PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
SEGUNDO SEMESTRE DE 2013

MAT1610 $*$ CÁLCULO I

Interrogación N° 3
Una solución

1. Considere $I_n = \int_0^1 x^n \text{sen}(\pi x)dx;\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Demuestre que

4 ptos. $$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n$$

y luego calcule

2 ptos. $$\int_0^1 x^4 \text{sen}(\pi x)dx$$

Solución.

Integrando por partes, sea

$$\begin{cases} u = x^n \Rightarrow du = nx^{n-1}dx \\ dv = \text{sen}(\pi x)dx \Rightarrow v = -\frac{1}{\pi}\cos(\pi x) \end{cases}$$

$$I_n = -\frac{1}{\pi}x^n \cos(\pi x)\Big|_0^1 + \frac{n}{\pi}\int_0^1 x^{n-1}\cos(\pi x)dx$$

1 pto.

Nuevamente por partes,

$$\begin{cases} u = x^{n-1} \Rightarrow du = (n-1)x^{n-2}dx \\ dv = \cos(\pi x)dx \Rightarrow v = \frac{1}{\pi}\text{sen}(\pi x) \end{cases}$$

Así, resulta

$$I_n = \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi}\{\frac{1}{\pi}x^{n-1}\text{sen}(\pi x)\Big|_0^1 - \frac{n-1}{\pi}\int_0^1 x^{n-2}\text{sen}(\pi x)dx\}$$

$$I_n = \frac{1}{\pi} + \frac{n}{\pi}\{-\frac{n-1}{\pi}I_{n-2}\}$$

2 ptos.

$$I_n = \frac{1}{\pi} - \frac{n(n-1)}{\pi^2} I_{n-2}$$

Ahora en lugar de n se remplaza por $n+2$, y se tiene

$$I_{n+2} = \frac{1}{\pi} - \frac{(n+1)(n+2)}{\pi^2} I_n; \;\; n \geq 0$$

1 pto.

Notemos que $I_4 = \int_0^1 x^4 \text{sen}(\pi x) dx$, entonces haciendo $n = 2$ en la fórmula anterior $I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{3 \cdot 4}{\pi^2} I_2$, pero $I_2 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} I_0$

0.5 ptos.

donde $I_0 = \int_0^1 \text{sen}(\pi x) dx = -\frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \Big|_0^1 = \frac{2}{\pi}$

1.0 pto.

finalmente $I_4 = \frac{1}{\pi} - \frac{3 \cdot 4}{\pi^2} (\frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi^2} \frac{2}{\pi}) = \frac{1}{\pi} - \frac{12}{\pi^3} + \frac{48}{\pi^5}$

0.5 ptos.

+ 1.0 pto base.

2. Calcule

a)**[3 ptos]** $\displaystyle\int \frac{x\cos(x)}{\text{sen}^2 x}\,dx$ b)**[3 ptos]** $\displaystyle\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx$

Solución.

a) Integrando por partes, tomando

$$\begin{cases} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}^2 x}\,dx \Rightarrow v = -\dfrac{1}{\text{sen } x} \end{cases}$$

1.0 pto.

Así resulta,

$$\begin{aligned} \int \frac{x\cos(x)}{\text{sen}^2 x}\,dx &= -\frac{x}{\text{sen } x} + \int \frac{1}{\text{sen } x}dx \\ &= -\frac{x}{\text{sen } x} + \int \text{cosec } x\,dx \end{aligned}$$

1.0 pto.

$$= -\frac{x}{\text{sen } x} - \ln(\text{cosec } x + \text{cotg} x) + C$$

1.0 pto.

b) <u>Primera forma</u>

$$\int_0^1 x\sqrt{x^2-2x+2}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{(x-1)^2+1}\,dx$$

Efectuando la sustitución

$x-1 = \text{senh}(t) \Rightarrow dx = \cosh(t)\,dt,\ x\Big|_0^1 \leftrightarrow t\Big|_a^0$, donde

0.5 ptos.

$\text{senh}(a) = -1 \Rightarrow \cosh(a) = \sqrt{1+\text{senh}^2(a)} = \sqrt{2}$,

por otra parte también

$e^a = \text{senh}(a) + \cosh(a) = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow a = \ln(\sqrt{2}-1),\ (*)$

0.5 ptos.

entonces queda

$$\int_0^1 x\sqrt{(x-1)^2+1}\,dx = \int_a^0 (1+\text{senh}(t))\cosh(t)\cosh(t)\,dt$$

$$= \int_a^0 \cosh^2(t)\, dt + \int_a^0 \cosh^2(t)\text{senh}(t)\, dt$$

$$= \int_a^0 \frac{1}{2}(\cosh(2t)+1)\, dt + \int_a^0 \cosh^2(t)\text{senh}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{4}\text{senh}(2t) + \frac{1}{2}t + \frac{1}{3}\cosh^3(t)\Big|_a^0$$

1.0 pto.

$$= \frac{1}{3} - \{\frac{1}{2}\text{senh}(a)\cosh(a) + \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}\cosh^3(a)\}$$

0.5 ptos

finalmente remplazando los valores de : $\text{senh}(a)$, $\cosh(a)$ y de a, de $(*)$

$$\int_0^1 x\sqrt{(x-1)^2+1}\; dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\Big(\sqrt{2}-1\Big)$$

0.5 ptos

+ 1.0 pto base.

Segunda forma

Efectuando la sustitución

$x-1 = \text{tg}(t) \Rightarrow dx = \sec^2(t)\, dt$, $x\Big|_0^1 \leftrightarrow t\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^0$, entonces queda

0.5 ptos.

$$\int_0^1 x\sqrt{(x-1)^2+1}\; dx = \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 (1+\text{tg}\,(t))\sec^3(t)dt$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sec^3(t)dt + \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \text{tg}\,(t)\sec^3(t)dt \qquad (1)$$

0.5 ptos.

Calculando por partes la integral de $\sec^3(t)$ se tiene:

$$u = \sec\,(t) \text{ y } dv = \sec^2(t)dt$$

$$\int \sec^3(t)dt = \sec(t)\,\text{tg}(t) - \int \sec(t)\text{tg}^2(t)dt$$

$$= \sec(t)\,\text{tg}(t) - \int (\sec^3(t) - \sec(t))dt$$

$$2\int \sec^3(t)dt = \sec(t)\,\mathrm{tg}(t) + \ln(\sec(t) + \mathrm{tg}(t))$$

$$\int \sec^3(t)dt = \frac{1}{2}\{\sec(t)\,\mathrm{tg}(t) + \ln(\sec(t) + \mathrm{tg}(t))\}.$$

1.0 pto.

y para la segunda integral de (1), se tiene

$$\int \mathrm{tg}\,(t)\sec^3(t)dt = \int \sec^2(t)\sec(t)\mathrm{tg}(t)dt = \frac{1}{3}\sec^3(t)$$

0.5 ptos.

En (1) resulta finalmente

$$= \frac{1}{2}\{\sec(t)\,\mathrm{tg}(t) + \ln(\sec(t) + \mathrm{tg}(t))\}\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0} + \frac{1}{3}\sec^3(t)\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{0}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\sqrt{2} - \frac{1}{2}\ln\Big(\sqrt{2} - 1\Big)$$

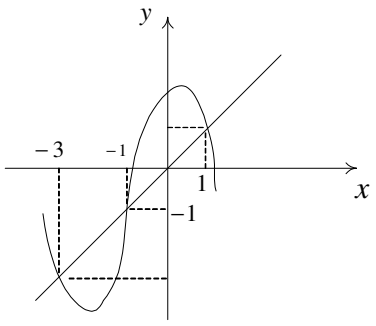
0.5 ptos.

+ 1.0 pto base.

3.**[6 ptos]** Calcule el área de la región plana comprendida entre las curvas

$$y+1=5(x+1)-(x+1)^3 \quad \text{e} \quad y=x$$

Solución.



2.0 ptos.

Los 2 ptos incluyen los ptos de intersección entre las dos curvas es decir 1 punto por el gráfico y 1 punto por los ptos de intersección.

Primera forma

$$\text{Área} = \int_{-3}^{-1} \{x-[5(x+1)-(x+1)^3-1\}dx + \int_{-1}^{1} \{5(x+1)-(x+1)^3-1-x\}\,dx$$

2.0 ptos.

$$= \{\frac{x^2}{2}-\frac{5}{2}(x+1)^2+\frac{1}{4}(x+1)^4+x\}\Big|_{-3}^{-1} + \{\frac{5}{2}(x+1)^2-\frac{1}{4}(x+1)^4-x-\frac{x^2}{2}\}\Big|_{-1}^{1}$$

$$\text{Área} = 4+4=8$$

2.0 ptos.

+ 1.0 pto base.

Segunda forma

Por simetría de las 2 regiones de intersección, se tiene

$$\text{Área} = 2\int_{-1}^{1} \{5(x+1)-(x+1)^3-1-x\}\,dx =$$

$$= 2\{\frac{5}{2}(x+1)^2 - \frac{1}{4}(x+1)^4 - x - \frac{x^2}{2}\}\Big|_{-1}^{1} = 2 \cdot 4 = 8$$

4. a)**[3 ptos.]** Calcular

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx$$

b)**[3 ptos.]** Calcular

$$\int_1^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx \qquad \text{si} \quad f(x)=\frac{x-3}{2x}$$

Solución.

a)

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \frac{2x+3}{(x+1)(x+2)}dx$$

$$\frac{2x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x+2} \Leftrightarrow$$

$$2x+3 = A(x+2)+B(x+1)$$

Si $x = -1 \Rightarrow 1 = A$,

Si $x = -2 \Rightarrow -1 = -B \Rightarrow B = 1$, luego

1.0 pto.

$$\int_0^1 \frac{2x+3}{x^2+3x+2}dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}dx + \int_0^1 \frac{1}{x+2}dx$$

1.0 pto.

$$= \ln(x+1)\Big|_0^1 + \ln(x+2)\Big|_0^1 = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2$$

$$= \ln 3.$$

1.0 pto.

b) <u>Primera forma</u>

Haciendo $t = f(x) \Rightarrow dt = f'(x)dx$, $x\Big|_1^3 \leftrightarrow t\Big|_{f(1)}^{f(3)}$ entonces

1.0 pto.

$$\int_1^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \int_{f(1)}^{f(3)} \frac{1}{1+t^2}dt = \text{Arctg } t\Big|_{f(1)}^{f(3)}$$

$$= \text{Arctg } f(3) - \text{Arctg } f(1)$$

1.0 pto.

y como $f(x) = \dfrac{x-3}{2x}$ entonces $f(3) = 0$ y $f(1) = -1$, por tanto

$$\int_1^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \text{Arctg}\,0 - \text{Arctg}\,(-1) = -(-\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}$$

1.0 pto.

+ 1.0 pto. base

Segunda forma

Si $f(x) = \dfrac{x-3}{2x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{2x^2}$

$$\int_1^3 \frac{f'(x)}{1+f^2(x)}dx = \int_1^3 \frac{\frac{3}{2x^2}}{1+(\frac{x-3}{2x})^2}dx = \frac{6}{5}\int_1^3 \frac{1}{x^2 - \frac{6}{5}x + \frac{9}{5}}dx$$

1.0 pto.

$$= \frac{6}{5}\int_1^3 \frac{1}{\left(x-\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{6}{5}\right)^2}dx$$

1.0 pto.

$$= \text{Arctg}\ \left.\frac{x-\frac{3}{5}}{\frac{6}{5}}\right|_1^3 = \text{Arctg}\,2 - \text{Arctg}\ \frac{1}{3}$$

1.0 pto.

Note que : $\text{Arctg}\,2 - \text{Arctg}\ \dfrac{1}{3} = \dfrac{\pi}{4}$