Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
TAV 2019

MAT1610 - Cálculo I
PAUTA Interrogación 1

Responda justificadamente.

1. Calcule los siguientes límites

   a) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1}{x-3}\right)$.

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty} x\tan\left(\dfrac{6}{x}\right)$.

   Solución:

   a) **(3 puntos)**

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1}{x-3}\right)=\lim_{x\to 3}\left(\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}-1}{x-3}\cdot\frac{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1}{\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{4}{x+1}-1}{(x-3)(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1)}$$
$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{3-x}{x+1}}{(x-3)(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1)}=\lim_{x\to 3}\frac{-1}{(x+1)(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+1)}=\frac{-1}{8}.$$

   b) **(3 puntos)**

$$\lim_{x\to+\infty} x\tan\left(\frac{6}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty} x\frac{\sin\left(\frac{6}{x}\right)}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{6}{x}\right)}{\frac{1}{x}}\right)\left(\frac{1}{\cos\left(\frac{6}{x}\right)}\right)$$
$$=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{\sin(6y)}{y}\right)\left(\frac{1}{\cos(6y)}\right)$$
$$=\left(\lim_{y\to 0^+}\frac{\sin(6y)}{y}\right)\left(\lim_{y\to 0^+}\frac{1}{\cos(6y)}\right)=6\cdot 1=6.$$

   en donde $y=\frac{1}{x}$.

2. *a*) Encuentre los valores de a y b de manera que la siguiente función sea continua en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x+1}, & x < -1, \\ ax + b, & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & x > 0. \end{cases}$$

b) Sea $f(x) = x^2 - 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Muestre que existe $c \in]-1, 4[$ tal que $f(c) = 2$.

Solución:

a) **(3 puntos)**

Notar que para $x < -1$ la función racional está siempre definida al igual que el polinimio $ax + b$ entre $-1 < x < 0$. Además, si $x > 0$, $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ es continua, por lo que dicho tramo también lo es. En conclusión, para cualquier a y b, f es continua en $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$. Ahora analizamos en $x = -1$ y en $x = 0$.
Para que sea continua en dichos puntos, los límites laterales tienen que coincidir:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x+1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{(x+1)^2}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} x + 1 = 0.$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} ax + b = -a + b$$

de donde obtenemos que $a = b$. Por otro lado, para todo $x \neq 0$

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$$

Ya que $\lim_{x\to 0^+} (-x^2) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0$, por el Teorema del Sandwich tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

y por lo tanto

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(1 + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} ax + b = b$$

lo que implica que $b = 1$ y por la ecuación anterior $a = 1$. En conclusión, para que f sea continua en $\mathbb{R}$, a y b deben ser 1.

b) **(3 puntos)**

Como f es un polinomio, entonces es continua en todo $\mathbb{R}$. Además notamos que $f(-1) = 4$ y $f(0) = 0$. Ya que $0 < 2 < 4$, el Teorema del Valor Intermedio implica que existe $c \in]-1, 0[\subset]-1, 4[$ tal que $f(c) = 2$.

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua tal que $f(x) = \dfrac{\sin^2(x)}{x}$ si $x \neq 0$. Encuentre $f(0)$. Luego calcule $f'(0)$ si existe.

   Solución: **(6 puntos)**

   Ya que f es continua en $\mathbb{R}$, entonces $f(0) = \lim_{x\to 0} f(x)$. Así,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \sin(x) \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

   Por lo que $f(0) = 0$.

   Por otro lado,

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 = 1.$$

4. Calcule la derivada de la siguiente función

$$f(x) = e^x - 4^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}} + 6x^3 - \cos(x).$$

   Solución: **(6 puntos)**

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{d}{dx}(e^x) - \frac{d}{dx}(4^3) + \frac{d}{dx}(x^{\frac{1}{2}}) + \frac{d}{dx}(x^{-\frac{1}{4}}) + 6\frac{d}{dx}(x^3) - \frac{d}{dx}(\cos(x)) \\ &= e^x - 0 + \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}} - \frac{1}{4}x^{\frac{-5}{4}} + 18x^2 + \sin(x) \\ &= e^x + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{4\sqrt[4]{x^5}} + 18x^2 + \sin(x). \end{aligned}$$