Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2016

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 3

1. Sean
$$F(x) = \int_1^{1/x} \frac{ds}{1+s^2} \quad \text{y} \quad G(x) = \int_x^1 \frac{ds}{1+s^2}, \quad x > 0.$$

   i) Muestre que $F' = G'$ y que $F = G$.

   ii) Calcule F y G para deducir la identidad
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0.$$

Solución:

i) Por el teorema fundamental del cálculo obtenemos
$$F'(x) = \frac{1}{1+(1/x)^2} \cdot \frac{-1}{x^2} = \frac{-1}{1+x^2} \quad \text{y} \quad G'(x) = \frac{-1}{1+x^2}, \quad x > 0.$$
Por lo tanto, $F' = G'$. Como F y G tienen la misma derivada, entonces existe una constante C tal que $F(x) = G(x) + C$. Evaluando F y G en $x = 1$ obtenemos que $C = 0$, es decir, $F = G$.
2,0 pts.

ii) Calculando F y G se obtiene
$$F(x) = \int_1^{1/x} \frac{ds}{1+s^2} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan(1) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4}$$
1.5 pts.
y
$$G(x) = \int_x^1 \frac{ds}{1+s^2} = \arctan(1) - \arctan(x) = \frac{\pi}{4} - \arctan(x).$$
1.5 pts.
Pero como F y G son iguales entonces obtenemos
$$\arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - \arctan(x),$$
es decir
$$\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0.$$

1.0 pts.

2. Calcular el área de la región acotada y delimitada por las curvas $y = \cos(x), y = \text{sen}(2x),$ para $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Solución:

Buscamos primero los puntos de intersección de ambas curvas:

$$\cos(x) = \text{sen}(2x) \leftrightarrow \cos(x)(2\,\text{sen}(x) - 1) = 0 \leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \wedge x = \frac{\pi}{2}.$$

2.0 pts.
Por lo tanto el área A es:

$$A = \int_0^{\pi/6} (\cos(x) - \text{sen}(2x))dx + \int_{\pi/6}^{\pi/2} (\text{sen}(2x) - \cos(x))dx.$$

2.0 pts.
Por lo tanto

$$A = \left(\text{sen}(x) + \frac{\cos(2x)}{2}\right)\Big|_0^{\pi/6} - \left(\frac{\cos(2x)}{2} + \text{sen}(x)\right)\Big|_{\pi/6}^{\pi/2} = \frac{1}{2}.$$

2.0 pts.

3. i) Sea f una función continua en $\mathbb{R}$. Demuestre que si f es función impar, entonces $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ es función par.

Solución:

Se sabe que $f(-x) = -f(x)$ entonces

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt \; = \; -\int_{-x}^{0} f(t)dt \; = \; \int_{-x}^{0} -f(t)dt = \; \int_{-x}^{0} f(-t)dt.$$

1.5 pts.
Haciendo el cambio de variable $t = -u$ nos queda:

$$F(-x) = \int_x^0 f(u)(-du) = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du = F(x).$$

Por lo tanto la función F es par
1.5 pts.
.

ii) Sea f una función continua tal que

$$f(x) \geq \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt$$

Demuestre que
$F(x) = \dfrac{1}{x-a} \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ es creciente en el intervalo (a, x)

Solución:

Por teorema Fundamental:

$$F'(x) = \frac{-1}{(x-a)^2} \int_a^x f(t)dt + \frac{f(x)}{(x-a)} \; = \; \frac{1}{(x-a)}\Big(f(x) - \frac{\int_a^x f(t)dt}{(x-a)}\Big).$$

2.0 pts.
Dado que

$$f(x) \geq \frac{1}{x-a} \int_a^x f(t)dt$$

se tiene que $F'(x) > 0$ en el intervalo (a, x) y por lo tanto es creciente en dicho intervalo.
1.0 pts.

4. Calcule las siguientes integrales:

i) $\displaystyle\int \tan(x)\ln(\cos(x))\,dx$

Solución:

Haciendo el cambio de variable $u = \cos(x)$ tenemos que $du = -\operatorname{sen}(x)$ y obtenemos:

$$\int \tan(x)\ln(\cos(x))\,dx \;=\; \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\ln(\cos(x))dx = -\int \frac{\ln(u)}{u}du.$$

1.5 pts.

Haciendo el cambio de variable $z = \ln(u)$ entonces $dz = \dfrac{du}{u}$ con lo cual:

$$\int \tan(x)\ln(\cos(x))\,dx = -\int z dz = -\frac{z^2}{2} + c = -\frac{\ln^2(\cos(x))}{2} + c.$$ **1.5 pts.**

ii) $\displaystyle\int \frac{x^3+x}{1+x^4}dx$

Solución:

Primero escribimos

$$\int \frac{x^3+x}{1+x^4}dx \;=\; \int \frac{x^3}{1+x^4}dx \;+\; \int \frac{x}{1+x^4}dx.$$

En la primera integral hacemos la substitución $u = 1+x^4$, $du = 4x^3dx$ y nos queda:

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}dx \;=\; \frac{1}{4}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{4}\ln(u) + c_1 = \;\frac{1}{4}\ln(1+x^4) + c_1.$$

1.5 pts.

En la segunda integral hacemos la substitución: $u = x^2, du = 2xdx$ con lo que esta integral queda:

$$\int \frac{x}{1+x^4}dx \;=\; \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+u^2}du = \frac{1}{2}\arctan(u) + c_2 = \frac{1}{2}\arctan(x^2) + c_2.$$

1.5 pts.

Por lo tanto

$$\int \frac{x^3+x}{1+x^4}dx \;=\; \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + \frac{1}{2}\arctan(x^2) + C.$$