PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2018

I4 - CALCULO I - MAT1610

1. Calcule, usando integrales, el volumen de:

   a) Una pirámide de base cuadrada de lado a y altura h.

   Solución:
   Observe que si utilizamos secciones transversales, para un x entre 0 y h el área de cada sección transversal es $\left(\frac{ax}{h}\right)^2$, por lo tanto el volumen es:

   $$\int_0^h \left(\frac{ax}{h}\right)^2 dx = \frac{a^2 h}{3}$$

   Distribución del puntaje

   - Por determinar el área de la sección transversal **(1 pto)**.
   - Por plantear la integral **(1 pto)**.
   - Por calcular el volumen **(1 pto)**.

   b) El solido obtenido al girar, en torno a la recta $x = -3$, la región encerrada por las parábolas $y = x^2$ e $y = 2x - x^2$.

   Solución:
   Observe que usando cascarones cilíndricos tenemos que el volumen es:

   $$\int_0^1 2\pi(x+3)(2x - x^2 - x^2)dx = \frac{7\pi}{3}$$

   Distribución del puntaje

   - Por los límites de integración **(1 pto)**.
   - Por plantear la integral **(1 pto)**.
   - Por calcular el volumen **(1 pto)**.

2. a) Suponga que $f(1) = 2, f(4) = 7, f'(1) = 5, f'(4) = 3$ y que f'' es continua. Encuentre el valor de

$$\int_1^4 xf''(x)dx$$

Solución:
Observe que al hacer integración por partes con $u = x$ y $dv = f''(x)$, tenemos que

$$\int xf''(x)dx = xf'(x) - \int f'(x)dx$$

La integral que queda por resolver es directa, obteniendo que:

$$\int xf''(x)dx = xf'(x) - f(x) + C$$

por lo tanto

$$\int_1^4 xf''(x)dx = 4f'(4) - f(4) - f'(1) + f(1) = 2$$

Distribución del puntaje

- Por establecer correctamente u y v en la integración por partes.**(1 pto)**.
- Por determinar la primitiva **(1 pto)**.
- Por calcular **(1 pto)**.

b) Sea f una función continua en todo $\mathbb{R}$. Encuentre el valor de $\int_0^3 xf(x^2)dx$ si se sabe que $\int_0^9 f(x)dx = 4$

Solución:
Al hacer la sustitución $u = x^2$ obtenemos que $du = 2xdx$ obteniendo que:

$$\int_0^3 xf(x^2)dx = \frac{1}{2}\int_0^9 f(u)du = 2$$

textbfDistribución del puntaje

- Por establecer correctamente la sustitución **(1 pto)**.
- Por determinarcorrectamente los nuevos límites de integración **(1 pto)**.
- Por calcular **(1 pto)**.

3. *a)* Calcular $\int_4^5 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx$.

b) Calcular $\int \frac{7}{x^2-2x+7}\,dx$.

Solución:

a) Notar que $x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)$. Luego, usando fracciones parciales tenemos que

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-3}.$$

Para encontrar las constantes A y B debemos resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} A + B &= 3 \\ 3A + B &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Un clculo muestra que las soluciones del sistema anterior son $A = 1$ y $B = 2$. De esta manera

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{x-3}$$

y

$$\int_4^5 \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx = \left(\ln|x-1| + 2\ln|x-3|\right)\Big/_4^5 = 2\ln 4 - \ln 3.$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por la descomposicin en fracciones parciales.
(1 punto) Por encontrar A y B resolviendo el sistema de ecuaciones.
(1 punto) Por calcular correctamente las integrales.

b) Notar que

$$\int \frac{7}{x^2-2x+7}\,dx = \frac{7}{6}\int \frac{1}{\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 1}\,dx.$$

La sustitucin $u = \frac{x-1}{\sqrt{6}}$ transforma la primitiva anterior en

$$\frac{7\sqrt{6}}{6}\int \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{7\sqrt{6}}{6}\arctan(u) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto

$$\int \frac{7}{x^2-2x+7}\,dx = \frac{7\sqrt{6}}{6}\arctan\left(\frac{x-1}{\sqrt{6}}\right) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por la completacin de cuadrados.
(1 punto) Por la sustitucin $u = \frac{x-1}{\sqrt{6}}$.
(1 punto) Por calcular correctamente la primitiva final.

Nota: Se descontar 0.5 puntos si no se considera la constante de integracin.

4. *a*) Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$.

b) Calcular $\displaystyle\int_0^1 xe^{7x}\,dx$.

Solución:

a) Usando la sustitucin $x = 2\sin\theta$, tenemos que $dx = 2\cos\theta\,d\theta$. Imponiendo la restriccin $\theta \in]-\pi/2, \pi/2[$ tenemos que $\theta = \arcsin(x/2)$. Luego,

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \int \frac{4\sin^2\theta}{\sqrt{4-4\sin^2\theta}}\,2\cos\theta d\theta = 4\int \sin^2\theta\,d\theta. \tag{1}$$

Usando la identidad

$$\sin^2\theta = \frac{1-\cos(2\theta)}{2}$$

tenemos que

$$\int \sin^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\sin(2\theta)}{2}\right). \tag{2}$$

Reemplazando (**??**) en (**??**) tenemos que

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 4\int \sin^2\theta\,d\theta = 2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Como $x = 2\sin\theta$, entonces $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x}$. Finalmente

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 2\arcsin\left(\frac{x}{2}\right) - \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por la sustitucin $x = 2\sin\theta$ o $x = 2\cos\theta$.
(1 punto) Por el clculo de $\displaystyle\int \sin^2\theta\,d\theta$.
(1 punto) Por el resultado final.

Nota: Se descontar 0.5 puntos si no se considera la constante de integracin.

b) Si $u = x$ y $dv = e^{7x}\,dx$ entonces $du = dx$ y $v = e^{7x}/7$. Luego,

$$\begin{aligned}\int_0^1 xe^{7x}\,dx &= \frac{xe^{7x}}{7}\bigg|_0^1 - \frac{1}{7}\int_0^1 e^{7x}\,dx \\ &= \frac{e^7}{7} - \frac{1}{49}e^{7x}\bigg|_0^1 \\ &= \frac{6e^7}{49}.\end{aligned}$$

Distribución de puntaje:
(1 punto) Por la eleccin adecuada de u y dv, y determinar correctamente du y v.
(1 punto) Por aplicar correctamente la frmula de integracin por partes.
(1 punto) Por calcular correctamente la integral final.