleve a la solución.
   - (1 punto) por usar que $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x}=0$ o algo equivalente.
   - (1 punto) por calcular correctamente el valor.

   b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)}{|x^2-4|}\text{sen}(x-2)$

   Solución:

   Observe que $\lim\limits_{x\to 2}\text{sen}\,(x-2)=0$ y que $f(x)=\dfrac{x-2}{|x^2-4|}$ es una función acotada en una vecindad de $x=2$, por lo tanto del Teorema del Sandwich tenemos que

   $$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)}{|x^2-4|}\text{sen}(x-2)=0$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por decir que $\lim\limits_{x\to 2}\text{sen}\,(x-2)=0$
   - (1 punto) por decir que $f(x)=\dfrac{x-2}{|x^2-4|}$ es una función acotada en una vecindad
   - (1 punto) por concluir, justificadamente, el valor del límite.

   NOTA: Este problema puede ser resuelto por medio de límites laterales, en talcaso asignar 1 punto a cada límite lateral y 1 punto a la conclusión.

2. Determine todos los valores de a y b para los que la función f es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{x^3-|x+2|}{x-8} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3-|x+2|}{x-8} \\ &= \frac{1}{4} \\ &= f(0) \end{aligned}$$

por lo tanto para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \frac{1}{4}$$

Por otra parte para que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2}$ exista es necesario que $b = \sqrt{a}$, y una vez que tenemos esta condición podemos ver que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+a}+b} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $a = 4$ y $b = 2$

Distribución de puntaje:

- (2 punto) Por determinar, justificadamente que f será continua en $x = 0$ si $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{4}$.
- (2 punto) por determinar que para la existencia del límite lateral derecho $b = \sqrt{a}$.
- (1 punto) por determinar que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
- (1 punto) por deetrminar los valores de a y b.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

C

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(2x)+x}{x-\operatorname{sen}(3x)}$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)+x}{x-\operatorname{sen}(3x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(2x)/x+1}{1-\operatorname{sen}(3x)/x}\\ &= \frac{2+1}{1-3}\\ &= -3/2\end{aligned}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por desarrollo deálgebra de límites correcto y que lleve a la solución.
- (1 punto) por usar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ o algo equivalente.
- (1 punto) por calcular correctamente el valor.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)$

Solución:

Observe que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 0$ y que $f(x)=\cos(x)$ es una función acotada, por lo tanto del Teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \cos(x)\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por decir que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right) = 0$
- (1 punto) por decir que $f(x)=\cos(x)$ es una función acotada.
- (1 punto) por concluir, justificadamente, el valor del límite.

2. Determine todos los valores de a y b para los que la función f es continua en $x = 0$.

Solución:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \\ \dfrac{e^{2x}-5}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{2x}-5}{x-1} \\ &= 4 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

por lo tanto para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$$

Por otra parte para que $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2}$ exista es necesario que $b = \sqrt{a}$, y una vez que tenemos esta condición podemos ver que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+a}+b} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $a = 1/64$ y $b = 1/8$

Distribución de puntaje:

- (2 punto) Por determinar, justificadamente que f será continua en $x = 0$ si $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 4$.
- (2 punto) por determinar que para la existencia del límite lateral derecho $b = \sqrt{a}$.
- (1 punto) por determinar que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
- (1 punto) por deetrminar los valores de a y b.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

D

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(3x) - 2x^2}{x + \operatorname{sen}(3x)}$

   Solución:

   Observe que

   $$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x) - 2x^2}{x + \operatorname{sen}(3x)} &= \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(3x)/x - 2x}{1 + \operatorname{sen}(3x)/x} \\ &= \frac{3-0}{1+3} \\ &= 3/4 \end{aligned}$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por desarrollo deálgebra de límites correcto y que lleve a la solución.
   - (1 punto) por usar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$ o algo equivalente.
   - (1 punto) por calcular correctamente el valor.

   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x^2+1) \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$

   Solución Observe que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$ y que $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+1)$ es una función acotada, por lo tanto del Teorema del Sandwich tenemos que

   $$\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen}(x^2+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 0$$

   Distribución de puntaje:

   - (1 punto) por decir que $\lim\limits_{x\to\infty} \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right) = 0$
   - (1 punto) por decir que $f(x) = \operatorname{sen}(x^2+1)$ es una función acotada.
   - (1 punto) por concluir, justificadamente, el valor del límite.

2. Determine todos los valores de a y b para los que la función f es continua en $x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} & \text{si } x > 0 \\ \dfrac{e^{3x}-3}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Solución:

Observe que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{3x}-3}{x-1} \\ &= 2 \\ &= f(0) \end{aligned}$$

por lo tanto para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$$

Por otra parte para que $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2}$ exista es necesario que $b = \sqrt{a}$, y una vez que tenemos esta condición podemos ver que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x^2+a}-b}{x^2} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+a}+b} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

Por lo tanto $a = 1/16$ y $b = 1/4$

Distribución de puntaje:

- (2 punto) Por determinar, justificadamente que f será continua en $x = 0$ si $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 2$.
- (2 punto) por determinar que para la existencia del límite lateral derecho $b = \sqrt{a}$.
- (1 punto) por determinar que $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
- (1 punto) por deetrminar los valores de a y b.