Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Segundo semestre de 2015

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Solución al Examen

1. Calcule el límite $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{e^{\operatorname{sen} x}-1}{x-\pi}$.

   Solución:

   Es claro que el limite

   $$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x-\pi}$$

   es de la forma $\frac{0}{0}$. Usaremos la regla de L'Hospital. Calculamos, si existe, el limite del cociente de las derivadas

   $$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin(x)}\cos(x)}{1}.$$

   Es claro que, por la continuidad de la exponencial y de las funciones trigonometricas, este limite existe y

   $$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin(\pi)}\cos(\pi)}{1} = -1.$$

   Por lo tanto

   $$\lim_{x\to\pi} \frac{e^{\sin(x)}-1}{x-\pi} = -1.$$

2. Grafique la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x$, indicando raíces, máximos y mínimos locales, sentido de la concavidad en los distintos intervalos y puntos de inflexión.

Solución:

Primero calculamos las raíces del la función f. Para ello factorizamos $f(x) = x(2x^2 - 3x - 12)$ con lo que se obtiene que las raices de f son $0, \frac{3\pm\sqrt{105}}{4}$.

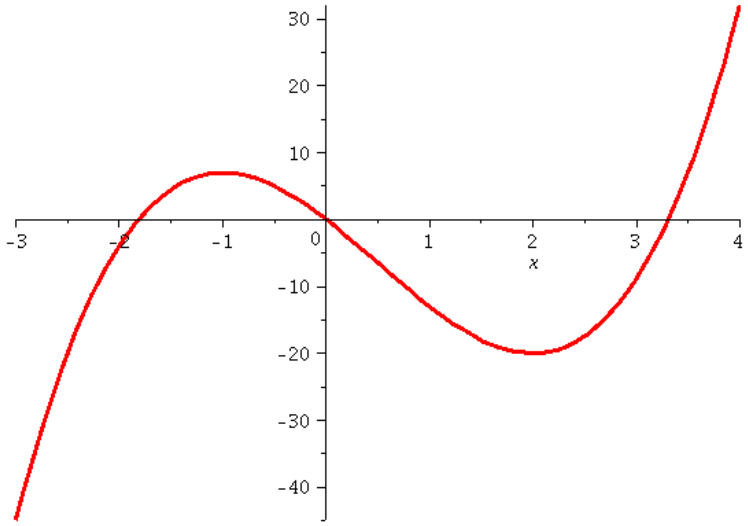
Para los máximos y mínimos usamos la derivada $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1)$. Calculando la segunda derivada $f''(x) = 12x - 6$ tenemos que

$$f''(-1) = -18 < 0; \quad f''(2) = 6 > 0.$$

Por lo tanto en $x = -1$ f tiene un máximo local y en $x = 2$ f tiene un mínimo local.

Usando también la segunda derivada tenemos que $f''(x) < 0$ para $x \in (-\infty, 1/2)$ y $f''(x) > 0$ para $x \in (1/2, \infty)$. Así, la función f es cóncava hacia abajo en $(-\infty, 1/2)$, cóncava hacia arriba en $(1/2, \infty)$, y $x = 1/2$ es su único punto de inflexión.

El gráfico es aproximadamente como sigue:



3. Calcule la derivada de la función

$$y = \int_{\cos x}^{5x} \cos(u^2)\, du.$$

Solución:

Para calcular esta derivada primero tomamos cualquier $a \in \mathbb{R}$ y escribimos

$$\begin{aligned} y(x) &= \int_{\cos x}^{a} \cos(u^2)\, du + \int_{a}^{5x} \cos(u^2)\, du. \\ &= -\int_{a}^{\cos x} \cos(u^2)\, du + \int_{a}^{5x} \cos(u^2)\, du. \end{aligned}$$

Si definimos $g(x) = \int_a^x \cos(u^2)\, du$ entonces $y(x) = -g(\cos(x)) + g(5x)$. Por el teorema fundamental del cálculo $g'(x) = \cos(x^2)$. Por tanto al usar la regla de la cadena se obtiene

$$\begin{aligned} y'(x) &= -(-\operatorname{sen}(x))g'(\cos(x)) + 5g'(5x) \\ &= \operatorname{sen}(x)\cos(\cos^2(x)) + 5\cos(25x^2) \end{aligned}$$

4. La altura de un monumento es de 20m. Una sección transversal horizontal a una distancia de x metros desde la parte alta es un triángulo equilátero con $\frac{1}{4}x$ metros por lado.

   Calcule el volumen del monumento.

   Solución:

   Podemos cortar el monumento transversalmente, en dirección horizonta, a distancias x de la parte alta, con x variando entre 0 y 20 m.

   Así, $V = \displaystyle\int_0^{20} A(x)\,dx$ donde $A(x)$ es el área de la sección a distancia x de la parte alta.

   Pero esa sección es un triángulo equilátero de lado $\dfrac{x}{4}$ metros por lado, por lo que su altura es $\dfrac{\sqrt{3}\,x}{8}$ metros, y su área es $A(x) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{x}{4}\cdot\dfrac{\sqrt{3}\,x}{8} = \dfrac{x^2\sqrt{3}}{16}$ metros.

   Así, el volumen buscado es

$$V = \int_0^{20} A(x)\,dx = \int_0^{20} \frac{x^2\sqrt{3}}{16}\,dx = \frac{\sqrt{3}}{16}\int_0^{20} x^2\,dx = \frac{\sqrt{3}}{16}\int_0^{20} x^2\,dx = \frac{\sqrt{3}}{16}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{20} = \frac{\sqrt{3}}{48}x^3\Big|_0^{20} = \frac{500}{\sqrt{3}}.$$

   O sea, el monumento tiene un volumen de $\dfrac{500}{\sqrt{3}}$ m^3.

5. Evalúe la integral $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$.

Primera Solución:

Usando las identidades para $\cos 2x$, tenemos que $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ y $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$.

Así,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1-\cos^2 2x}{4}\right) dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} dx - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x \, dx \\ &= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} \cos^2 2x \, dx.\end{aligned}$$

Haciendo la sustitución $u = 2x$, tenemos $dx = \frac{1}{2}\, du$, por lo que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos^2 u \cdot \frac{1}{2}\, du = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \cos^2 u \cdot \, du.$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \cos^2 u \cdot \, du &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1+\cos 2u}{2}\right) du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} du + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2u \, du \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2u \, du = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos 2u \, d(2u)\end{aligned}$$

por lo que —con la sustitución $v = 2u$— queda

$$\int_0^{\pi} \cos^2 u \cdot \, du = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \cos v \, dv = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{sen} v \Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2},$$

de donde finalmente

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{16} = \frac{\pi}{16}.$$

Segunda Solución:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \; dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} (2 \operatorname{sen} x \cos)^2; dx = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/2} = \frac{1}{8}\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 2x \; d(2x) = \frac{1}{8}\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 u \; du.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 u \cdot \; du &= \int_0^{\pi} \left(\frac{1-\cos 2u}{2}\right) \; du = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} du - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2u \; du \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos 2u \; du = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{4}\int_0^{\pi} \cos 2u \; d(2u) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{8}\int_0^{2\pi} \cos v \; dv = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2},
\end{aligned}$$

tenemos que

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \; dx = \frac{1}{8} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}.$$

6. Evalúe la integral $\int t^3 e^{-t^2}\, dt$.

Solución:

Substituyendo $u = t^2$ se tiene $du = 2tdt$. Por lo tanto

$$\int t^3 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \int u e^{-u} du.$$

Integrando por partes con $\int fg' = fg - \int f'g$ donde $f = u$ y $g = -e^{-u}$

$$\frac{1}{2} \int u e^{-u} du = \frac{1}{2}[-ue^{-u} + \int e^{-u} du] = \frac{1}{2}[-ue^{-u} - e^{-u}.]$$

Substituyendo de vuelta, sin olvldar la constante de integracion, obtenemos

$$\int t^3 e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}[-t^2 e^{-t^2} - e^{-t^2}] + C$$

7. Evalúe la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x-1)}$.

Solución:

$\dfrac{1}{(x^2+x+1)(x-1)} = \dfrac{Ax+B}{x^2+x+1} + \dfrac{C}{x-1}$, de donde

$$1 = (Ax+B)(x-1) + C(x^2+x+1).$$

Así,

$$\left.\begin{array}{rrrrrrr} A & & & + & C & = & 0 \\ -A & + & B & + & C & = & 0 \\ & & -B & + & C & = & 1 \end{array}\right|$$

Resolviendo se obtiene: $A = -\dfrac{1}{3},\ \ B = -\dfrac{2}{3},\ \ C = \dfrac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2+x+1)(x-1)} &= -\frac{1}{3}\int \frac{x+2}{(x^2+x+1)}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx \\ &= -\frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx \\ &= -\frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{3}\ln|x-1| + C \end{aligned}$$

8. Evalúe la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}}$.

Solución:

Haciendo: $x = \operatorname{sen} t \Rightarrow dx = \cos t\, dt$, resulta:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1-x^2}} &= \int \frac{\cos t dt}{\operatorname{sin}^2 t\sqrt{1-\operatorname{sin}^2 t}} = \int \frac{1}{\operatorname{sin}^2 t} dt \\ &= \int \csc^2 t dt. = -\cot t + C = -\frac{\cos t}{\operatorname{sen} t} + C = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} + C.\end{aligned}$$