Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemáticas

Cálculo I
Pauta I1

1. Sea
$$f(x) = \begin{cases} x^4 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 \sin(x) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$
Demuestre, usando la definición de límite, que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

Demostración: Dado $\epsilon > 0$, queremos probar que existe $\delta > 0$ tal que si $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x)| < \epsilon$. Vemos que si $|x| \leq 1$, entonces $|f(x)| \leq |x|^2$, y entonces si $\delta < 1$ y $0 < |x| < \delta$, entonces $|f(x)| < \delta^2$. Así, tomando $\delta = \min\{\sqrt{\epsilon}, \frac{1}{2}\}$, queda demostrado. Observación: aquí el $\frac{1}{2}$ solamente se escogió por ser menor que 1; cualquier número menor que 1 sirve el mismo propósito. □

2. Calcule los siguiente límites:
   (a) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}}$
   (b) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\cos(x)}$

Solución:
(a) Tenemos que
$$\begin{aligned} \frac{x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}} &= \frac{x-1}{\sqrt{x-1}-\sqrt{\sqrt{x}-1}} \cdot \frac{\sqrt{x-1}+\sqrt{\sqrt{x}-1}}{\sqrt{x-1}+\sqrt{\sqrt{x}-1}} \\ &= \frac{(x-1)(\sqrt{x-1}+\sqrt{\sqrt{x}-1})}{x-\sqrt{x}} \\ &= \frac{(x+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{\sqrt{x}-1})}{x}, \end{aligned}$$
y esta función tiende a 0 cuando $x \to 1$. □

(b) Tenemos que
$$\frac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\cos(x)} = \frac{\sin(\sin(\cos(x)))}{\sin(\cos(x))} \cdot \frac{\sin(\cos(x))}{\cos(x)}.$$
Cuando $x \to \frac{\pi}{2}$, $\cos(x) \to 0$, y entonces como $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, obtenemos que el límite es 1 (pues ambos factores arriba tienden a 1). □

3. Demuestre que el polinomio $p(x) = -x^4 + 2x^3 + 2$ tiene por lo menos dos raíces reales.

   Demostración: Sabemos que p es una función continua, y vemos que $p(-1) = -1$, $p(0) = 2$ y $p(3) = -25$. Por el Teorema del Valor Intermedio, existen $x_1 \in (-1, 0)$ y $x_2 \in (0, 3)$ tales que $p(x_1) = p(x_2) = 0$. □

4. ¿Qué condición deberían cumplir los números reales α y β para que la función

$$f(x) = \begin{cases} 3 + \alpha x^2 + x^3 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 + \frac{2\beta}{x+1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

   sea continua en todo $\mathbb{R}$? ¿Y para que sea derivable en todo $\mathbb{R}$?

   Solución: Primero observamos que f es contina y derivable en todo $\mathbb{R}$ menos en 1. Por lo tanto, debemos verificar lo que ocurre en 1. Vemos que

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (3 + \alpha x^2 + x^3) = 4 + \alpha$$

   y

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (x - 1 + \frac{2\beta}{x+1}) = \beta.$$

   Para que f sea continua, estos límites deben coincidir, y entonces f es continua si y solamente si $4 + \alpha = \beta$; es decir, $\alpha - \beta = -4$. Para ver si f es derivable en 1, usamos la definición de derivada. Supongamos que $\alpha - \beta = -4$; si no, f no podría ser derivable en 1. Debería ocurrir que

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

   (y que existan). Tenemos que

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0^-} \frac{3 + \alpha(1+h)^2 + (1+h)^3 - 4 - \alpha}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^-} (3 + 2\alpha + h(\alpha + 3) + h^2) = 2\alpha + 3. \\ \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h + \frac{2\beta}{2+h} - \beta}{h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{h(2+h) + 2\beta - \beta(2+h)}{(2+h)h} \\ &= \lim_{h \to 0^+} \frac{2 + h - \beta}{2 + h} \\ &= 1 - \frac{\beta}{2}. \end{aligned}$$

   Por lo tanto, necesitamos que $\alpha - \beta = -4$ y $2\alpha + 3 = 1 - \frac{\beta}{2}$. Obtenemos entonces que f es derivable en 1 si y solamente si $\alpha = -\frac{8}{5}$ y $\beta = \frac{12}{5}$. □