Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 1.

FILA A

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 45 minutos

Fecha : 8 de Abril de 2016

1. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+\sqrt[3]{x-9}}{x-1} & , \text{ si } x < 1 \\ \dfrac{\text{sen}(x-1)}{12x-12} & , \text{ si } x > 1 \end{cases}$$

Determine si existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

Solución
El límite existe dado que:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{12x-12} = \frac{1}{12}\lim_{x\to 1^+} \frac{\text{sen}(x-1)}{x-1} = \frac{1}{12}$$

1,0 pts.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2+\sqrt[3]{x-9}}{x-1} = \frac{1}{12}$$

1,0 pts.

2. Demuestre que la ecuación $\cos(x) = x$ tiene al menos una solución real.
Solución
Sea $f(x) = \cos(x) - x$ entonces f es continua en $\mathbb{R}$ y en particular en el intervalo $[0,1]$ y como $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = \cos(1) - 1 < 0$ entonces por el Teorema del Valor Intermedio,
1,0 pts.

$$\exists c \in [0,1](f(c) = 0)$$

Pero esto es equivalente a que la ecuación original tiene al menos una solución real.
1,0 pts.

Observación: pueden escoger algún otro intervalo apropiado y la solución es correcta

3. Dada la función real $g(x) = \sec\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$ entonces el valor de $g'(0)$ es:

   a) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

   b) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

   c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

   d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

   e) Ninguna de las anteriores.**Respuesta correcta2,0 pts.**

Sin uso de calculadoras.
Recuerde escribir solo con tinta indeleble y no usar corrector.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 1.

FILA B

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 45 minutos

Fecha :8 de Abril de 2016

1. Dada

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|(1-\cos(x))}{x^2} & , \text{ si } x \neq 0 \\ \\ a & , \text{ si } x = 0 \end{cases}$$

Determine el (los) valor(es) $a \in \mathbb{R}$ de modo que f sea continua en $x = 0$
Solución
Para que f sea continua en $x = 0$ necesitamos que $\lim_{x\to 0} f(x) = f(0) = a$ Entonces

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x|(1-\cos(x))}{x^2}$$

Al tener valor absoluto, debemos ver los límites laterales: $\lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))}{x} = \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen}^2(x)}{x(1+\cos(x))}$
$= \lim_{x\to 0^+} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}\dfrac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)} = 1\dfrac{0}{2} = 0$
1,0 pts.

$\lim_{x\to 0^-} \dfrac{|x|(1-\cos(x))}{x^2} = -\lim_{x\to 0^-} \dfrac{(1-\cos(x))}{x} = -\lim_{x\to 0^-} \dfrac{\text{sen}(x)}{x}\dfrac{\text{sen}(x)}{1+\cos(x)} = 0$ Por lo tanto, para que f sea continua en $x = 0$ el valor de a debe ser 0. **1,0 pts.**

2. Demuestre que la ecuación $\ln(x) = 3 - 2x$ tiene al menos una solución real.

Solución
Sea $f(x) = \ln(x) + 2x - 3$ entonces f es continua en $[1, e]$ y $f(1) =_1 < 0$ y $f(e) = 1 + 2e - 3 > 0$
Por lo tanto, por el teorema del Valor Intermedio:
1,0 pts.

$\exists c \in [1, e](f(c) = 0$ y esto es equivalente a demostrar que la ecuación dada tiene al menos una solución real.
1,0 pts.

Observación: pueden escoger algún otro intervalo apropiado y la solución es correcta

3. Dada la función real $g(x) = \text{cosec}\left(\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$ entonces el valor de $g'(0)$ es:

   a) $\frac{1}{4\sqrt{2}}$

   b) $-\frac{\sqrt{2}}{8}$

   c) $-\frac{\sqrt{2}}{4}$

   d) $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

   e) Ninguna de las anteriores. **Respuesta correcta2,0 pts.**