Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
TAV 2018

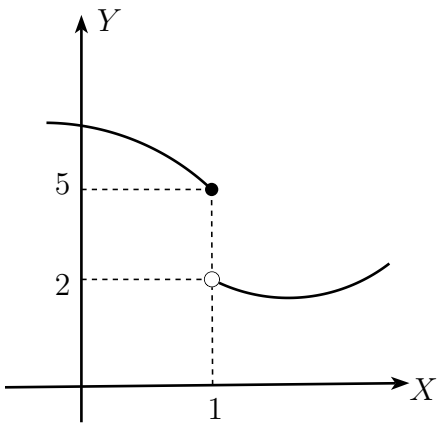
Pauta Interrogación 1. Mat 1610.

1. *a*) Muestre, usando la definición, que $\lim_{x\to 2}(3x-10) = -4$.

   b) Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} a^2x^2 + 2x - a & , \text{si } x > 1 \\ \\ 3ax + 1 & , \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

   y g la función cuyo gráfico se muestra en la siguiente figura.



   Detemine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\lim_{x\to 1}[f(x) + g(x)]$$

   exista.

Solución.

a) Sea $\varepsilon > 0$. Queremos encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |(3x-10)+4| < \varepsilon. \tag{1}$$

De la inecuación $|(3x-10)+4| < \varepsilon$ se tiene que $|x-2| < \varepsilon/3$. Luego, la propiedad (1) se cumple si tomamos $\delta = \varepsilon/3$.

b) Tenemos que $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$ existe si y solo si

$$\lim_{x\to 1^+}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to 1^-}[f(x)+g(x)].$$

Del gráfico podemos obtener que $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x) = 2$ y $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x) = 5$. De esta manera, utilizando álgebra de límites laterales, tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}[f(x)+g(x)] &= \lim_{x\to 1^+}[a^2x^2+2x-a+g(x)] \\ &= \lim_{x\to 1^+}(a^2x^2+2x-a) + \lim_{x\to 1^+} g(x) \\ &= a^2-a+4\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-}[f(x)+g(x)] &= \lim_{x\to 1^-}[3ax+1+g(x)] \\ &= \lim_{x\to 1^-}(3ax+1) + \lim_{x\to 1^-} g(x) \\ &= 3a+6.\end{aligned}$$

Por lo tanto, $\lim_{x\to 1}[f(x)+g(x)]$ existe si y solo si a es solución de la ecuación

$$a^2-a+4 = 3a+6,$$

es decir, cuando $a = 2 \pm \sqrt{6}$.

□

2. Calcular, sin utilizar la Regla de L'hospital, los siguientes límites.

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2-9}-x)$.

c) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sin(x^2+7x+2)}{\sqrt{x+4}}$.

Solución.

a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\sqrt[3]{x}-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)}{(\sqrt[3]{x}-1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)}{x-1}\\ &= \lim_{x\to 1}(x^2+x+1)((\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}+1)=9.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2-9}-x) &= \lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x^2-9}-x)(\sqrt{x^2-9}+x)}{(\sqrt{x^2-9}+x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-9-x^2}{|x|\sqrt{1-9/x^2}+x}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{-9}{x(\sqrt{1-9/x^2}+1)}=0.\end{aligned}$$

c) Como $-1\leq \sin(x^2+7x+2)\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}$ entonces la desigualdad

$$\frac{-1}{\sqrt{x+4}}\leq\frac{\sin(x^2+7x+2)}{\sqrt{x+4}}\leq\frac{1}{\sqrt{x+4}}$$

se tiene para todo $x>-4$. Como

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-1}{\sqrt{x+4}}=0$$

entonces, por el teorema del Sandwich, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin(x^2+7x+2)}{\sqrt{x+4}}=0.$$

□

3. Calcular, sin utilizar la Regla de L'hospital, los siguientes límites.

a) $\lim_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{2x-\pi}$.

b) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x+3}{\sqrt{4x^2+6}}$.

Solución.

a) Realizando el cambio de variable $u = x - \dfrac{\pi}{2}$ tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1-\operatorname{sen}(x)}{2x-\pi} &= \lim_{u\to 0} \frac{1-\operatorname{sen}\left(u+\frac{\pi}{2}\right)}{2u} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos(u)}{2u} \\ &= 0.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{\sqrt{4x^2+6}} &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x+3}{-x\sqrt{4+6/x^2}} \\ &= \lim_{x\to-\infty} \frac{x(1+3/x)}{-x\sqrt{4+6/x^2}} \\ &= -\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

□

4. *a*) Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} & \text{, si } x \geq 0 \\ \dfrac{\cos(ax)-1}{x^2} & \text{, si } x < 0 \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$.

b) Sea f una función continua en $[3,5]$ tal que $f(3) > 2^3$ y $f(5) < 2^5$. Demuestre que existe $c \in (3,5)$ tal que $f(c) = 2^c$.

Solución.

a) Observe que para todo número real distinto de cero la función f es continua ya que cada una de las ramas de esta función es cociente de funciones continuas en todo $\mathbb{R}$ cuyos denominadores no se anulan en los respectivos tramos de definición.

Para que f sea continua en $x = 0$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^2+1} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(ax)-1}{x^2} = f(0) = -1.$$

Por un lado tenemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2-1}{x^2+1} = -1.$$

El otro límite lateral queda:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(ax)-1}{x^2} &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(ax)-1}{x^2} \cdot \frac{\cos(ax)+1}{\cos(ax+1)} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\text{sen}^2(ax)}{x^2} \\
&= \lim_{x\to 0^-} \frac{-\text{sen}^2(ax)\cdot a^2}{(ax)^2} \\
&= -a^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$, $a = 1$ o $a = -1$.

b) Sea $g(x) = f(x) - 2^x$, observe que g es continua en $[3, 5]$ porque f y 2^x lo son, además por hipótesis tenemos que:

$$g(3) = f(3) - 2^3 > 0 \quad \text{y} \quad g(5) = f(5) - 2^5 < 0.$$

Entonces, por el teorema del valor intermedio tenemos que, existe $c \in (3, 5)$ tal que $g(c) = 0$, es decir, tal que $f(c) = 2^c$.

□