PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2020

Pauta I3 Pregunta 13- MAT1610

1. Sea f la función definida por
$$f(x) = \frac{5x^2 - 3}{x^2 - 1}$$

   a) Determine los intervalos dónde f es creciente.

   b) Determine, en caso que existan, extremos locales y globales de f.

   c) Determine el(los) intervalo(s) dónde f es cóncava hacia abajo.

   d) Bosqueje el gráfico de f incluyendo asíntotas de éste.

Solución:

Observe que $f'(x) = \dfrac{-4x}{(x^2-1)^2}$ obteniendo la siguiente tabla de signos para f'

$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$

por lo tanto f es creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. También de la tabla concluimos que $f(0) = 3$ es máximo local de f.

Derivando nuevamente tenemos que

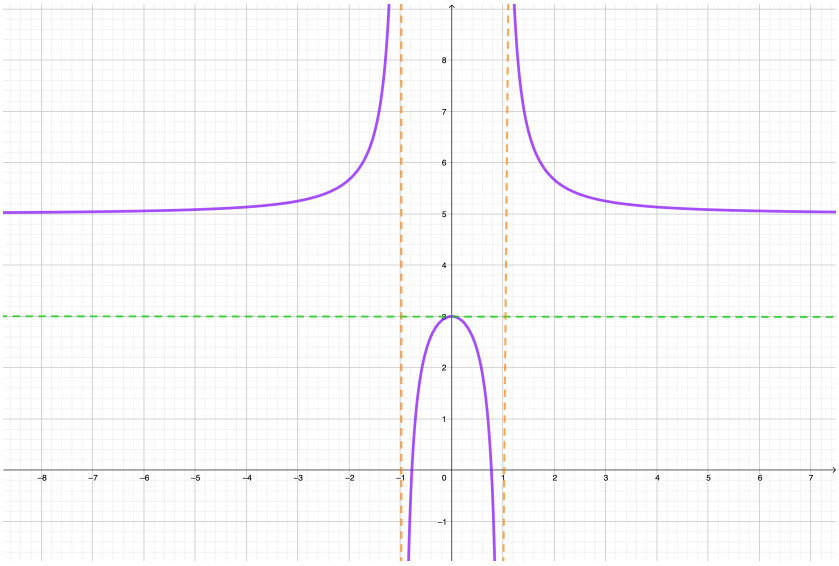
$$f''(x) = \frac{12x^2 + 4}{(x^2-1)^3}$$

obteniendo la siguiente tabla de signos para f''

$f''(x)$	+	$\nexists$	-	$\nexists$	+
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$

por lo tanto la función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-1, 1)$.

El gráfico de f es el de la figura adjunta y sus asíntotas son las rectas $y = 5$, $x = -1$, $x = 1$.



2. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{2x^2 - 4}{x^2 - 1}$$

a) Determine los intervalos dónde f es creciente.

b) Determine, en caso que existan, extremos locales y globales de f.

c) Determine el(los) intervalo(s) dónde f es cóncava hacia arriba.

d) Bosqueje el gráfico de f incluyendo asíntotas de éste.

Solución:

Observe que $f'(x) = \dfrac{4x}{(x^2-1)^2}$ obteniendo la siguiente tabla de signos para f'

$f'(x)$	-	$\nexists$	-	0	+	$\nexists$	+
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$

por lo tanto f es creciente en $(0, 1) \cup (1, \infty)$. También de la tabla concluimos que $f(0) = 4$ es mínimo local de f.

Derivando nuevamente tenemos que

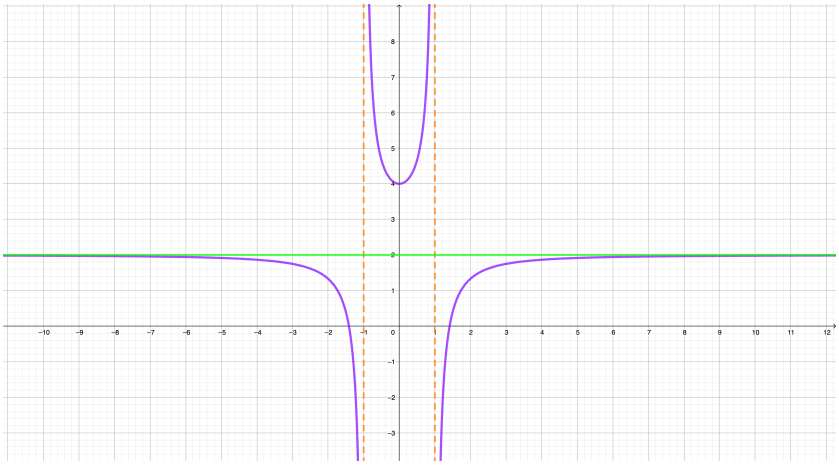
$$f''(x) = -\frac{12x^2 + 4}{(x^2 - 1)^3}$$

obteniendo la siguiente tabla de signos para f''

$f''(x)$	-	$\nexists$	+	$\nexists$	-
	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$

por lo tanto la función f es cóncava hacia arriba en el intervalo $(-1, 1)$.

El gráfico de f es el de la figura adjunta y sus asíntotas son las rectas $y = 2$, $x = -1$, $x = 1$.



3. Sea f la función definida por

$$f(x) = \frac{3x^2 - 3}{x^2 - 4}$$

a) Determine los intervalos dónde f es creciente.

b) Determine, en caso que existan, extremos locales y globales de f.

c) Determine el(los) intervalo(s) dónde f es cóncava hacia abajo.

d) Bosqueje el gráfico de f incluyendo asíntotas de éste.

Solución:

Observe que $f'(x) = \dfrac{-18x}{(x^2 - 4)}$ obteniendo la siguiente tabla de signos para f'

$f'(x)$	+	$\nexists$	+	0	-	$\nexists$	-
	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$

por lo tanto f es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$. También de la tabla concluimos que $f(0) = 3/4$ es máximo local de f.

Derivando nuevamente tenemos que

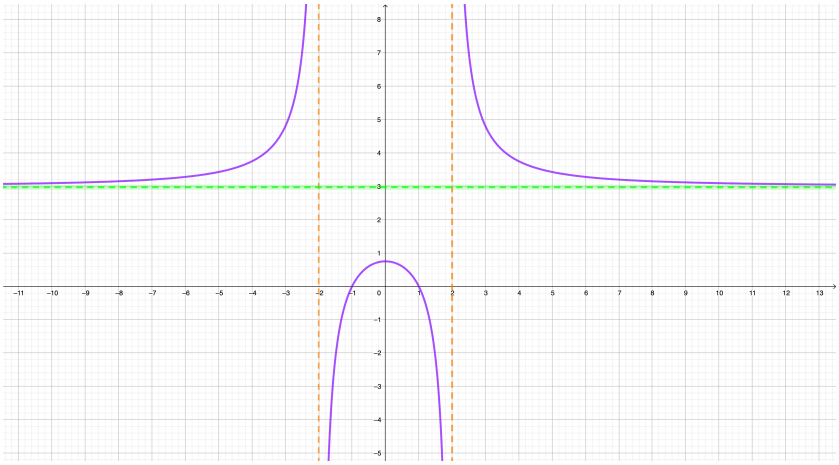
$$f''(x) = \frac{18(3x^2 + 4)}{(x^2 - 2)^3}$$

obteniendo la siguiente tabla de signos para f''

$f''(x)$	+	$\nexists$	-	$\nexists$	+
	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, +\infty)$

por lo tanto la función f es cóncava hacia abajo en el intervalo $(-2, 2)$.

El gráfico de f es el de la figura adjunta y sus asíntotas son las rectas $y = 3$, $x = -2$, $x = 2$.



Distribución de puntajes:

- (1 punto) por determinar dónde f es creciente. No asignar puntaje si no hay desarrollo que justifique.
- (1 punto) por determinar que $f(0)$ es extremo local.
- (1 punto) Por determinar el intervalo dónde se tiene la cóncavidad pedida. No asignar puntaje si no hay desarrollo que justifique.
- (1 punto) por exhibir o nombrar asíntota horizontal.
- (1 punto) por las asíntotas verticales.
- (1 punto) por hacer un bosquejo correctamente.