Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

A

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Un cono de altura h está inscrito en otro cono de mayor tamaño cuya altura es de 30cm, de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande (ver figura). Determine la altura, h, que maximiza el volumen del cono inscrito.

   Solución:
   Si llamamos R al radio del cono mayor tendremos la siguiente relación

   $$r = \frac{R(30-h)}{30}$$

   donde r y h son el radio y la altura del cono inscrito respectivamente.

   Con lo anterior tenemos que el volumen del cono inscrito en términos de su altura es:

   $$V(h) = \frac{\pi R^2}{3 \cdot 30^2}(30-h)^2 h$$

   con $h \in (0, 30)$, para encontrar la altura que maximiza esta función buscamos puntos críticos, para eso observemos que:

   $$V'(h) = \frac{\pi R^2}{30^2}(h^2 - 40h + 300) = \frac{\pi R^2}{30^2}(h-10)(h-30)$$

   obteniedo que le único punto crítico es $h = 10$.

   Además observemos que la derivada cambia de signo positivo a negativo en $h = 10$, por lo tanto la altura que maximiza el volumen es $h = 10$.

   Distribución de puntajes:

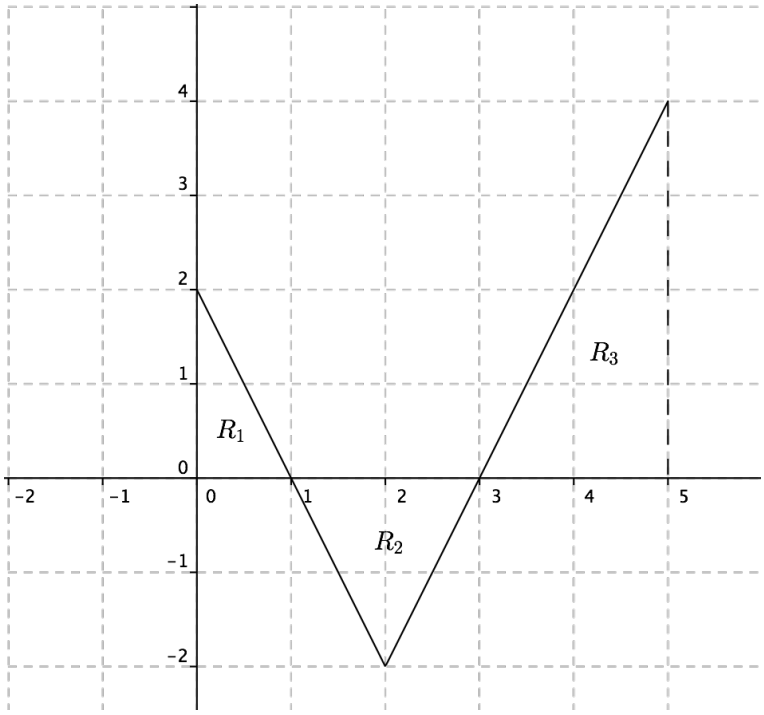
   - 1 punto por determinar la relación entre altura y radio.
   - 1 punto por determinar la función volumen
   - 1 punto por determinar la derivada de la función volumen
   - 1 punto por determinar punto crítico
   - 2 puntos por concluir que la altura que maximiza el volumen es 10. (aqu pueden usar criterio de la primera o segunda derivada.)

2. Calcule, usando la interpretación geométrica de la integral, el valor de:

$$\int_0^5 |2x-4| - 2\,dx$$

Solución:

Graficando la función en el intervalo que se pide integrarla tenemos



As tenemos que

$$\int_0^5 |2x-4| - 2\,dx = \text{Area}(R_1) - \text{Area}(R_2) + \text{Area}(R_3) = 1 - 2 + 4 = 3$$

Distribución de puntajes:

- 2 puntos por graficar.
- 2 puntos por interpretar la integral en términos de área.
- 2 puntos por determinar el valor.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

B

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Un cono de altura h está inscrito en otro cono de mayor tamaño cuya altura es de 72cm, de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande (ver figura). Determine la altura, h, que maximiza el volumen del cono inscrito.

   Solución:
   Si llamamos R al radio del cono mayor tendremos la siguiente relación

   $$r = \frac{R(12-h)}{12}$$

   donde r y h son el radio y la altura del cono inscrito respectivamente.

   Con lo anterior tenemos que el volumen del cono inscrito en términos de su altura es:

   $$V(h) = \frac{\pi R^2}{3 \cdot 12^2}(12-h)^2 h$$

   con $h \in (0, 12)$, para encontrar la altura que maximiza esta función buscamos puntos críticos, para eso observemos que:

   $$V'(h) = \frac{\pi R^2}{12^2}(h^2 - 16h + 48) = \frac{\pi R^2}{12^2}(h-12)(h-4)$$

   obteniedo que le único punto crítico es $h = 4$.

   Además observemos que la derivada cambia de signo positivo a negativo en $h = 4$, por lo tanto la altura que maximiza el volumen es $h = 4$.

   Distribución de puntajes:

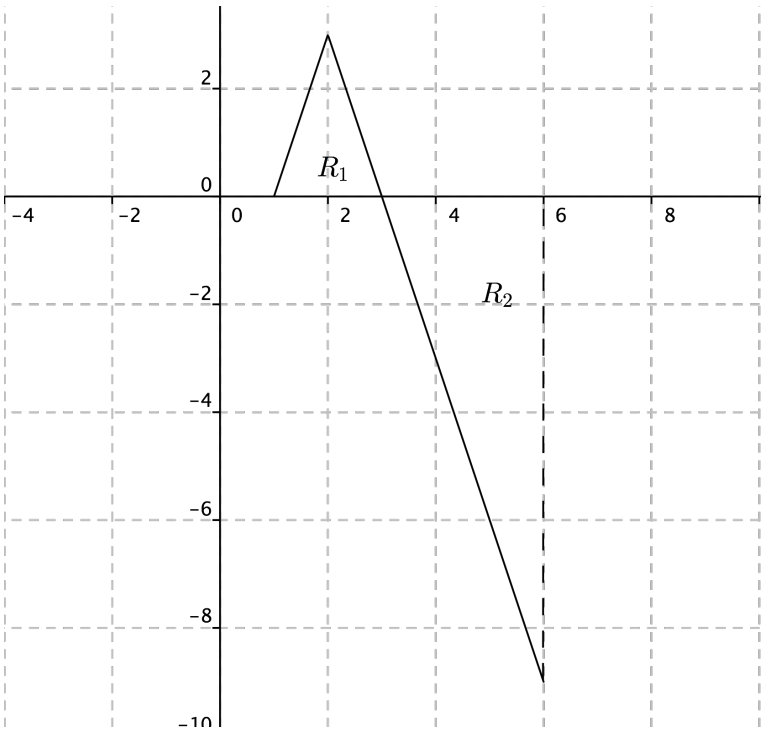
   - 1 punto por determinar la relación entre altura y radio.
   - 1 punto por determinar la función volumen
   - 1 punto por determinar la derivada de la función volumen
   - 1 punto por determinar punto crítico
   - 2 puntos por concluir que la altura que maximiza el volumen es 4. (aqu pueden usar criterio de la primera o segunda derivada.)

2. Calcule, usando la interpretación geométrica de la integral, el valor de:

$$\int_1^6 3 - |3x - 6|\, dx$$

Solución:

Graficando la función en el intervalo que se pide integrarla tenemos



As tenemos que

$$\int_1^6 3 - |3x - 6|\, dx = \text{Area}(R_1) - \text{Area}(R_2) = 3 - \frac{27}{2} = -\frac{21}{2}$$

Distribución de puntajes:

- 2 puntos por graficar.
- 2 puntos por interpretar la integral en términos de área.
- 2 puntos por determinar el valor.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

C

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Un cilindro de altura h está inscrito en un cono cuya altura es de 24cm (ver figura). Determine la altura, h, que maximiza el volumen del cilindro.

   Solución:
   Si llamamos R al radio del cono tendremos la siguiente relación

   $$r = \frac{R(24-h)}{24}$$

   donde r y h son el radio y la altura del cilindro inscrito respectivamente.

   Con lo anterior tenemos que el volumen del cilindro inscrito en términos de su altura es:

   $$V(h) = \frac{\pi R^2}{3 \cdot 24^2}(24-h)^2 h$$

   con $h \in (0, 24)$, para encontrar la altura que maximiza esta función buscamos puntos críticos, para eso observemos que:

   $$V'(h) = \frac{\pi R^2}{24^2}(3h^2 - 96h + 24^2) = \frac{\pi R^2}{24^2} 3(h-24)(h-8)$$

   obteniedo que le único punto crítico es $h = 8$.

   Además observemos que la derivada cambia de signo positivo a negativo en $h = 8$, por lo tanto la altura que maximiza el volumen es $h = 8$.

   Distribución de puntajes:

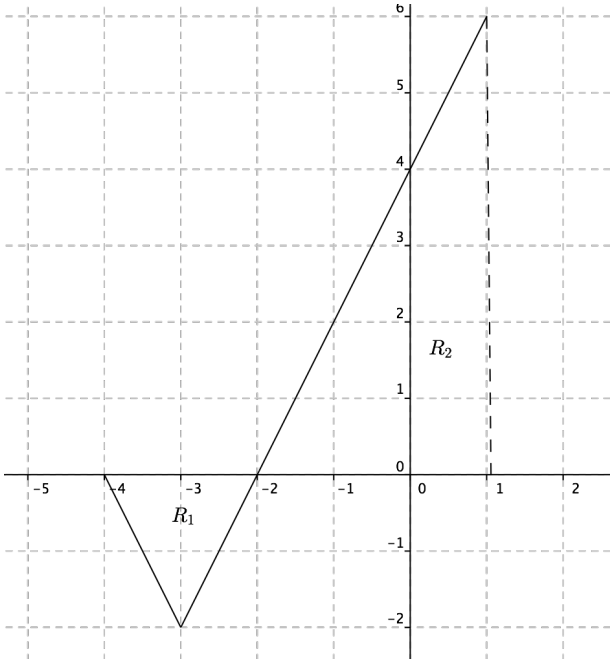
   - 1 punto por determinar la relación entre altura y radio.
   - 1 punto por determinar la función volumen
   - 1 punto por determinar la derivada de la función volumen
   - 1 punto por determinar punto crítico
   - 2 puntos por concluir que la altura que maximiza el volumen es 8. (aqu pueden usar criterio de la primera o segunda derivada.)

2. Calcule, usando la interpretación geométrica de la integral, el valor de:

$$\int_{-4}^{1} |2x+6| - 2\,dx$$

Solución:

Graficando la función en el intervalo que se pide integrarla tenemos



As tenemos que

$$\int_{-4}^{1} |2x+6| - 2\,dx = -\text{Area}(R_1) + \text{Area}(R_2) = -2 + 9 = 7$$

Distribución de puntajes:

- 2 puntos por graficar.
- 2 puntos por interpretar la integral en términos de área.
- 2 puntos por determinar el valor.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo Semestre 2018

D

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2

1. Un cilindro de altura h está inscrito en un cono cuya altura es de 36cm (ver figura). Determine la altura, h, que máximiza el volumen del cilindro.

   Si llamamos R al radio del cono tendremos la siguiente relación

   $$r = \frac{R(36-h)}{36}$$

   donde r y h son el radio y la altura del cilindro inscrito respectivamente.

   Con lo anterior tenemos que el volumen del cilindro inscrito en términos de su altura es:

   $$V(h) = \frac{\pi R^2}{36^2}(36-h)^2 h$$

   con $h \in (0, 36)$, para encontrar la altura que maximiza esta función buscamos puntos críticos, para eso observemos que:

   $$V'(h) = \frac{\pi R^2}{36^2}(3(h^2 - 48h + 12 \cdot 36) = \frac{\pi R^2}{36^2}3(h-12)(h-36)$$

   obteniedo que le único punto crítico es $h = 8$.

   Además observemos que la derivada cambia de signo positivo a negativo en $h = 12$, por lo tanto la altura que maximiza el volumen es $h = 8$.

   Distribución de puntajes:

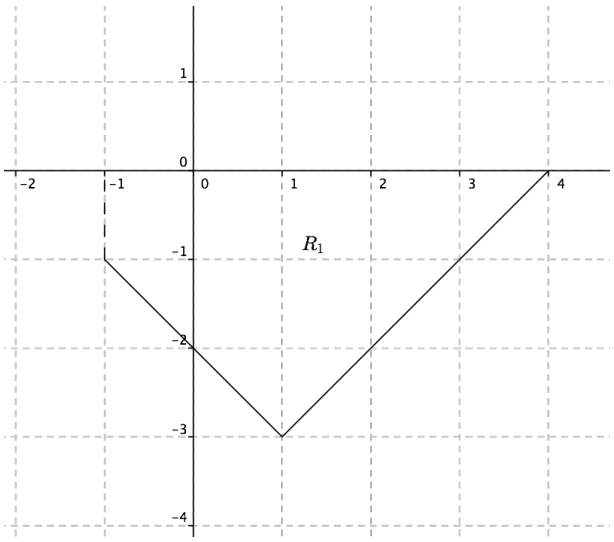
   - 1 punto por determinar la relación entre altura y radio.
   - 1 punto por determinar la función volumen
   - 1 punto por determinar la derivada de la función volumen
   - 1 punto por determinar punto crítico
   - 2 puntos por concluir que la altura que maximiza el volumen es 12. (aqu pueden usar criterio de la primera o segunda derivada.)

2. Calcule, usando la interpretación geométrica de la integral, el valor de:

$$\int_{-1}^{4} |x-1| - 3\,dx$$

Solución:

Graficando la función en el intervalo que se pide integrarla tenemos



As tenemos que

$$\int_{-1}^{4} |x-1| - 3\,dx = -\text{Area}(R_1) = -\left(4 + 4 + \frac{1}{2}\right) = -\frac{17}{2}$$

Distribución de puntajes:

- 2 puntos por graficar.
- 2 puntos por interpretar la integral en términos de área.
- 2 puntos por determinar el valor.