PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2014.

# MAT 1610 * PAUTA INTERROGACIÓN 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso afirmativo calcúlelos, en caso contrario justifique porque no existe.

   a) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{4x^2}-\frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

   **Solución:**
   Notamos que $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ es acotado. Por otra parte:

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{4x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{4x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{4}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\frac{1}{1+\cos x}$$

   y este último resultado se justifica pues $x\mapsto x^2$ es función continua, $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ y $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$. Así,

   $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{4x^2}-\frac{1}{8}=0.$$

   Finalmente, tenemos una expresión de la forma "0· acotado" y en consecuencia, el límite

   $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\cos x}{4x^2}-\frac{1}{8}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0.$$

   b) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}$

   **Solución:**

   $$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^3}}}}}=1.$$

2. a) Demostrar por definición, que

   $$\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{1+x}=\frac{7}{3}.$$

   **Solución:**
   Sea $\epsilon>0$ y escojamos $\delta=\text{mín}\{1,\frac{3}{2}\epsilon\}>0$. Sea $x$ tal que $|x-2|<\delta$. Como $\delta<1$, $|x-2|<1$ de donde se tiene que

   $$-1<x-2<1 \iff 1<x<3 \iff 2<x+1<4$$

y en particular $|x+1|>2$. Por otra parte, como $\delta < \frac{3}{2}\epsilon$, se tiene que

$$\left|\frac{x+5}{1+x}-\frac{7}{3}\right| = \frac{4|x-2|}{3|x+1|} < \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}|x-2| < \frac{2}{3}\delta < \epsilon.$$

b) Demuestre que, por lo menos, hay dos soluciones reales distintas de la ecuación

$$(\cos x)^2 - 3x^2 = -\sin x$$

**Solución:**
Definamos

$$f(x) = (\cos x)^2 - 3x^2 + \sin x.$$

Buscamos valores $x_1, x_2$ reales y distintos tales que $f(x_1) = f(x_2) = 0$. Como $f$ es continua, con miras a usar el Teorema del Valor Intermedio, notamos que

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos\frac{\pi}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin\frac{\pi}{2} = -3\frac{\pi^2}{4} + 1 < 0$$

$$f(0) = (\cos 0)^2 - 3\cdot 0^2 + \sin 0 = 1 > 0$$

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos -\frac{\pi}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2 + \sin -\frac{\pi}{2} = -3\frac{\pi^2}{4} - 1 < 0$$

As, por el teorema del valor intermedio, existe $x_1 \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ tal que $f(x_1) = 0$, y existe $x_2 \in (0, \frac{\pi}{2})$ tal que $f(x_2) = 0$.

3. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} & \text{si } x > 1 \\ \alpha x + \beta & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

Determine los valores $\alpha$ y de $\beta$ para que $f$ sea derivable en $x = 1$.

**Solución:**
Observemos que para que $f$ sea derivable en $x = 1$, $f$ debe ser continua en $x = 1$, para esto

$$\lim_{x\to 1} f(x) = f(1) = \alpha + \beta$$

Es claro que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \alpha + \beta$, entonces debemos determinar el límite lateral derecho.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = \lim_{x\to 1^+}(1+\sqrt{x}) = 2$$

Por lo tanto la priemra condición que deben satisfacer es $\alpha + \beta = 2$.

Para que sea derivable debe existir

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$$

Observe que

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{1-(1+h)}{1-\sqrt{1+h}} - 2}{h} = \frac{1}{2}$$

Por otra parte

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0^-}\frac{\alpha(1+h)+\beta-2}{h} = \alpha$$

Entonces tenemos que

$$\alpha = \frac{1}{2} \text{ y } \beta = \frac{3}{2}$$

a) Considere la curva $y = f(x)$ definida por la ecuación

$$x^2 + x(1+y^2)^{-2} - \text{Arctan}(y) = 2$$

Determine la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto de ordenada $y = 0$, y con abcisa $x > 0$.

**Solución:**

Observe primero que los puntos con ordenada $y = 0$ deben satisfacer

$$x^2 + x = 2$$

es decir los puntos de la curva con ordenanda 0, son $(-2, 0)$ y $(1, 0)$, por lo tanto el punto donde debemos determinar la recta tangente es el punto $(1, 0)$.

Primero debemos determinar la pendiente, que corresponde a $\dfrac{dy}{dx}(1, 0)$. Derivando implícitamente obtenemos

$$2x + (1+y^2)^{-2} - 2x(1+y^2)^{-1}2y\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1+y^2}\frac{dy}{dx} = 0$$

reemplazando en $(1, 0)$ obtenemos la igualdad

$$2 + 1 - \frac{dy}{dx} = 0$$

por lo tanto la pendiente de la recta tangente es 3, entonces la ecuación de la recta pedida es

$$y = 3x - 3$$

b) Dada la función invertible $f(x) = x^3 + 3x + 6$, calcule $(f^{-1})'(6)$

**Solución:**

Observe que $f(x) = 6$ si y sólo si $x = 0$, por lo tanto

$$(f^{-1})'(6) = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$