Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2018

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 2 A

1. Demuestre que
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{28} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^3}\, dx \leq 1$$

Solución:

Observe que f es decreciente en el intervalo $[1,3]$ por lo tanto el máximo en dicho intervalo es $f(1) = \dfrac{1}{2}$ y por lo tanto
$$\int_1^3 \frac{1}{1+x^3}\, dx \leq \frac{1}{2} \cdot (3-1) = 1$$

Por otra parte tenemos que
$$\int_1^3 \frac{1}{1+x^3}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{1+x^3}\, dx + \int_2^3 \frac{1}{1+x^3}\, dx$$

y acotando cada una de las integrales tenemos que
$$\int_1^2 \frac{1}{1+x^3}\, dx \geq f(2) = \frac{1}{9} \text{ y que } \int_2^3 \frac{1}{1+x^3}\, dx \geq f(3) = \frac{1}{28}$$

obteniendo que
$$\frac{1}{9} + \frac{1}{28} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^3}\, dx$$

Distribución de puntajes.

- (2 puntos) por acotar superiormente correctamente.
- (1 punto) por la justificación del punto anterior
- (1 punto) por hacer una división que permita acotar ya sea gráficamente, dividiendo en dos integrales o haciendo particiones.
- (2 punto) repartidos en un punto por acotar c/u de las integrales.

2. Considere la función definida por

$$G(x) = \int_0^{x^2} (1 - e^{t^2-1})dt$$

Demuestre que G es creciente en $(-\infty, -1)$.

Solución:

Observe que $G'(x) = 2x\left(1 - e^{x^4-1}\right)$ y para $x < -1$ tenemos que $x^4 - 1 > 0$ y por lo tanto $(1 - e^{x^4-1}) < 0$ y además $2x < 0$ por lo tanto $G'(x) > 0$ para $x < -1$ y entonces tendremos que

$$G \text{ es creciente en } (-\infty, -1)$$

Distribución de puntajes.

- (3 puntos) por determinar G'.
- (2 punto) por el análisis de signos
- (1 punto) por la conclusión

3. Determine

$$\int \frac{\cos(1 + \ln(x))}{2x} dx$$

Solución:

Sea $u = 1 + \ln(x)$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y la integral queda

$$\frac{1}{2}\int \cos(u) = \frac{1}{2}\text{sen}(u) + C = \frac{\text{sen}(1 + \ln(x))}{2} + C$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por realizar sustitución correcta.
- (1 punto) por calcular du
- (1 punto) por plantear la integral en términos de la nueva variable.
- (1 punto) por resolver la integral directa.
- (1 punto) por reescribir la solución en lavariable original
- Descontar 0.5 si olvida la constante C

Cálculo I- MAT1610

Control 2 B

1. Demuestre que

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\leq\int_0^2\frac{1}{1+x^3}\,dx\leq 2$$

Solución:

Observe que f es decreciente en el intervalo $[0,2]$ por lo tanto el máximo en dicho intervalo es $f(0)=1$ y por lo tanto

$$\int_1^3\frac{1}{1+x^3}\,dx\leq 1\cdot(2-0)=2$$

Por otra parte tenemos que

$$\int_0^2\frac{1}{1+x^3}\,dx=\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx+\int_1^2\frac{1}{1+x^3}\,dx$$

y acotando cada una de las integrales tenemos que

$$\int_0^1\frac{1}{1+x^3}\,dx\geq f(1)=\frac{1}{2}\text{ y que }\int_1^2\frac{1}{1+x^3}\,dx\geq f(2)=\frac{1}{9}$$

obteniendo que

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{2}\leq\int_0^2\frac{1}{1+x^3}\,dx$$

Distribución de puntajes.

- (2 puntos) por acotar superiormente correctamente.
- (1 punto) por la justificación del punto anterior
- (1 punto) por hacer una división que permita acotar ya sea gráficamente, dividiendo en dos integrales o haciendo particiones.
- (2 punto) repartidos en un punto por acotar c/u de las integrales.

2. Considere la función definida por

$$G(x) = \int_{x^2}^{0} (1 - e^{t^2-1})dt$$

Demuestre que G es creciente en $(1, \infty)$.

Solución:

Observe que $G'(x) = -2x\left(1 - e^{x^4-1}\right)$ y para $x > 1$ tenemos que $x^4 - 1 > 0$ y por lo tanto $(1 - e^{x^4-1}) < 0$ y además $-2x < 0$ por lo tanto $G'(x) > 0$ para $x > 1$ y entonces tendremos que

$$G \text{ es creciente en } (1, \infty)$$

Distribución de puntajes.

- (3 puntos) por determinar G'.
- (2 punto) por el análisis de signos
- (1 punto) por la conclusión

3. Determine

$$\int \frac{\text{sen}(2 + \ln(x))}{2x} dx$$

Solución:

Sea $u = 2 + \ln(x)$, entonces $du = \frac{1}{x}dx$ y la integral queda

$$\frac{1}{2}\int \text{sen}(u) = -\frac{1}{2}\cos(u) + C = -\frac{\cos(2 + \ln(x))}{2} + C$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por realizar sustitución correcta.
- (1 punto) por calcular du
- (1 punto) por plantear la integral en términos de la nueva variable.
- (1 punto) por resolver la integral directa.
- (1 punto) por reescribir la solución en lavariable original
- Descontar 0.5 si olvida la constante C

Cálculo I- MAT1610

Control 2 C

1. Demuestre que

$$2\sqrt{2} \leq \int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq 3+\sqrt{28}$$

Solución:

Observe que f es creciente en el intervalo $[1,3]$ por lo tanto el mínimo en dicho intervalo es $f(1)=\sqrt{2}$ y por lo tanto

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \geq \sqrt{2}\cdot(3-1) = 2\sqrt{2}$$

Por otra parte tenemos que

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx + \int_2^3 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

y acotando cada una de las integrales tenemos que

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq f(2) = 3 \text{ y que } \int_2^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq f(3) = \sqrt{28}$$

obteniendo que

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq 3+\sqrt{28}$$

Distribución de puntajes.

- (2 puntos) por acotar superiormente correctamente.
- (1 punto) por la justificación del punto anterior
- (1 punto) por hacer una división que permita acotar ya sea gráficamente, dividiendo en dos integrales o haciendo particiones.
- (2 punto) repartidos en un punto por acotar c/u de las integrales.

2. Considere la función definida por

$$G(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1+t^2}dt$$

Demuestre que $G(0) = 0$ es un mínimo local de G.

Solución:

Observe que $G'(x) = 2x\sqrt{1+x^4}$ y por lo tanto $G'(x) > 0$ si $x > 0$ y $G'(x) < 0$ si $x < 0$ por lo tanto $G(0) = 0$ es mínimo local de G.

Distribución de puntajes.

- (3 puntos) por determinar G'.
- (2 punto) por el análisis de signos
- (1 punto) por la conclusión

3. Determine

$$\int \frac{\cos(\pi/x)}{x^2}dx$$

Solución:

Sea $u = \dfrac{\pi}{x}$, entonces $du = -\dfrac{\pi}{x^2}dx$ y la integral queda

$$-\frac{1}{\pi}\int \cos(u)du = -\frac{1}{\pi}\text{sen}(u) + C = -\frac{1}{\pi}\text{sen}(\pi/x) + C$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por realizar sustitución correcta.
- (1 punto) por calcular du
- (1 punto) por plantear la integral en términos de la nueva variable.
- (1 punto) por resolver la integral directa.
- (1 punto) por reescribir la solución en lavariable original
- Descontar 0.5 si olvida la constante C

Cálculo I- MAT1610

Control 2 D

1. Demuestre que

$$1+\sqrt{2} \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq 6$$

Solución:

Observe que f es creciente en el intervalo $[0,2]$ por lo tanto el máximo en dicho intervalo es $f(2)=3$ y por lo tanto

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \leq 3\cdot(3-1)=6$$

Por otra parte tenemos que

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^3}\,dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx + \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx$$

y acotando cada una de las integrales tenemos que

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^3}\,dx \geq f(0)=1 \text{ y que } \int_1^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \geq f(1)=\sqrt{2}$$

obteniendo que

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^3}\,dx \geq 1+\sqrt{2}$$

Distribución de puntajes.

- (2 puntos) por acotar superiormente correctamente.
- (1 punto) por la justificación del punto anterior
- (1 punto) por hacer una división que permita acotar ya sea gráficamente, dividiendo en dos integrales o haciendo particiones.
- (2 punto) repartidos en un punto por acotar c/u de las integrales.

2. Considere la función definida por

$$G(x) = \int_{x^2}^{0} \sqrt{1+t^2}dt$$

Demuestre que $G(0) = 0$ es un máximo local de G.

Solución:

Observe que $G'(x) = -2x\sqrt{1+x^4}$ y por lo tanto $G'(x) > 0$ si $x < 0$ y $G'(x) < 0$ si $x > 0$ por lo tanto $G(0) = 0$ es máximo local de G.

Distribución de puntajes.

- (3 puntos) por determinar G'.
- (2 punto) por el análisis de signos
- (1 punto) por la conclusión

3. Determine

$$\int \frac{\text{sen}(\pi/x)}{x^2}dx$$

Solución:

Sea $u = \dfrac{\pi}{x}$, entonces $du = -\dfrac{\pi}{x^2}dx$ y la integral queda

$$-\frac{1}{\pi}\int \text{sen}(u)du = -\frac{1}{\pi}\cos(u) + C = \frac{1}{\pi}\cos(\pi/x) + C$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por realizar sustitución correcta.
- (1 punto) por calcular du
- (1 punto) por plantear la integral en términos de la nueva variable.
- (1 punto) por resolver la integral directa.
- (1 punto) por reescribir la solución en lavariable original
- Descontar 0.5 si olvida la constante C

Cálculo I- MAT1610

Control 2 E

1. Demuestre que

$$2\sqrt{2} \leq \int_1^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{5}+\sqrt{10}$$

Solución:

Observe que f es creciente en el intervalo $[1,3]$ por lo tanto el mínimo en dicho intervalo es $f(1)=\sqrt{2}$ y por lo tanto

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \geq \sqrt{2}\cdot(3-1) = 2\sqrt{2}$$

Por otra parte tenemos que

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^2}\,dx = \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx + \int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx$$

y acotando cada una de las integrales tenemos que

$$\int_1^2 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq f(2)=\sqrt{5} \text{ y que } \int_2^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq f(3)=\sqrt{10}$$

obteniendo que

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^2}\,dx \leq \sqrt{5}+\sqrt{10}$$

Distribución de puntajes.

- (2 puntos) por acotar superiormente correctamente.
- (1 punto) por la justificación del punto anterior
- (1 punto) por hacer una división que permita acotar ya sea gráficamente, dividiendo en dos integrales o haciendo particiones.
- (2 punto) repartidos en un punto por acotar c/u de las integrales.

2. Considere la función definida por

$$G(x) = \int_0^{x^3+x} (1 + e^{t^2})dt$$

Demuestre que G es creciente.

Solución:

Observe que $G'(x) = (3x^2 + 1)(1 + e^{x^3+x})$y por lo tanto $G'(x) > 0$ para todo x por lo tanto G es creciente.

Distribución de puntajes.

- (3 puntos) por determinar G'.
- (2 punto) por el análisis de signos
- (1 punto) por la conclusión

3. Determine

$$\int \frac{\sec^2(\pi\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$$

Solución:

Sea $u = \pi\sqrt{x}$, entonces $du = -\frac{\pi}{2\sqrt{x}}dx$ y la integral queda

$$\frac{2}{\pi}\int \sec^2(u)du = \frac{2}{\pi}\tan(u) + C = \frac{2}{\pi}\tan(\pi\sqrt{x}) + C$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por realizar sustitución correcta.
- (1 punto) por calcular du
- (1 punto) por plantear la integral en términos de la nueva variable.
- (1 punto) por resolver la integral directa.
- (1 punto) por reescribir la solución en lavariable original
- Descontar 0.5 si olvida la constante C

Cálculo I- MAT1610

Control 2 F

1. Demuestre que

$$1+\sqrt{2} \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{5}$$

Solución:

Observe que f es creciente en el intervalo $[0,2]$ por lo tanto el máximo en dicho intervalo es $f(2)=\sqrt{5}$ y por lo tanto

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2} dx \leq \sqrt{5}\cdot(3-1) = 2\sqrt{5}$$

Por otra parte tenemos que

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^2}\, dx = \int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx + \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\, dx$$

y acotando cada una de las integrales tenemos que

$$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\, dx \geq f(0) = 1 \text{ y que } \int_1^2 \sqrt{1+x^2}\, dx \geq f(1) = \sqrt{2}$$

obteniendo que

$$\int_1^3 \sqrt{1+x^2}\, dx \geq 1+\sqrt{2}$$

Distribución de puntajes.

- (2 puntos) por acotar superiormente correctamente.
- (1 punto) por la justificación del punto anterior
- (1 punto) por hacer una división que permita acotar ya sea gráficamente, dividiendo en dos integrales o haciendo particiones.
- (2 punto) repartidos en un punto por acotar c/u de las integrales.

2. Considere la función definida por

$$G(x) = \int_{x^3+x}^{0} (1 + e^{t^2})dt$$

Demuestre que G es decreciente. **Solución:**

Observe que $G'(x) = -(3x^2 + 1)(1 + e^{x^3+x})$y por lo tanto $G'(x) < 0$ para todo x por lo tanto G es decreciente.

Distribución de puntajes.

- (3 puntos) por determinar G'.
- (2 punto) por el análisis de signos
- (1 punto) por la conclusión

3. Determine

$$\int e^{2\tan(x)+1}(\sec^2(x))dx$$

Solución:

Sea $u = 2\tan(x) + 1$, entonces $du = 2\sec^2(x)dx$ y la integral queda

$$\frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2}e^u + C = \frac{1}{2}e^{2\tan(x)+1} + C$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por realizar sustitución correcta.
- (1 punto) por calcular du
- (1 punto) por plantear la integral en términos de la nueva variable.
- (1 punto) por resolver la integral directa.
- (1 punto) por reescribir la solución en lavariable original
- Descontar 0.5 si olvida la constante C