Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 1.

FILA A

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 45 minutos

Fecha : 9 de Septiembre de 2016

1. Determine a y $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ sea continua en todo su dominio, donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{3} & , \text{ si } x < -1 \\ b & , \text{ si } x = -1 \\ \dfrac{(a-x)^2}{2} & , \text{ si } x > -1 \end{cases}$$

Solución
Dado que la función $f(x)$ en $(-\infty, -1)$ y en $(-1, \infty)$ es un polinomio y por lo tanto continua para todo valor de a, solo debemos preocuparnos de que sea continua en $x = -1$
Para ello debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = b$$

0,s pts
Luego

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{(x-a)^2}{3} = \frac{-1-a)^2}{3}$$

0,5 pts.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{(a-x)^2}{2} = \frac{(a+1)^2}{2}$$

0,5 pts Por lo tanto, al igualarlos tenemos que $a = -1$ y $b = 0$. **0,5 pts.**

2. Calcule la derivada de la siguiente función, *usando directamente la definición de derivada*:

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}\,.$$

Solución

Dado que:

$$f'(x) \;=\; \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

0,5 pts. Entonces el límite que buscamos es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{1}{(x+h)^2+3} - \dfrac{1}{x^2+3}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-2hx}{h((x^2+3)((x+h)^2+3))} \;=\; -\lim_{h\to 0} \frac{h+2x}{(x^2+3)((x+h)^2+3)} \;=\; \frac{-2x}{(x^2+3)^2}$$

1,2 pts

3. Dada la función real $h(x) = \dfrac{f\Big(g(x)\Big)(g(x) - f(x))}{1 + (g(x))^2}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$ y $g(0) = 1, f(0) = 4, f(1) = 2, g'(0) = 3, f'(0) = 4$ y $f'(1) = 0$ entonces el valor de $h'(0)$ es:

   a) 32
   b) 8 **Respuesta Correcta, 2 pts**
   c) -10
   d) -4
   e) Ninguna de las anteriores.

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 1.

FILA B

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 45 minutos

Fecha : 9 de Septiembre de 2016

1. Determine a y $b \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ sea continua en todo su dominio, donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{3} & , \text{ si } x < -2 \\ b & , \text{ si } x = -2 \\ \dfrac{(a-x)^2}{2} & , \text{ si } x > -2 \end{cases}$$

Solución
Dado que la función $f(x)$ en $(-\infty, -2)$ y en $(-2, \infty)$ es un polinomio y por lo tanto continua para todo valor de a, solo debemos preocuparnos de que sea continua en $x = -2$
Para ello debe cumplirse que:

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^+} f(x) = b$$

0,5 pts Luego

$$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2^-} \frac{(x-a)^2}{3} = \frac{(-2-a)^2}{3}$$

0,5 pts.

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{(a-x)^2}{2} = \frac{(a+2)^2}{2}$$

Por lo tanto, al igualarlos tenemos que $a = -2$ y $b = 0$.

0,5 pts.

2. Calcule la derivada de la siguiente función, *usando directamente la definición de derivada*:

$$f(x) = \frac{-2}{x^2+4}$$

Solución

Dado que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

0,5 pts.
Entonces el límite que buscamos es:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{-2}{(x+h)^2+4} - \dfrac{-2}{x^2+4}}{h}$$

$$= -2 \lim_{h\to 0} \frac{-h^2-2hx}{h((x^2+4)((x+h)^2+4))} = 2 \lim_{h\to 0} \frac{h+2x}{(x^2+4)((x+h)^2+4)} = \frac{4x}{(x^2+4)^2}$$

1,5 pts.

3. Dada la función real $h(x) = \dfrac{f\Big(g(x)\Big)(g(x) - f(x))}{1 + (g(x))^2}$ donde $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en $\mathbb{R}$ y $g(1) = -1, f(1) = 2, f(-1) = 1, g'(1) = 3, f'(-1) = 0$ y $f'(1) = 4$ entonces el valor de $h'(1)$ es:

   a) 4

   b) 8

   c) -5 **Respuesta Correcta, 2 pts.**

   d) -20

   e) Ninguna de las anteriores.

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.