

Pontificia Universidad Católica de Chile

Facultad de Matemática

Cálculo 1

Apuntes

Claudio Rivera

Mat 1610

Santiago - 28 de agosto de 2010

Índice

1.1. Introducción . . . 3
1.2. Axioma del Supremo . . . 4
1.3. Definición de Convergencia . . . 5
1.4. Propiedades de los Límites . . . 7
1.5. Teorema del Sandwich . . . 9
1.6. Número e . . . 9
2.1. Límite puntual de funciones . . . 12
2.2. Asíntotas . . . 15
2.3. Continuidad . . . 17
2.4. Teorema del valor intermedio . . . 18
3.1. Derivada y su interpretación . . . 20
3.2. Relación entre continuidad y diferenciabilidad . . . 23
3.3. Reglas de derivación . . . 24
3.4. Derivada de la inversa y logarítmica . . . 26
3.5. Derivada de orden superior e implícita . . . 27
3.6. Teorema del Valor Medio & Rolle . . . 28
4.1. Crecimiento y decrecimiento de funciones . . . 32
4.2. Mínimos & Máximos . . . 34
4.3. Regla de L'Hospital . . . 35
4.4. Aproximación de Taylor . . . 36
5.1. Sumas de Riemann . . . 39
5.2. Funciones continuas . . . 42
5.3. Propiedades de la Integral . . . 44
5.4. Teorema Fundamental del Cálculo . . . 46
5.5. Integrales Conocidas . . . 48
5.6. Cambio de Variable . . . 48
6.1. Función Logaritmo . . . 52
6.2. Función Exponencial . . . 54
6.3. Crecimiento Exponencial . . . 54
6.4. Funciones Hiperbólicas . . . 55
7.1. Integral Indefinida . . . 57
7.2. Fórmulas Básicas de Integración . . . 58
7.3. Integración por Partes . . . 59
7.4. Integración por Substitución . . . 59
7.5. Fórmulas de Reducción . . . 61
7.6. Integración de Funciones Racionales . . . 62
8.1. Integrales Impropias de Primera Especie . . . 65
8.2. Integrales Impropias de Segunda Especie . . . 67
8.3. Criterios de Convergencia . . . 69
8.3.1. Criterios de Convergencia para Primera Especie . . . 69
8.3.2. Criterios de Convergencia para Segunda Especie . . . 69

Límites de Sucesiones

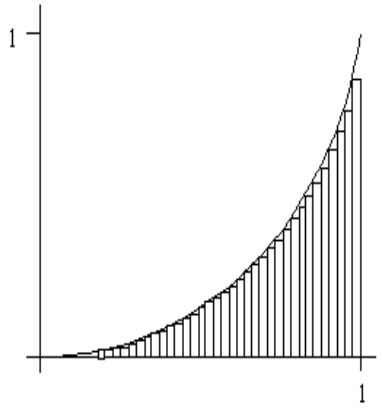
1.1. Introducción

La palabra **cálculo** proviene del latín *calculus*, que significa contar con piedras. Precisamente desde que el hombre ve la necesidad de contar, comienza la historia del cálculo, o de las matemáticas.

Las matemáticas son una de las ciencias más antiguas, y más útiles. El concepto de matemáticas, se comenzó a formar, desde que el hombre vio la necesidad de contar objetos, esta necesidad lo llevó a la creación de sistemas de numeración que inicialmente se componían con la utilización de los dedos, piernas, o piedras. De nuevo, por la necesidad, se hizo forzosa la implementación de sistemas más avanzados y que pudieran resolver la mayoría de los problemas que se presentaban con continuidad.

A continuación presentaremos dos problemas de la antiguedad que motivaron la creación de de una matemática más elavorada que pudiera abordar temas que hasta entonces no tenian un clara solución.

Problema. Consideremos el problema de deterimnar el área bajo la curva de una parábola por ecuación $f(x) = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$. Si nos remontaramos a la antigua Grecia nuestro maestro seguramente nos preguntaría: "¿Cuál es la figura geométrica más sencilla con la cuál intentarías aproximar el área de esa región?". Posiblemente nuestra respuesta sería un triángulo, pero como muestra la figura de acontinuación también es posible hacerlo mediante rectángulos, cuyo techo está acotado por la gráfica de la parábola y de ancho constante $1/n$.



Así, el área de la sucesión de rectángulos está dada por

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n} + \frac{1}{n}\cdot\frac{3}{n} + \cdots + \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n} \\ &= \frac{1+2+3+\cdots+n-1}{n^2} \\ &= \frac{(n-1)n}{2n^2}\end{aligned}$$

Evidentemente, en la medida que n crece la sucesión de rectángulos aproxima por debajo el área encerrada por la curva en el intervalo $[0,1]$. De este modo, nos interesa determinar el área de la sucesión de rectángulos cuando n va hacia infinito. Un cálculo sencillo prueba que el límite buscado es $1/2$.

Lo anteriormente expuesto debería dejarnos una sensación de insatisfacción, ya que el área encontrada depende de la sucesión de figuras geométricas que aproximan interiormente el área acotada por la parábola. Más aún, ¿sería posible obtener un valor diferente a $1/2$ si aproximamos por otras figuras geométricas?, ¿Si hubieramos aproximado exteriormente el área, obtendríamos el mismo resultado? Así se abre un universo lleno de preguntas que, a lo largo de estos 2000 años, se le han buscado un sin fin de respuestas.

Problema. Aquiles fue el más temible de los príncipes aqueos que asediaron Troya: el mezquino enfrentamiento que mantuvo con Agamenón, jefe del ejército griego, y a causa del cual se automarginó de la lucha constituye el tema central de La Ilíada, y le garantizó un lugar de honor en la historia de la

literatura. Pero, aunque parezca mentira, Aquiles también jugó un papel muy destacado en la historia de las matemáticas, nada menos que como competidor de una tortuga. Y es así: en el siglo V a.c., el filósofo griego Zenón de Elea planteó una serie de paradojas sobre el movimiento: una flecha, decía Zenón, para llegar al blanco tiene que pasar por todos los puntos de su trayectoria. Como éstos son infinitos, y la flecha forzosamente tiene que estar en cada uno de ellos, tardará un tiempo infinito en llegar al blanco. Otra: para recorrer el camino hasta una pared, una persona debe primero recorrer la mitad del camino, pero antes de recorrer la mitad, debe recorrer la cuarta parte, y antes la octava, y antes la dieciseisava. Como esa regresión es infinita, el fulano en cuestión no llega nunca hasta la pared. Pero la más famosa de todas las paradojas de Zenón es, sin duda alguna, la de Aquiles y la tortuga. Supongamos, decía Zenón, que Aquiles, que corre cinco veces más rápidamente que una tortuga, juega con ella una carrera dándole una ventaja de cinco kilómetros. Cuando Aquiles recorra esos cinco kilómetros, la tortuga habrá avanzado un kilómetro. Cuando Aquiles cubra ese kilómetro que lo separa ahora de su contrincante, Ésta habrá caminado a su vez un quinto de kilómetro, es decir, doscientos metros. Pero cuando Aquiles trate de alcanzarla corriendo esos doscientos metros, la tortuga habrá recorrido cuarenta metros. Y una vez que Aquiles salve esos cuarenta metros, con la esperanza de alcanzarla, la tortuga habrá avanzado ocho metros, y todavía le llevará ventaja. Una ventaja que disminuye sin cesar, pero que siempre está, porque cada vez que Aquiles recorre la distancia que lo separa de la tortuga, ésta, en ese lapso de tiempo, se habrá movido algo, por poco que sea, y en consecuencia, lleva siempre la delantera. Conclusión: Aquiles nunca la alcanza. El planteo de Zenón era muy agudo y el asunto de Aquiles y la tortuga fue un dolor de cabeza para la matemática y la filosofía griegas. Dado que es muy fácil constatar que, no sólo Aquiles, sino cualquiera alcanza efectivamente a una tortuga, el razonamiento de Zenón tenía que esconder una equivocación. Pero ¿cuál? La respuesta tarda la friolera de veintiún siglos en llegar. Y la verdad es que para la matemática griega los problemas de Zenón eran irresolubles porque involucraban sumas infinitas. Efectivamente, los recorridos sucesivos de Aquiles son: cinco kilómetros, un kilómetro, doscientos metros, cuarenta metros, ocho metros, etc... y los correspondientes de la tortuga son un kilómetro, doscientos metros, cuarenta metros, ocho metros, un metro 2 sesenta centímetros, etc. Para calcular el recorrido total de uno y de otra, habría que sumar todos esos tramos sucesivos. Pero como son infinitos, la suma, aparentemente no puede hacerse. Hubo que esperar hasta el siglo diecisiete, cuando el matemático escocés James Gregory (1638-1675) estudió por primera vez y de manera sistemática la herramienta necesaria para terminar con el dilema de Zenón: las series convergentes, sumas que a pesar de tener un número infinito de términos, dan como resultado un número finito. Por ejemplo, la suma $1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + 1/32 + 1/64 + ...$, puede hacerse, y da exactamente 1. Los recorridos parciales de Aquiles y de la tortuga en el problema de Zenón constituyen, precisamente, series convergentes. Si sumáramos los infinitos tramos (los de Aquiles: 5 kilómetros + 1 kilómetro + 200 metros + 40 metros + 8 metros...) y los correspondientes de la tortuga (1 kilómetro + 200 metros + 40 metros + 8 metros + 1,60 metros +...) obtendríamos, para Aquiles 6,25 kilómetros, y para la pobre tortuga 1,25 kilómetros. Como Aquiles le había dado 5 kilómetros de ventaja, al recorrer uno 6,25 y la otra 1,25 kilómetros, coinciden en el mismo punto. Gracias a las series convergentes, la famosa paradoja de Zenón queda aclarada y Aquiles alcanza a la tortuga de una buena vez. Lo cual era justo, después de perseguirla durante más de dos mil años.

1.2. Axioma del Supremo

La palabra *axioma* en su raíz significa "verdad". Un axioma es una proposición tan clara y evidente que no requiere demostración. En el formalismo matemático la palabra axioma adquiere un caracter de *principio fundamental* e *idemostrable* sobre el cuál se contruye una teoría. Así el *Axioma de supremo* será uno de los pilares fundamentales sobre el cuál se contruirá la matemática moderna. A continuación introduciremos algunos conceptos que nos permitirán vislumbrar con mayor claridad dicho axioma.

Definición 1. Sea A un subconjunto de los números reales. Si existe un número real b tal que $x \leq b$ para todo $x \in A$, diremos que b es **cota superior** de A y que S está **acotado superiormente**. Si b es cota superior de A con $b \in A$, diremos que b es **elemento máximo** de A. En tal caso denotaremos

$$b = \text{máx}\, A$$

Un conjunto carente de cota superior se denomina *no acotado superiormente*. Las definiciones de los

términos *cota inferior*, *acotado inferiormente* y *elemento mínimo*, pueden formularse análogamente a la definición anterior. Si A tiene elemento mínimo, éste será denotado mín A.

Ejemplo. El conjunto $A = (0, \infty)$ es un conjunto no acotado superiormente. No posee ni cotas superiores ni elemento máximo. Está acotado inferiormente por 0, pero no posee elemento mínimo.

Ejemplo. El intervalo cerrado $A = [0, 1]$ está acotado superiormente por 1 e inferiormente por 0. De hecho el máximo de A es 1 y el mínimo de A es 0.

Ejemplo. El intervalo semiabierto $A = [0, 1)$ está acotado superiormente por 1 pero carece de elemento máximo. Su elemento mínimo es 0.

Definición 2. Sea A un subconjunto de los números reales. Diremos que b es **supremo** de A si se satisfacen las siguientes condiciones:

(i) b es cota superior de A.

(ii) Ningún número menor que b es cota superior de A.

En tal caso denotaremos

$$b = \sup A$$

Ejercicio. Sea A un conjunto que tiene elemento máximo. Demuestre que $\sup A$ existe y

$$\sup A = \text{máx}\, A.$$

Análogamente se puede definir el *ínfimo* de un conjunto. Si A posee ínfimo, éste será denotado ínf A.

Ahora estamos en condiciones de enunciar el Axioma del Supremo.

Axioma del Supremo. Todo conjunto no vacío A de los números reales que esté acotado superiormente admite un supremo; es decir, existe un número real b tal que $b = \sup A$.

Como consecuencia del axioma anterior se obtiene que todo conjunto acotado inferiormente admite un ínfimo.

1.3. Definición de Convergencia

Definición 3. Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales y $l \in \mathbb{R}$. Diremos que a_n **converge** a l si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq N.$$

En este caso denotaremos,

$$l = \lim_{n \to \infty} a_n$$

Una de las primeras consecuencias en la definición anterior es que toda sucesión monótona y acotada es convergente. Para demostrar esta afirmación consideremos, sin pérdida de generalidad, una sucesión creciente y acotada $\{a_n\}$ y el conjunto

$$A = \{a_n \,:\, n \in \mathbb{N}\}$$

Por el axioma del supremo sabemos que existe $s \in \mathbb{R}$ tal que s es supremo de A. Luego $\{a_n\}$ converge a s, ya que en caso contrario existiría $\varepsilon > 0$ tal que $a_n \notin (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y en consecuencia $\tilde{s} = s - \varepsilon/2$ sería cota superior de A menor que s. Esto nos llevaría a una contradicción al suponer que $\{a_n\}$ no converge a s, lo que concluye la demostración de nuestra afirmación.

Ejemplo. Consideremos la sucesión

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Es claro que a_n es creciente y que $2^{k-1} \leq k!$ para todo $k \geq 2$. Luego,

$$a_n \leq 1 + 1 + \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} = 1 + \frac{1 - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}} \leq 3$$

Por lo tanto $\{a_n\}$ converge a un número que denotaremos por e, conocido como la constante de Euler, que es el supremo del conjunto generado por los a_n.

Ejemplo. Consideremos la sucesión $\{a_n\}$ definida recursivamente

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{9 + a_n^2}{2}}$$

Para demostrar que $a_{n+1} \geq a_n$ es necesario y suficiente que $a_{n+1}^2 \geq a_n^2$ ya que $a_n > 0$ para todo n. Luego,

$$a_{n+1}^2 \geq a_n^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{9 + a_n^2}{2} \geq a_n^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_n \leq 3$$

Pero, mediante el proceso de inducción, es posible demostrar que $a_n \leq 3$ para todo valor $n \in \mathbb{N}$. De este modo a_n es una sucesión creciente y acotada. Por lo tanto, la sucesión a_n converge a un límite que denotaremos por ahora con la letra l. En la próxima sección estaremos en posición de calcular este límite de forma explícita, luego de probar algunas propiedades de los límites.

Uno de los problemas más grande en convergencia de sucesiones es probar por definición dicha convergencia. En los siguientes ejemplos expondremos algunos problemas simples de cálculo de límites por definición, que podrían ayudarnos a solucionar futuros ejercicios.

Ejemplo. Sea $a_n = \dfrac{4n+1}{2n+3}$ una sucesión y $l = 2$ el posible límite. Sea $\varepsilon > 0$ luego debemos determinar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - l| < \varepsilon \quad \text{si} \quad n \geq N$$

Deseamos determinar $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - l| = \frac{5}{2n+3} < \varepsilon$$

cada vez que $n \geq N$. De este modo, es necesario resolver la inecuación $\frac{5}{2n+3} < \varepsilon$ para $\varepsilon > 0$ dado y $n \in \mathbb{N}$. Es claro que

$$\frac{5 - 3\varepsilon}{2\varepsilon} < n$$

luego, para $N = \left[\frac{5-3\varepsilon}{2\varepsilon}\right] + 1$ se satisface la definición de convergencia.

Ejemplo. Sea $a_n = \left(\dfrac{n+2}{2n+1}\right)^2$ y $l = 1/4$. Siguiendo los pasos del ejemplo anterior tenemos que

$$|a_n - l| = \left|\frac{12n - 15}{4(2n+1)^2}\right| \leq \frac{3n}{(2n+1)^2} \leq \frac{3}{4n} < \varepsilon$$

que es cierto siempre y cuando $n \geq N = \left[\frac{3}{4\varepsilon}\right] + 1$.

Ejemplo. Sea $a_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n+1}$ y $l = 1$. Siguiendo los pasos del ejemplo anterior tenemos que

$$|a_n - l| = \frac{2n}{(n+1)(\sqrt{n^2+1} + \sqrt{n^2+2n+1})} \leq \frac{2n}{(n+1)^2} \leq \frac{2}{(n+1)} < \varepsilon$$

que es cierto siempre y cuando $n \geq N = \left[\frac{2-\varepsilon}{\varepsilon}\right] + 1$.

Ejemplo. Consideremos la sucesión $a_n = n^{-p}$, siendo $p > 0$. En este caso podemos notar que los términos de la sucesión se hacen pequeños en la medida que n crece. Probaremos a partir de la definición anterior que la sucesión converge a cero. Para ello es necesario darnos cualquier $\varepsilon > 0$ y demostrar que existe un natural N (que podría depender del ε elegido) tal que $|a_n| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$.

Supongamos en un primer momento que $p > 1$, luego se satisface que $n < n^p$ para todo natural n. Luego, dado $\varepsilon > 0$ existe un natural N tal que

$$|a_n| < \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

para todo $n > N$.

Ahora consideremos el caso general. Sea $\varepsilon > 0$ y definamos $R = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon^p}}$, luego la siguiente desigualdad

$$|a_n| < \varepsilon = \frac{1}{R^p}$$

es cierta cada vez que $n > R$. Luego elegimos $N = [R]$, donde $[R]$ denota el mayor entero menor que R.

Ejemplo. La sucesión $a_n = 2^n$ no converge ya que si existiera $l \in \mathbb{R}$ tal que a_n converge a l tendríamos que $|a_n - l| < \varepsilon$ para todo n suficientemente grande. Por propiedades de los números reales sabemos que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $k \leq l < k + 1$, luego $|a_n - l| \geq 1$ para n suficientemente grande.

Ejercicio. Determine para que valores de $r \in \mathbb{R}$ la sucesión $a_n = r^n$ converge.

1.4. Propiedades de los Límites

Teorema 4.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$$

Teorema 5. *Sea a_n una sucesión convergente, luego el conjunto $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado. En particular existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplo. La sucesión $a_n = \dfrac{n+1}{2n+3}$ converge a $l = 1/2$ cuando n va a infinito. Y podemos ver que

$$|a_n| \leq \frac{n+3}{2n+3} \leq \frac{2n+3}{2n+3} = 1$$

concluyendo así que a_n está acotada.

Ejemplo. La sucesión $a_n = (-1)^n$ es acotada y no convergente.

Teorema 6. *Sean a_n y b_n sucesiones de números reales convergentes. Luego,*

(a) $\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$

(b) $\lim_{n\to\infty} (\alpha a_n) = \alpha \lim_{n\to\infty} a_n$

(c) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$

(d) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$

Ejemplo. Recordemos el ejemplo de la sucesión $\{a_n\}$ definida recursivamente

$$a_1 = 1, \qquad a_{n+1} = \sqrt{\frac{9 + a_n^2}{2}}$$

Sabiamos que a_n convergía a un límite l. Luego usando las propiedades de los límites obtenemos

$$l^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{9 + a_n^2}{2} = \frac{9 + l^2}{2}$$

concluyendo así que l puede ser ± 3. Dado que a_n es siempre un número no negativo, se deduce que $l = 3$.

Ejercicio. Usando las propiedades de los límites calcule:

(a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

(b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$.

(c) $\lim_{n\to\infty} a_n$ para $a_n = \dfrac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

(d) $\lim_{n\to\infty} a_n$ si $a_1 = 1$ y $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(a_n + \dfrac{1}{a_n}\right)$.

Definición 7. Sea a_k una sucesión de números reales y

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$$

la **suma parcial** de los términos a_k. Definimos la **serie** de términos a_k como

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots$$

En la definición anterior hemos de notar que el símbolo asociado a la serie de términos a_k es solo un *dibujo* que representa el límite de s_n cuando n va al infinito. En caso que s_n converge a un número real s diremos que la *serie converge*, en caso contrario diremos que la *serie diverge*.

Ejemplo. Sea $r \neq 1$ un número real y definamos $a_k = r^k$. Luego, la suma parcial de los términos a_k está dada por

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

Luego,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-r} & \text{si } |r|<1 \\ \infty & \text{si } |r|>1 \end{cases}$$

Los casos $r \in \{-1, 1\}$ se analizarán en el próximo curso cuando se analice la convergencia de series.

Ejemplo. A continuación analizaremos la convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$. Mediante sumas paciales y fracciones parciales tenemos

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

que converge a 1 cuando n va al infinito. Por lo tanto la serie converge.

Ejercicio. Considere la suma parcial $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Demuestre que $s_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$ y concluya que la serie de términos $a_k = \dfrac{1}{k}$ no converge.

Ejercicio. Determine que la serie

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!(k+1)}$$

converge y calcule su límite.

1.5. Teorema del Sandwich

Teorema 8. *Sean $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ sucesiones de números reales tales que*

$$a_n \leq b_n \leq c_n$$

para todo natural n, y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = l = \lim_{n\to\infty} c_n$$

Entonces el límite de la sucesión b_n existe y es igual a l.

En los siguientes ejercicios se verá la importancia de los teoremas recién demostrados.

Ejercicio. Probar el límite

$$\lim_{n\to\infty} n^{1/n} = 1$$

Ejercicio. Sea $0 < A < \infty$. Demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} A^{1/n} = 1$$

Ejercicio. Calcule los siguientes límites de las siguientes sucesiones:

(a) $a_n = r^n$ para distintos valores de $r \in \mathbb{R}$.

(b) $b_n = r^n/n!$ con $r \in \mathbb{R}$

(c) $c_n = n!/n^n$.

(d) $d_n = \frac{n^5+3n^2-3}{7n^5+n^2-2}$

(e) $a_n = (2^n + 3^n)^{1/n}$

(f) $b_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1}$

(g) $c_n = (n+1)^{1/3} - n^{1/3}$

(h) $d_n = \frac{2n^4-3n+1}{4n^n+7n^2-5}$

(i) $a_n = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$

(j) $b_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{7}{k^2-1}$

(k) $c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$

Ejercicio. Demuestre

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(2n)^2} \right) = 0$$

1.6. Número e

Una de las primeras preguntas que debieramos hacernos es si la constante de Euler e es un número racional. Recordemos que

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

en el sentido que la suma parcial asociada a la sucesión $a_k = 1/k!$ converge. Si $e = \frac{m}{n}$ con $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, entonces

$$n!(e - s_n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!}$$

siendo s_n la suma parcial de los términos $1/k!$ hasta el término n. Pero $n!(e - s_n)$ es un número natural evidentemente positivo. Por otro lado,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n!}{k!} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^k} = \frac{1}{n} < 1$$

que es una contradicción ya que habiamos visto que la anterior suma resultaba ser un número positivo. De este modo, resulta imposible que e sea un número racional.

Notemos que para todo natural n se satisface

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!n^k} \cdot \frac{1}{k!} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

además

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Ejercicios Límite de Sucesiones

1.- Cálcule los siguientes límites

a) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{1+n^2}-\sqrt{n}}{n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{7^n}\left(2+\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

2.- Sabiendo que $s=\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k^3}$

a) Determine en términos de s el valor de $\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^3}$

b) Demuestre que $\dfrac{1}{2}<s<\dfrac{3}{2}$

Límites y Continuidad

2.1. Límite puntual de funciones

Definición 1. Sea A un subconjunto de los números reales. Diremos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto límite** de A si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que $A \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ es distinto de vacío.

Los puntos límites de un conjunto son aquellos números reales que están infinitamente cerca del conjunto. Por ejemplo todo punto $x \in [0, 1]$ es punto límite de $(0, 1)$.

Definición 2. Sea $f : B \to \mathbb{R}$ una función y b un punto límite de B. Diremos que l es el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a b, y denotaremos $\lim_{x\to b} f(x) = l$, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |x - b| < \delta$$

Al igual que en el caso de sucesiones esto significa intuitivamente que cuando la variable x se acerca a x_0 a lo largo del dominio de f, el valor de la función $f(x)$ se acerca a l.

Ejemplo. Consideremos la función$f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2$. Calculemos $\lim_{x\to 1} f(x)$ por definición. Intuitivamente el posible valor de el límite es 1. Sea $\varepsilon > 0$ luego

$$|f(x) - 1| = |x^2 - 1| = |x - 1||x + 1| \leq 2|x - 1|$$

para todo $x \in [0, 1]$. De este modo si elegimos $\delta = \varepsilon/2$ se tiene

$$|x^2 - 1| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad |x - 1| < \delta$$

Hacemos notar que el valor, y la existencia, del límite no dependen del valor de la función en el punto x_0 sino del valor de f en los puntos del dominio cercanos a x_0. La función f ni siquiera necesita estar definida en x_0 para definir $\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Ejemplo. Considere la función $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, luego el límite cuando $x \to 1$ es 2. Para ello notemos que

$$f(x) = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1$$

Luego para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que

$$|f(x) - 1| = |x|$$

eligiendo así $\delta = \varepsilon$.

El siguiente ejemplo muestra que es posible la no existencia de un límite de funciones.

Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{|x - 2|}$$

Luego para todo $x < 2$ se tiene que $|x - 2| = -(x - 2)$. Así, es fácil ver que

$$f(x) = -\frac{x^2 - 4}{x - 2} = -(x + 2)$$

cuyo límite es -4 cuando x tiene a 2 por la izquierda.

Ahora supongamos que $x > 2$ luego $|x - 2| = x - 2$ y se tiene que

$$f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2} = x + 2$$

con límite 4 cuando x tiende a 2 por la derecha.

Con el ejemplo anterior podemos notar que es posible tener funciones que pueden tomar diferentes valores cuando la variable se acerca lateralmente a un punto dado. Los límites anteriormente calculados son denominados *límites laterales*.

Definición 3. Diremos que l es **límite por la derecha** de $f(x)$ cuando x tiende a b, y denotaremos $l = \lim_{x\to b^+} f(x)$, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad b < x < b + \delta$$

Diremos que l es **límite por la izquierda** de $f(x)$ cuando x tiende a b, y denotaremos $l = \lim_{x\to b^-} f(x)$, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad b - \delta < x < b$$

Teorema 4. *Sea f una función y b un punto límite en el dominio de f. Luego,*

$$\lim_{x\to b} f(x) = l \qquad \text{si y sólo si} \qquad \lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^+} f(x)$$

Ejemplo. Consideremos la función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Luego para todo $x > 0$ se tiene que $f(x) = 1$ mientras que para todo $x < 0$ se cumple que $f(x) = -1$. Por lo tanto,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$$

concluyendo gracias al teorema anterior que el límite no existe cuando x tiende a cero de la función f.

Ejercicio. Sea f la función definida por tramos

$$f = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 17 & \text{si } x = 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ x^2 - 7 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Grafique la función f y demuestre que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

Propiedades. Algunas de las propiedades más importantes del límite de funciones son las siguientes:

(a) $\lim_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to a} f(x)$ cada vez que el último límite existe.

(b) $\lim_{x\to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$ siempre y cuando los dos últimos límites existan.

Estas propiedades se conocen por *linealidad del límite*.

Teorema 5. *Sean $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo $x \in (a - R, a + R)$ para algún $R > 0$. Si*

$$\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$$

luego

$$\lim_{x\to a} g(x) = l$$

Definición 6. Diremos que una función f es acotada en su dominio si existe una constante $M > 0$ tal que

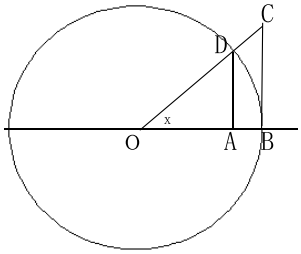
$$|f(x)| \leq M$$

para todo $x \in \text{Dom} f$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ que está definida para todo $x \neq 0$. No es difícil probar que f es continua fuera del origen. Analicemos la continuidad para $x = 0$. Recordemos que para todo $|x|$ pequeñoo se tiene que $|\sin(x)| \leq |x|$, luego

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leq 1$$

Por otro lado, consideremos la siguiente figura:



se tiene que el área del triángulo OBC es mayor que el área de la sección circular OBD. De este modo se tiene la siguiente relación

$$\frac{x}{2} \leq \frac{|\tan(x)|}{2} \qquad \Longrightarrow \qquad |\cos(x)| \leq \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

Luego por el Teorema de Sandwich se tiene

$$1 = \lim_{x\to 0} \cos(x) \leq \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

De este modo, si definimos $f(0) = 1$ se tiene que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)$$

y tendríamos que f es continua.

Teorema 7. *Si* $\lim_{x\to a} f(x) = l$ *y* $\lim_{x\to a} g(x) = m$ *luego*

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = l \cdot m$$

Si $m \neq 0$ *además se tiene*

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$$

Ejercicio. Demuestre que si $f(x) = x$ entonces para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x) = a$$

Luego concluya que

$$\lim_{x\to a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$$

Ejercicio. Calcule los límites

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to 0} \tan(x)$$

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \sin(x)$. Recordemos que $f(x)$ tiende a 0 cuando x tiene a cero, luego para todo número real a se satisface

$$\sin(x) = \sin(x - a + a) = \sin(x - a)\cos(a) + \sin(a)\cos(x - a)$$

que tiende a $\sin(a)$ cuando x tiende a a usando la linealidad del límite y el teorema del sandwich.

Ejercicio. Calcule los siguientes límites:

(a)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x^4}{x^7+x}$$

(b)
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^3-3x}{x^2+1}$$

(c)
$$\lim_{x\to -3} \frac{x+3}{x^3-2x^2-3x}$$

(d)
$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^2-4x+4}$$

(e)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2(x)-1}{\sin(x)}$$

(f)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(7x)}{x}$$

(g)
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2}$$

2.2. Asíntotas

Definición 8. Sea f una función y b un número real. Denotaremos

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \infty$$

si y sólo si para todo $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > R \qquad \text{cuando} \qquad b-\delta < x < b$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x/(x+1)$ y $x = -1$. Luego para todo $x < -1$ se tiene que

$$\frac{x}{x+1} > R \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1-\delta = -\frac{R}{R-1} < x < -1$$

Eligiendo así $\delta = 1/(R-1)$.

Definición 9. Sea f una función y b un número real. Denotaremos

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = -\infty$$

si y sólo si para todo $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < -R \qquad \text{cuando} \qquad b-\delta < x < b$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x/(x-1)$ y $x = 1$. Luego para todo $0 < x < 1$ se tiene que

$$\frac{x}{x-1} < -R \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1-\delta = \frac{R}{R+1} < x < 1$$

Eligiendo así $\delta = 1/(R+1)$.

Definición 10. Sea f una función y b un número real. Denotaremos

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = \infty$$

si y sólo si para todo $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) > R \qquad \text{cuando} \qquad b < x < b + \delta$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x/(x-1)$ y $x = 1$. Luego para todo $x > 1$ se tiene que

$$\frac{x}{x-1} > R \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < x < \frac{R}{R-1} = 1 + \delta$$

Eligiendo así $\delta = 1/(R-1)$.

Definición 11. Sea f una función y b un número real. Denotaremos

$$\lim_{x\to b^+} f(x) = -\infty$$

si y sólo si para todo $R > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$f(x) < -R \qquad \text{cuando} \qquad b < x < b + \delta$$

Ejemplo. Sea $f(x) = x/(x+1)$ y $x = -1$. Luego para todo $-1 < x < 0$ se tiene que

$$\frac{x}{x+1} < -R \qquad \Longleftrightarrow \qquad -1 < x < -\frac{R}{R+1} < -1 + \delta$$

Eligiendo así $\delta = 1/(R+1)$.

Definición 12. Diremos que $f(x)$ tiene **asíntota vertical** en $x = b$ si ocurre alguno de los siguientes casos:

$$\lim_{x\to b^\pm} f(x) = \infty \qquad \text{o} \qquad \lim_{x\to b^\pm} f(x) = -\infty$$

Ejercicio. Determine las asíntotas verticales de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 4x + 3}$$

Ejercicio. Determine las asítotas verticales de la función

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

Definición 13. Sea f una función, diremos que l es el **límite** de $f(x)$ cuando x tiende a ∞ (resp. $-\infty$), y denotaremos $\lim_{x\to\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$), si para todo $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que

$$|f(x) - l| < \varepsilon \quad \text{cuando} \quad x > N \quad (\text{resp. } x < -N)$$

En este caso diremos que f tiene **asíntota horizontal** en $y = l$.

Ejercicio. Determine las asíntotas horizontales y verticales de la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x-1} & \text{si } x > 0 \\[2ex] \dfrac{1-x}{1+x} & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

y esboce su gráfico.

2.3. Continuidad

La idea de continuidad de funciones está asociada a la idea intuitiva de no levantar el lápiz mientras se traza el gráfico de dicha función. Esto entrega inmediatamente la idea de la no existencia de saltos en la función.

Definición 14. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es **continua** en un punto $x_0 \in (a, b)$ si para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \qquad \text{cuando} \qquad |x - x_0| < \delta$$

y denotaremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Eventualmente el δ en la definición anterior podría depender del ε y x_0 elegidos. La idea que trata de plasmar la definición anterior tiene relación con la idea de cercanía, es decir si x está cerca de x_0 (distancia menor que $\delta > 0$) entonces $f(x)$ debe estar cerca de $f(x_0)$ (distancia menor que $\varepsilon > 0$). Uno de los teorema de la sección anterior nos decía que

$$\lim_{x \to a} f(x) = l \quad \text{si y sólo si} \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

que se puede aplicar al concepto de continuidad cambiando l por $f(x)$. De este modo la continuidad de una función en un punto depende de sus límites laterales.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x$, luego

$$|f(x) - f(y)| = |x - y| < \varepsilon = \delta$$

que nos entrega una relación para $\delta > 0$ en función de ε. De este modo f es continua para todo x real.

Ejemplo. Si $f(x) = \sin(x)$ es claro que para todo número real a se tiene

$$\sin(x) = \sin(x - a + a) = \sin(x - a)\cos(a) + \sin(a)\cos(x - a)$$

que luego de hacer tender $x \to a$ se deduce que

$$\lim_{x \to a} \sin(x) = \sin(a)$$

teniendo así la continuidad de la función seno.

Ejemplo. La función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ no está definida en $x = 0$. Por lo visto en la sección anterior sabemos que $f(x)$ tiene por límite 1 cuando x tiende a 0. De estemos modo podemos definir una nueva función

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

y es inmediato afirmar que $g(x)$ está definida sobre todos los números reales y es continua en $x = 0$. Más aún es continua sobre todo $\mathbb{R}$.

El siguiente teorema resulta de vital importancia en la teoría de continuidad de funciones.

Teorema 15. $\lim_{x \to y} f(x) = f(y)$ *si y sólo si para toda sucesión* $y_n \to y$ *se tiene que* $f(y_n) \to f(y)$.

El teorema anterior se explica con mayor claridad cuando uno intenta probar que una función no es continua.

Ejemplo. Sea $f(x) = (x^2 - 1)|x - 1|^{-1}$, luego si f fuera continua en $x = 1$ se tendría que para toda sucesión x_n que converge a 1 el límite de $f(x_n)$ existe cuando $n \to \infty$. Definamos $x_n = 1 + 1/n$ e $y_n = 1 - 1/n$ dos sucesiones que convergen a 1 cuando $n \to \infty$. Luego,

$$f(x_n) = x_n + 1 \qquad \text{y} \qquad f(y_n) = -(y_n + 1)$$

cuyos límites cuando $n \to \infty$ son respectivamente 2 y -2. Luego f no puede ser continua en $x = 1$.

Finalmente enunciaremos un teorema que permite determinar con mayor facilidad la continuidad de funciones.

Teorema 16. *Sean f y g funciones continuas en x_0. Luego*

(i) $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = f(x_0)+g(x_0)$.

(ii) $\lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha f(x_0)$.

(iii) $\lim_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = f(x_0)g(x_0)$

(iv) Si $g(x_0)\neq 0$ *entonces* $\lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = f(x_0)/g(x_0)$.

Ejercicio. Pruebe que la función $f(x) = x^n$ es continua para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio. Determine si la función

$$f(x) = \frac{\sin(2\sin(3\sin(4x)))}{x}$$

puede ser definida continuamente en $x = 0$.

Ejercicio. Determine si la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\cos^4(x)}{x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

es continua.

Ejercicio. Determine los valores de p tales que

$$f(x) = \frac{\sin(1-\cos(\sin^2(x)))}{x^p}$$

no se puede extender como una función continua sobre todos los reales.

2.4. Teorema del valor intermedio

Una propiedad importante que tienen las funciones continuas es que si $f(a) < y < f(b)$ entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = y$. Este valor de c podría no ser único. A continuación probaremos esta afirmación mediante el siguiente resultado como el teorema del valor intermedio.

Teorema 17. *Sea f una función continua tal que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, con $a < b$. Luego existe $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $f(x) \neq 0$ para todo $x \in (a,b)$ y que $f(a) < 0$. Luego si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene existe $x \in (a,b)$ tal que $|f(x)| < \varepsilon$, entonces se puede construir una sucesión x_n creciente en (a,b) que converge a un $x \in (a,b)$ tal que $f(x) = 0$. Si no, luego existe un $\varepsilon > 0$ tal que $|f(x)| > \varepsilon$ para todo $x \in (a,b)$. Por la continuidad de f se concluye que o bien $f(x) < -\varepsilon$ o bien $f(x) > \varepsilon$ para todo $x \in (a,b)$ lo que contradice el hecho que f pueda tomar tanto valores positivos como negativos. ■

Ejercicios Límite & Continuidad

1.- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(3x)}{x}$.

2.- $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$.

3.- $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^5+2x^2)}{x^3+x^2}$.

4.- $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(-7x)}{x}$.

5.- $\lim_{x\to 3} \frac{\sin(x-3)}{x^3-2x^2-3x}$.

La Derivada

El concepto de *deriva* o *función derivable* tiene sus orígenes formales en el cálculo Newtoniano. Es Newton (y en paralelo Liebniz) quien da forma rigurosa a una nueva teoría dentro del límite de funciones "El cálculo diferencial". El cálculo diferencial fue de mucha ayuda, en sus comienzos, para la modelación de fenómenos físicos y posteriormente en modelos económicos. Ésta nueva teoría fue de vital importancia en los periodos de expansión del conocimiento así como la "revolución industrial" y la formación de los grandes procesos ingenieriles que hasta nuestros días siguen avanzando.

3.1. Derivada y su interpretación

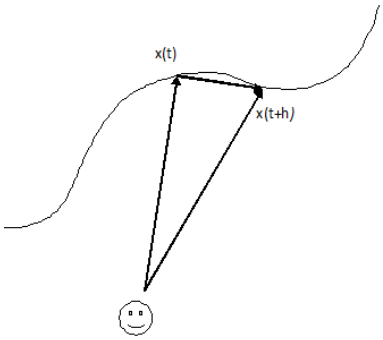
Veamos una pequeña motivación física que podría dar inicio a este cálculo diferencial.

Consideremos a una persona que parte de una posición $x = 0$ en el instante $t = 0$. Definamos $x(t)$ como la posición de esta persona en el instante t y supongamos que $x(n) = n$ para todo natural n. De este modo podemos decir que la velocidad de este individuo es $v(n) = (x(n) - x(n-1))/(n - (n-1)) = 1$ en el instante de tiempo $t = n$. En la física Newtoniana la velocidad de un móvil está dada por la diferencia de posición por instante de tiempo, es decir

$$v(t_2) = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1}$$

siendo $v(t_2)$ la velocidad en el instante t_2 y $x(t_i)$ la posición del móvil en el instante t_i.

Podemos observar que el ejemplo anterior muestra el caso de un móvil del cuál se sabe su posición (y por tanto su velocidad) en instantes de tiempos discretos y de salto 1. En la práctica uno se enfrenta a móviles que se mueven de manera continua, esto genera el siguiente pregunta, cuál es la velocidad de un móvil en cada instante de tiempo.



Sea $x(t)$ la posición de un móvil en el instante t y sea $h > 0$. Luego la velocidad del móvil en el instante t, que denotamos $v(t)$, está dada aproximadamente por

$$v(t) \approx \frac{x(t+h) - x(t)}{h} (= v(t+h) \text{ en el caso discreto})$$

como en el caso discreto. De este modo, en la mecánica Newtoniana se dice que la velocidad de un móvil en el instante t está dada por

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h}$$

en el caso que este límite exista.

Ejemplo. Sea $x(t) = -gt^2/2 + x_0$ la posición de una persona en el instante t. Se sabe que esta persona está callendo libremente desde un edificio de altura x_0. Es claro que $x(0) = x_0$ es decir en el instante $t = 0$ la persona se encuentra en la parte más alta del edificio. Luego la velocidad de esta persona en el instante t está dada por

$$v(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} = -gt$$

De este modo si estamos interesados en determinar con que velocidad llega al suelo debemos determinar el tiempo t_0 tal que $x(t_0) = 0$, es decir $t_0 = \sqrt{x_0/g}$. De este modo la velocidad de impacto con el suelo es

$$v(t_0) = -\sqrt{gx_0}$$

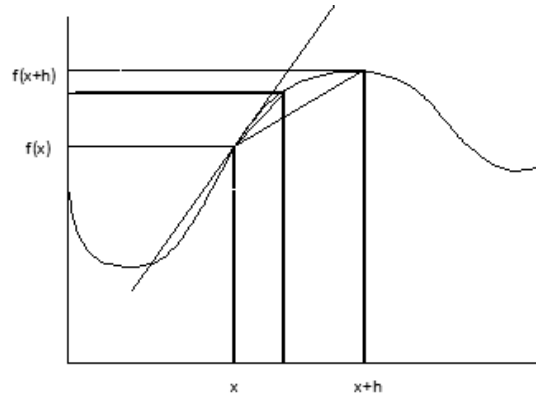
Ahora consideremos una función f con dominio en los reales. Sea x un punto fijo en el dominio de f y $h > 0$, luego la pendiente del segmento que une los puntos $(x, f(x))$ y $(x + h, f(x + h))$ está dada por

$$m_{x,h} = \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Sea l la recta que es tangente a la curva descrita por f en el punto $(x, f(x))$. Es de notar que la pendiente $m_{x,h}$ tiene a ser la pendiente de la recta l cuando h tiende a cero. De este modo, si la recta l tiene pendiente m se deduce que

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

Este último ejemplo nos da una interpretación geométrica de un cierto límite como la pendiente de la recta tangente en un punto a la curva descrita por una función de variable real.



Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^2 + x + 1$, y buscamos determinar la o las rectas tangente a la curva determinada por f que pasan por el origen. Tales rectas tienen ecuación

$$l \,:\, y - y_0 = m(x - x_0)$$

siendo m la pendiente determinada por la derivada de f y (x_0, y_0) el punto de tangencia de l con la parábola. De este modo la pendiente m está dada por

$$m = 2x_0 + 1$$

concluyendo así que

$$l \,:\, y - y_0 = (2x_0 + 1)(x - x_0)$$

Dado que deseamos que esta recta pase por el punto $(0, 0)$, entonces se tendrá que (x_0, y_0) satisfacen las siguientes ecuaciones

$$\boxed{\begin{array}{l} y_0 = x_0(2x_0 + 1) \\ y_0 = x_0^2 + x_0 + 1 \end{array}}$$

obteniendo así que $x_0 = \pm 1$ e $y_0 = 3, 1$.

Definición 1. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in (a, b)$. Diremos que f tiene **derivada** en el punto x_0 si

$$f'(x_0) := \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe.

En la literatura se utilizan las siguientes notaciones para la derivada de una función f:

$$f'(x),\ \frac{d}{dx}f(x)$$

Hemos de hacer notar que la derivada de una función es una propiedad puntual, es decir es posible que una función sea derivable en un subconjunto de su dominio e incluso sea diferenciable en ningún punto.

Ejemplo. Sea $f(x) = |x|$, luego

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h\to 0^h} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

por tanto $f(x)$ no admite derivada en $x = 0$. Mientras que $f'(x) = \text{sign(x)} \cdot 1$.

Ejercicio. Pruebe que la función $f(x) = \log(x)$ es continua para todo x en su dominio.

Solución. Una desigualdad conocida para la constante de Euler e está dada por $1 + y \leq e^y$. Dado que la función logaritmo es creciente se deduce que $\log(1 + y) \leq y$. Luego para todo $h > 0$ se satisface

$$|\log(x+h) - \log(x)| = \log(1 + h/x) \leq h/x \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} |\log(x-h) - \log(x)| &= \log(x-h+h) - \log(x-h) \\ &\leq \log(1 + h/(x-h)) \leq \frac{h}{x-h} \to 0 \quad \text{cuando } h \to 0 \end{aligned}$$

de este modo

$$\lim_{h\to 0} \log(x+h) = \log(x)$$

■

Ejercicio. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(h+1)}{h}$$

Solución. Gracias a la continuidad de la función logaritmo se obtiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(h+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \log\left[(h+1)^{1/h}\right] = \log\left[\lim_{h\to 0}(1+h)^{1/h}\right] = \log(e) = 1$$

■

Ejercicio. Calcule para todo $a > 0$ el siguiente límite

$$\lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Solución. Recordemos que $h\log(a) = \log(a^h)$, luego

$$\log(a) = \frac{\log(a^h)}{h} = \frac{\log(a^h)}{a^h - 1} \cdot \frac{a^h - 1}{h}$$

pero

$$\lim_{h\to 0} \frac{\log(a^h)}{a^h - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y+1}{y} = 1$$

■

Ejercicio. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}a^x = a^x \log(a)$$

SOLUCIÓN. A partir del ejercicio anterior tendremos que

$$\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0} a^x \frac{a^h - 1}{h} = a^x \log(a)$$

■

Ejercicio. Demuestre que

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \frac{1}{x}$$

para todo $x > 0$.

SOLUCIÓN. Notemos que

$$\frac{d}{dx}\log(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \log\left[\left(1 + \frac{1/x}{h}\right)^{1/h}\right] = \log(e^{1/x}) = \frac{1}{x}$$

■

3.2. Relación entre continuidad y diferenciabilidad

Una de las propiedades topológica (geométricas) más importantes de las funciones diferenciables es su continuidad. El siguiente teorema nos entregará una demostración sensilla de esta afirmación.

Teorema 2. *Sea f una función que admite deriva en x_0, luego f es continua en x_0.*

DEMOSTRACIÓN. De la definición de continuidad

$$\lim_{h\to 0}(f(x_0+h) - f(x_0)) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right)\cdot h = f'(x_0)\cdot \lim_{h\to 0} h = 0$$

■

Una consecuencia inmediata de este teorema es que la función $f(x) = a^x$, para $a > 0$, es continua para todo $x \in \mathbb{R}$. A continuación calculemos las derivadas de x^n, para n natural, y las funciones trigonométricas seno y coseno en todo su dominio, concluyendo también que son continuas.

Ejercicio. Calcule la derivada de la función $f(x) = x^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

SOLUCIÓN. A partir del teorema del binomio tendremos

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\lim_{h\to 0}h^{k-1} = \binom{n}{1}x^{n-1} = nx^{n-1}$$

■

Ejercicio. Calcule la deriva de las funciones trigonométricas seno y coseno.

SOLUCIÓN. Ocupando las propiedades trigonométricas de la suma y resta de ángulos

$$\frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h} = \sin(x)\frac{\cos(h) - 1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$$

pero

$$\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1-\cos^2(h)}{h}\cdot(1+\cos(h)) = 0$$

por lo tanto, la derivada de la función seno es la función coseno.
Análogamente se puede demostrar que $(\cos(x))' = \sin(x)$. ■

Ejercicio. Calcule la derivada de la función exponencial.

SOLUCIÓN. Por definición

$$\frac{d}{dx}e^x = e^x \lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = e^x \log(e) = e^x$$

■

Ejercicio. Calcule la derivada de la función tangente.

SOLUCIÓN. Calculemos esta derivada usando la defínción

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\tan(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\cos(x+h)\sin(x+h)-\cos(x)\sin(h)}{h}\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x)\cos(x+h)}\\ &= \sec^2(x)\end{aligned}$$

■

Ejercicio. Calcule por definición las derivadas de las funciones trigonométricas $\sec(x)$, $\cot(x)$ y $\csc(x)$.

3.3. Reglas de derivación

Teorema 3. *Sean f y g funciones diferenciables en x. Luego*

(a) Para todo real α

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x)) = \alpha f'(x)$$

(b)

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = f'(x)+g'(x)$$

(c) Si $h(x) = f(x)\cdot g(x)$, entonces

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

(d) Si $g(x_0)\neq 0$, luego

$$\frac{d}{dx}(f(x)/g(x)) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

DEMOSTRACIÓN. Sean f y g funciones diferenciables en x.

(a) Para todo $\alpha\in\mathbb{R}$ se satisface

$$\frac{d}{dx}(\alpha f(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha f(x+h)-\alpha f(x)}{h} = \alpha\frac{d}{dx}f(x)$$

(b) Dado que f y g admiten derivada en x entonces

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x)$$

(c) Dado que f y g admiten derivada en x entonces de la sección anterior podemos afirmar que además son continuas en dicho punto, luego

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x+h)g(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x)-f(x)g(x)}{h}\\ &= f(x)g'(x)+f'(x)g(x)\end{aligned}$$

(d) Ocupando la propiedad reción probada podemos concluir que

$$0 = \frac{d}{dx}\left(\frac{g(x)}{g(x)}\right) = \frac{g'(x)}{g(x)} + g(x)\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{g(x)}\right)$$

que permite concluir la última parte del teorema aplicando (c) a $f(x)(g(x))^{-1}$.

■

Ejercicio. Calcule la derivada de la función trigonométrica tangente.

SOLUCIÓN. Dado que la función tangente es el cuociente entre el seno y el coseno se tiene

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - (-\sin(x))\sin(x)}{\cos^2(x)} = \sec^2(x)$$

■

Ejercicio. Calcule la derivada de la función $f(x) = 2x^3\cos(x) + \sin^2(x)$

Ejercicio. Sea $f(x) = \dfrac{2}{x+1}$, demuestre que $f^n(x) = \dfrac{2(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$.

Ejercicio. Estudie la continuidad y la derivabilidad de la función

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Teorema 4 (Regla de la cadena)**.** *Sean f y g funciones tal que g es derivable en $x = a$ y f es derivable en $b = g(a)$. Entonces*

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

DEMOSTRACIÓN. Por definición de la derivada y consecuencia de la continuidad de g en $x = a$ tendremos

$$\begin{aligned}
(f \circ g)'(a) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(g(a))}{g(a+h) - g(a)} \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(g(a+h)) - f(b)}{g(a+h) - b} \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \\
&= \lim_{y\to 0} \frac{f(b+y) - f(b)}{y} \lim_{h\to 0} \frac{g(a+h) - b}{h} \\
&= f'(b)g'(a)
\end{aligned}$$

■

Ejercicio. Demuestre que

$$f(x) = \log(\tfrac{1+x}{1-x}), \qquad g(x) = f(\tfrac{a+x}{1+ax})$$

tienen la misma derivada.

Ejercicio. Determine la derivada de las siguientes funciones

(a) $f(x) = \left(\dfrac{a - bx^n}{a + bx^n}\right)^m$

(b) $g(x) = \dfrac{\sin(x) - x\cos(x)}{\cos(x) - x\sin(x)}$

(c) $h(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^{3x} + 1}$

(d) $f(x) = (x-1)^2(x+7)^3$.

(e) $g(x) = \sqrt{x^3 + a}$ para $a > 0$ y $x > 0$.

(f) $r(x) = \log(x + \sqrt{x^3 + a})$

3.4. Derivada de la inversa y logarítmica

Teorema 5. *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ continua en $x_0 \in (a,b)$. Si $g : (c,d) \to (a,b)$ es la inversa de f entonces g es continua en $y_0 = f(x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dada la continuidad de f en x_0 tendremos que

$$\lim_{y \to y_0} g(y) = \lim_{x \to x_0} g(f(x)) = x_0 = g(y_0)$$

■

El teorema anterior nos permite asegurar que las funciones $\arctan(x)$, $\arcsin(x)$, $\operatorname{arc}\cos(x)$, $\exp(x)$, etc son continuas. El siguiente teorema para funciones diferenciables será consecuencia de este resultado.

Teorema 6. *Sea $f : (a,b) \to (c,d)$ diferenciable en $x_0 \in (a,b)$. Si $g : (c,d) \to (a,b)$ es la inversa de f entonces g es diferenciable en $y_0 = f(x_0)$.*

DEMOSTRACIÓN. Dado que la función f es diferenciable en x_0 entonces por el teorema anterior g será continua en $y_0 = f(x_0)$. De este modo,

$$\begin{aligned} 1 = \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(y_0 + h) - (f \circ g)(y_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{(f \circ g)(y_0 + h) - (f \circ g)(y_0)}{g(y_0 + h) - g(y_0)} \lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0))}{x - x_0} \lim_{h \to 0} \frac{g(y_0 + h) - g(y_0)}{h} \\ &= f'(g(y_0)) \cdot g'(y_0) \end{aligned}$$

que asegura la existencia de la derivada de g en y_0 siempre y cuando $f'(x_0) \neq 0$. Equivalentemente usando la regla de la cadena

$$1 = (f \circ g)'(y_0) = f'(g(y_0)) \cdot g'(y_0)$$

■

Ejercicio. Calcule la derivada de la función $\arcsin(x)$, $\operatorname{arc}\cos(x)$, $\arctan(x)$

Ejercicio. Pruebe las siguientes igualdades para las derivadas

$$\frac{d}{dx}\operatorname{arccot}(x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arcsec}(x) = \frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}, \quad \frac{d}{dx}\operatorname{arccsc}(x) = -\frac{1}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

Posiblemente una de las herramientas más útiles para el cálculo de derivadas es mediante la **derivación logarítmica**. Esto consiste en derivar producto y cuociente de funciones relativamente complejas luego de aplicar la función logaritmo. Para ello solo es necesario que la función sea derivable y utilizar la regla de la cadena. Es decir,

$$\frac{d}{dx}\log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Ejercicio. Derivar aplicando derivación logarítmica

(a) $f(x) = f(x) = x^{x^x}$

(b) $g(x) = x^{\sin^2(x)}$

(c) $h(x) = \dfrac{(3x-2)(2x-3)\cos(x)}{(5x+7)\log(x)}$

3.5. Derivada de orden superior e implícita

Sea f una función derivable. Si el siguiente límite existe

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)-f'(x)}{h}$$

diremos que f admite **derivada de orden** 2, que será denotada f'' o bien $f^{(2)}$. Inductivamente definimos la **derivada de orden** n de la función f, en el caso que exista, por la relación

$$f^n(x)=\frac{d}{dx}f^{n-1}(x)$$

Otra notación comunmente utilizada en derivadas de orden n es la siguiente

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)$$

obteniendo así la relación de recurrencia

$$\frac{d^n}{dx^n}f(x)=\frac{d}{dx}\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}f(x)$$

El siguiente resultado fue presentado por el matemático Leibniz, contemporáneo a Newton, quien ayudó al formalismo matemático del cálculo.

Teorema 7. *Sean f y g funciones que admiten derivada de orden n. Entonces*

$$\frac{d^n}{dx^n}(fg)(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)$$

Ejercicio. Determine una expresión para

$$\frac{d^n}{dx^n}(e^{-x}x^m)$$

para $m\in\mathbb{N}$.

En ocaciones uno se ve enfrentado a calcular derivadas de funciones bastante complejas como el siguiente caso:

$$f(x)=\sqrt{1-x^2}$$

que por simple inspección es necesario aplicar regla de la cadena. Para evitar este tipo de problemática se puede introducir una nueva forma de derivación conocida como **derivación implícita** que consiste en definir $y=f(x)$ y obtener una ecuación en dos variables (x,y). En nuestro ejemplo tendríamos la ecuación de una circunferencia de radio 1,

$$x^2+y^2=1$$

advirtiendo que y es función de x. La derivaciín implícita consta en derivar la ecuación determinada al hacer el cambio $y=f(x)$ y utilizando todas las propiedades de la operación derivar. Volviendo a nuestro ejemplo podemos ver que la derivación implícita consta en

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=1 \quad \Big/\frac{d}{dx}\\ 2x+2yy'&=0\\ y'&=-\frac{x}{y}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

En estricto rigor, para derivar una ecuación como hemos hecho en el ejemplo anterior solo es necesario suponer que una de las variable depende de la otra. En general se tiene a hacer la convención $y = y(x)$ pero también es posible consevir $x = x(y)$ ya que la elección de las letras es arbitrario. A modo de ejemplo

$$x^2 + y^3 = xy \qquad \text{o bien} \qquad y^2 + x^3 = yx$$

que entregan el mismo problema salvo la elección de las variable.

Ejercicio. Determine y' en la ecuación

$$x^3 + y^2 = 2xy$$

Ejercicio. Determine y'' en la ecuación

$$x^4 + y^4 = 16$$

Ejercicio. Dada la ecuación $x^3 + 3xy + y^3 = 8$ calcule y' e y'' en el punto donde $x = 2$.

3.6. Teorema del Valor Medio & Rolle

El teorema de Rolle nos presentará dentro de su demostración la equivalencia entre mínimos y máximos de una función con derivadas igual a cero. Para ello comenzaremos probando el siguiente teorema.

Teorema 8. *Sea f una función continua sobre $[a, b]$ entonces una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Supondremos que no existe dicha constante, luego para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in (a, b)$ tal $|f(x_n)| > n$. De la sucesión x_n podemos extraer una subsucesión x_{n_k} que sea creciente (decreciente). Es claro que x_{n_k} es además una sucesión acotada luego por el axioma del supremo existe $x \in [a, b]$ tal que $x_{n_k} \to x$ cuando $k \to \infty$. De este modo dada la continuidad de f sobre $[a, b]$ se deduce que

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) > \lim_{k\to\infty} n_k = \infty$$

que sería una contradicción. Por lo tanto debe existir alguna constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in [a, b]$. ■

En el teorema anterior resulta de vital importancia que el intervalo de dominio sea cerrado. Esto se debe a que una función puede ser continua en un intervalo abierto y no acotada. En dichos casos la función no podrá se continua en el intervalo cerrado que la contiene al dominio. Para clarificar esta afirmación consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ la función continua $f(x) = 1/x$. Es claro que todo $a \in (0, 1)$ se satisface que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{1}{\lim_{x\to a} x} = f(a)$$

con que confirmamos la continuidad de f en $(0, 1)$. Es claro también que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \infty$$

por lo tanto f no puede extenderse continuamente al intervalo $[0, 1]$.

Corolario 9. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces existe $c \in [a, b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a, b]$.*

Demostración. Definamos el conjunto

$$E := \{f(x) \,:\, x \in [a, b]\}$$

que es acotado por el teorema anterior. Luego,por el teorema de supremo sabemos que existe s supremo de E. A su vez podemos asegurar la existencia de una sucesión $y_n = f(x_n)$ en E tal que $y_n \to s$ cuando $n \to \infty$. A la sucesión x_n le extraemos una subsucesión x_{n_k} que es creciente (decreciente). Ya que

la sucesión x_{n_k} es acotada, aplicando nuevamente el axioma del supremo, podemos afirmar que existe $c \in [a,b]$ tal que $x_{n_k} \to c$ cuando $k \to \infty$. De este modo tendremos

$$f(c) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{n\to\infty} y_n = s$$

■

Equivalentemente, reproduciendo la demostración del corolario anterior para una función continua, se puede probar la existencia de un $c \in [a,b]$ tal que $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in [a,b]$.

Teorema 10 (Rolle)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Si $f(x) = C$ constante para todo $x \in [a,b]$ entonces $f'(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$.

En el caso que f no es constante podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) > f(a)$. Luego por el corolario anterior sabemos que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(x) \leq f(c)$ para todo $x \in [a,b]$. Ya que f es diferenciable sobre (a,b) entonces

$$0 \leq \lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = f'(c) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0$$

Lo que termina la demostración del teorema. ■

Ejercicio. Dada la función $f(x) = (x-a)^m(x-b)^n$, con m y n naturales, demuestre que el punto c del teorema de Rolle divide al intervalo $[a,b]$ en la razón $m : n$.

Teorema 11 (Valor Medio)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua y derivable en (a,b). Entonces existe $c \in [a,b]$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Demostración. Definamos la función

$$F(x) = f(x) - (x-a)\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Luego $F(a) = f(a) = F(b)$ y por el Teorema de Rolle podemos afirmar que existe un $c \in [a,b]$ tal que $F'(c) = 0$. Pero,

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

que finaliza la demostración. ■

Ejercicio. Probar que $f(x) = x^3 - 3x + b$ no puede tener más de una raíz en $[-1,1]$ para todo b.

Ejercicio. Demuestre usando el Teorema del valor medio que

$$\frac{x}{x+x} \leq \log(1+x) \leq x$$

para todo $x > -1$.

Corolario 12. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ función continua y diferenciable en (a,b) tal que $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$. Entonces $f(x) = C$ constante para todo $x \in [a,b]$.*

Demostración. Para todo $x, y \in [a,b]$ se satisface

$$f(x) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y}(x-y) + f(y) = f'(c)(x-y) + f(y) = f(y)$$

por lo tanto f es una función constante sobre su dominio. ■

Ejercicio. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivables. Pruebe que si $f'(x) = g'(x)$ entonces $f(x) = g(x) + c$ donde c es una constante.

Ejercicio. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciable con $0 < a < b$ y que satisface $f(a) = f(b) = 0$. Pruebe que existe $c \in (a, b)$ tal que la tangente a f en el punto c pasa por el origen.

Ejercicio. Demuestre que la función

$$f(x) = \arcsin(2x - 1) + 2 \arctan \sqrt{\frac{1 - x}{x}}$$

es constante en el intervalo $(0, 1)$. Determine el valor de dicha constante.

Ejercicios La Derivada

1.-

Aplicaciones de la Derivada

4.1. Crecimiento y decrecimiento de funciones

Ya hemos visto en el capítulo anterior que derivada habla sobre la suavidad de la función. Ahora veremos que esa propiedad puede refinarse, en algunos casos, a crecimiento y decrecimiento de funciones en ciertos intervalos donde la derivada no cambia de signo. Esta propiedad que tienen ciertas funciones nos permitirá trazar gráfico de funciones solo haciendo un análisis de la derivada.

Teorema 1. *Sea f una función derivable en su dominio.*

(a) Si $f'(x) > 0$ en un intervalo, en este caso f es creciente en ese intervalo.

(b) Si $f'(x) < 0$ en un intervalo, en este caso f es decreciente en ese intervalo.

Demostración. Supongamos que (a, b) es el intervalo donde $f'(x) > 0$ (resp. $f'(x) < 0$) para cada $x \in (a, b)$. Sean $x < y$ en (a, b) luego, por el teorema del valor medio, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(y) = f'(c)(y - x) + f(x)$$

Por lo tanto $f(x) < f(y)$ (resp. $f(y) < f(x)$) si $f'(c) > 0$ (resp. $f'(c) < 0$). ■

Ejemplo. Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$ luego su derivada está dada por

$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 24x = 12x(x - 2)(x + 1)$$

Luego $f'(x)$ tiene el siguiente comportamiento

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 2)$	$(2, \infty)$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

De este modo la función f es creciente en los intervalos $(-1, 0)$ y $(2, \infty)$, mientras que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(0, 2)$.

Ejemplo. Sea $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$ luego su derivada está dada por

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3} = -\frac{x + 2}{x^3}$$

luego

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 0)$	$(0, \infty)$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

De este modo la función f es creciente en el intervalo $(-2, 0)$, mientras que f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -2)$ y $(2, \infty)$.

Ejemplo. Sea $f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ para todo $x > 0$, queremos demostrar que esta función es creciente. Luego la derivada de f está dada por

$$\log(f(x)) = x \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \qquad \Longrightarrow \qquad f'(x) = f(x)\left[\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{1 + x}\right]$$

Si deseamos que la derivada sea positiva debemos probar la siguiente desigualdad $\log\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq \frac{1}{1+x}$. Para ello utilizaremos el teorema del valor medio

$$\frac{\log(1+x)-\log(x)}{(1+x)-x} = \frac{1}{c} \geq \frac{1}{1+x}, \qquad x \leq c \leq x+1$$

por lo tanto $f(x)$ es creciente para todo $x > 0$.

Ejercicio. Demuestre que para todo $0 < u < v < \frac{\pi}{2}$ se satisface

$$\frac{\sin(u)}{\sin(v)} > \frac{u}{v}$$

Solución. El ejercicio tiene oculta la función $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$. Entonces calculando la derivada de f tendremos

$$f'(x) = \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$$

Por el teorema del valor medio, para todo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ tendremos que

$$\frac{\sin(x)-\sin(0)}{x} = \cos(c) > \cos(x), \qquad 0 < c < x < \frac{\pi}{2}$$

Por lo tanto $f'(x) < 0$ para todo $0 < x < \frac{\pi}{2}$ y se concluye que $f(x)$ es decreciente en ese intervalo. ■

Definición 2. Diremos que una función f en **cóncava hacia arriba** en un intervalo $[a,b]$ si y sólo si para todo $a \leq u \leq t \leq v \leq b$ se tiene que

$$\frac{f(t)-f(u)}{t-u} \leq \frac{f(v)-f(t)}{v-t}$$

Diremos que una función f en **cóncava hacia abajo** en un intervalo $[a,b]$ si y sólo si para todo $a \leq u \leq t \leq v \leq b$ se tiene que

$$\frac{f(v)-f(t)}{v-t} \leq \frac{f(t)-f(u)}{t-u}$$

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = x^2$ es fácil ver a través de la gráfica que la función f es cóncava hacia arriba, mientras que la función $g(x) = -x^2$ en concava hacia abajo.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Esta función es cóncava hacia abajo en $[0,\pi]$ cóncava hacia arriba en $[\pi, 2\pi]$.

Teorema 3. *Sea f una función dos veces diferenciable.*

(a) Si $f''(x) > 0$ en el intervalo $[a,b]$, entonces f es cóncava hacia arriba sobre $[a,b]$.

(b) Si $f''(x) < 0$ en el intervalo $[a,b]$, entonces f es cóncava hacia abajo sobre $[a,b]$.

Demostración. Sean $a \leq u \leq t \leq v \leq b$ para determinar si f es cóncava hacia arriba o hacia abajo debemos analizar el signo de la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\frac{f(v)-f(t)}{v-t} - \frac{f(t)-f(u)}{t-u} &= f'(c_2) - f'(c_1), \quad u \leq c_1 \leq t \leq c_2 \leq v \\ &= f''(c)(c_2-c_1), \quad c_1 \leq c \leq c_2\end{aligned}$$

luego f es cóncava hacia arriba si $f''(c) > 0$ y es cóncava hacia abajo si $f''(c) < 0$. ■

Ejemplo. Volviendo a los dos ejemplos anteriores podemos notar que $f(x) = x^2$ tiene segunda derivada $f''(x) = 2$ luego f es cóncava hacia arriba. Por otro lado $g(x) = -x^2$ es cóncava hacia abajo ya que $g''(x) = -2$. En el caso que consideremos la función $h(x) = \sin(x)$, entonces $h''(x) = -\sin(x)$ que es negativa en $(0,\pi)$ y positiva en $(\pi, 2\pi)$.

Ejercicio. Sea $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, su concavidad y trace un gráfico apróximado de la función sobre todo $\mathbb{R}$.

Ejercicio. Sea $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f, su concavidad, asíntotas y trace un gráfico aproximado de la función sobre todo $\mathbb{R}$.

Definición 4. Diremos que f tiene **asíntota oblicua** $l_\pm : a_\pm x + b_\pm$ si

$$a_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad \text{y} \qquad b_\pm = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - a_\pm x)$$

Ejercicio. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, su concavidad, asíntotas y trace un gráfico aproximado de la función

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x + 2}$$

Ejercicio. Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento, su concavidad y trace un gráfico aproximado de la función

$$f(x) = x^{2/3}(6 - x)^{1/3}$$

4.2. Mínimos & Máximos

Definición 5. Diremos que x_0 es un **mínimo local** de una función f si existe un intervalo $I \subset \mathrm{Dom}(f)$ que contiene a x_0 y tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.
Diremos que x_0 es un **máximo local** de una función f si existe un intervalo abierto $I \subset \mathrm{Dom}(f)$ que contiene a x_0 y tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para todo $x \in I$.

Ejemplo. Los ejemplos clásicos de funciones con mínimos y/o máximos locales son los polinomios. Consideremos la función $f(x) = x^2$ que determina una parábalo con vértice en $x_0 = 0$. Ya que el término general de la parábola es $1 > 0$ es claro que f es cóncava hacia arriba, luego $f(x)$ tiene un mínimo (único) local en $x_0 = 0$.

Por otro lado podemos notar que la función $f(x) = x^3$ tiene por derivada $f'(x) = 3x^2 \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. De este modo la función f es creciente sobre todo $\mathbb{R}$ concluyendo que no posee mínimo y/o máximo local ya que $f(x) \to \pm\infty$ cuando $x \to \pm\infty$.

Finalmente consideremos la función $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 18x + 1$ en el intervalo $[-5, 5]$. Para determinar mínimos y máximos de f determinaremos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f. De este modo, donde la derivada cambia de signo sabremos que f posee un mínimo o máximo. Es claro que la derivada de f está dada por $f'(x) = 6x^2 - 6x - 18 = 6(x + 1)(x - 2)$ obteniendo la siguiente tabla de signos

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 2)$	$(2, \infty)$
$x + 1$	$-$	$+$	$+$
$x - 2$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$

Ya que tenemos cambio de signo en la derivada en los puntos $x_0 = -1, 2$ podemos advertir que tenemos dos posibles puntos para mínimos o máximos de la función. Ya que la función es decreciente a la izquierda de $x_0 = -1$ y creciente a su derecha se puede concluir que $f(x)$ tiene un mínimo local en $x_0 = -1$. Similarmente, a la izquierda de $x_0 = 2$ la función es creciente y a la derecha decreciente, concluyendo así que f tiene máximo local en $x_0 = 2$. Finalmente podemos notar que la función evaluada en los extremos también posee puntos de mínimo y/o máximo. Por la geomería de crecimiento y decrecimiento de f en los distintos intervalos podemos notar que $x_0 = -5$ es un máximo local al igual que $x_0 = 5$.

Definición 6. Diremos que x_0 es un **punto crítico** de una función f si y sólo si $f'(x_0) = 0$.

El siguiente teorema resultará ser un buen test para determinar puntos de mínimo y máximo cuando la función es derivable.

Teorema 7. *Sea f una función continua y derivable en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ para algún $\delta > 0$. Si x_0 es punto crítico de f entonces*

(i) x_0 *es un máximo local de* f *si y sólo* $f'(x) \geq 0$ *para* $x_0 - \delta < x < x_0$ *y* $f'(x) \leq 0$ *para* $x_0 < x < x_0 + \delta$

(ii) x_0 *es un mínimo local de* f *si y sólo* $f'(x) \leq 0$ *para* $x_0 - \delta < x < x_0$ *y* $f'(x) \geq 0$ *para* $x_0 < x < x_0 + \delta$

A partir del teorema anterior podemos notar que hay funciones que tienen puntos críticos pero el signo de la derivada en todo a esos puntos no cambia. Uno de los ejemplos más sensillos es el caso de $f(x) = x^3$ que tiene punto crítico en $x_0 = 0$ y no es mínimo o máximo de la función. En estos casos diremos que dicho puntos son **puntos de inflexión**.

Ejercicio. Determine los valores mínimos y máximos de la función $f(x) = x + 2\sin(x)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

Una aplicación inmediata de la concavidad de una función es determinar si un punto crítico es mínimo o máximo.

Teorema 8. *Sea* x_0 *un punto crítico de una función* f*, entonces*

(i) Si $f''(x_0) < 0$ *entonces* x_0 *es máximo local de* f*.*

(ii) Si $f''(x_0) > 0$ *entonces* x_0 *es mínimo local de* f*.*

Podemos notar en el teorema anterior que no obtenemos información en los caso que $f''(x_0) = 0$. En estos casos es posible que la función tenga un punto de inflexión en x_0.

Ejercicio. Determine los valores de a, b y c de manera que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tenga un punto de inflexión en $(1, -1)$ y la pendiente de la tangente a la curva $y = f(x)$ en ese punto sea 2.

Ejercicio. Determine las dimensiones del rectángulo de área máxima que se puede inscribir en la elipse de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Ejercicio. Un hombre tiene 240 metros de cerco para circundar un terreno que debe tener forma rectangular y dividirlo en dos partes mediante una cerca paralela a uno de los lados. ¿Qué dimensiones debe tener el rectángulo para que el área cercada sea máxima?

Ejercicio. Una cancha de fútbol mide 90×61 metros y los arcos tienen un largo de 11 metros. Un puntero izquiero, que chutea muy bien, se mueve pegado a su costado. ¿A qué distancia del banderín del corner debe chutear para obtener la máximas posibilidades de marcar un gol?

4.3. Regla de L'Hospital

Teorema 9. *Sean* $f(x_0) = g(x_0) = 0$*, luego si* f *y* g *son diferenciables en* x_0 *tales que* $g'(x_0) \neq 0$ *entonces*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Demostración. Por definición tendremos que de la derivada tendremos

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Big/ \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

■

La demostración de este teorema se puede refinar ocupando el teorema del valor medio obteniendo así la siguiente relación:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

en el caso que el límite del lado derecho exista. Para ello simplemente debemos suponer que f y g son derivables en cercanías de x_0, luego por el teorema del valor medio se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\Big/\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right)\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}\\ &= \lim_{x\to x_0}\frac{f'(c_1)}{g'(c_2)}\end{aligned}$$

Ejercicio. Ocupando la regla de L'Hospital calcule los siguientes límites:

(i) $\lim_{x\to\pi}\dfrac{\sin(\frac{x}{2})+\cos(x)}{1+\sin^2(x)+\cos(x)}$.

(ii) $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin(x)}-\dfrac{1}{x}\right)$.

(iii) $\lim_{x\to 0}(e^{2x}+2x)^{\frac{1}{4x}}$

También existe una Regla de L'Hospital para el caso que $x\to\pm\infty$ siempre y cuando las funciones $f(x)$ y $g(x)$ van a cero cuando $x\to\infty$ y el límite de $f'(x)/g'(x)$ existan cuando $x\to\pm\infty$ y en el último caso sea diferente de cero. Para ello solo es necesario considerar lo siguiente:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)-f(x+1)+f(x+1)}{g(x)-g(x+1)-g(x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(c_1)+f(x+1)}{g'(c_2)+g(x+1)}, \qquad x<c_1, c_1\le x+1\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\end{aligned}$$

Análogamente se demuestra el caso en que $x\to-\infty$.

Ejercicio. Calcule $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\left(\pi-2\arctan(\sqrt{x})\right)$.

Ejercicio. Calcule $\lim_{x\to+\infty}x\left(\pi-2\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)\right)$.

4.4. Aproximación de Taylor

Consideremos la función exponencial $f(x)=e^x$ definida como límite monótono para todo real x

$$e^x=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}$$

El problema en querer determinar numéricamente el valor de f en cada número real es que no existe una expresión explícita sencilla para las sumas parciales de la función exponencial, pero es posible estimar dichos valores con errores que se pueden cuantificar y hacer tan pequeños como uno lo desee. Para clarificar lo recién expuesto estimaremos el valor de $f(2)$ tal que el error sea menor que 10^{-2}. De la definición de f es claro que

$$\begin{aligned}f(2) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^k}{k!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{2^k}{3^{k-2}}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2^k}{k!}+9\left(3-\frac{1-(2/3)^{n+1}}{1-(2/3)}\right), \quad n>0\end{aligned}$$

Entonces,

$$\left| f(2) - \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!} \right| \leq 27 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \frac{1}{100}$$

Concluyendo así que n debe ser suficientemente grande para que se satisfaga la desigualdad $27000 < (3/2)^{n+1}$, es decir $n > 29$.

La aproximación de Taylor consiste en determinar un polinomio de grado n que esté uniformemente cerca de una función dada en ciertos intervalos. A continuación expondremos el teorema de Taylor pero su demostración será postergada para el capítulo siguiente ya que su demostración necesita herramientas del cálculo integral.

Teorema 10 (Taylor)**.** *Sea f una función $n+1$ veces derivable en el intervalo $[c,d]$. Luego para todo $a, x \in [c,d]$ se tiene*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x,a)$$

donde

$$R_n(x,a) = (x-a)^{n+1} \frac{f^{(n+1)(c^*)}}{(n+1)!}$$

siendo c^* un número entre a y x.

El teorema anterior ya hemos comentado que se atribuye a Taylor, y el polinomio determinado es denominado **polinomio de Taylor** así como $R_n(x,a)$ es denominado *error* o *resto*.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = \sin(x)$ y $a = 0$. Luego las derivadas de la función seno en todo orden evaluada en 0 está dada por

$$f^{(k)}(0) = \begin{cases} i^{k-1} & \text{si } k \text{ es impar} \\ 0 & \text{si } k \text{ es par} \end{cases}$$

obteniendo el polinomio de Taylor y el resto

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad \text{y} \quad R_n(x,0) = x^{n+1} \frac{f^{(n+1)(c^*)}}{(n+1)!}$$

donde

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} i^{k-1}\cos(x) & \text{si } n \text{ es impar} \\ i^k \sin(x) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Análogamente se puede determinar una aproximación en Taylor para la función $g(x) = \cos(x)$ dada por

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + x^{n+1} \frac{g^{(n+1)(c^*)}}{(n+1)!}$$

siendo

$$g^{(n)}(x) = \begin{cases} i^{k+1}\sin(x) & \text{si } n \text{ es impar} \\ i^k \cos(x) & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Ejercicio. Determine el polinomio de Taylor de $f(x) = \log(x)$ en torno a $a = 1$ tal que el resto sea menor que 10^{-1} en el intervalo $[1/2, 3/2]$.

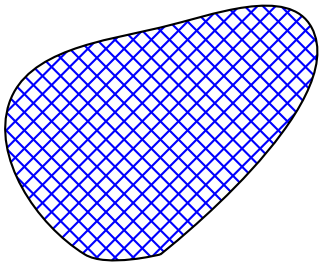
Ejercicio. Encuentre el desarrollo de Taylor de $f(x) = \log(\cos(x))$ hasta orden tres, entorno a $x = 0$ y demuestre que el resto está acotado por $\frac{2}{3}|x|^4$, para $x \in \left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$.

Ejercicios Aplicaciones de la Derivada

1.-

La Integral de Riemann

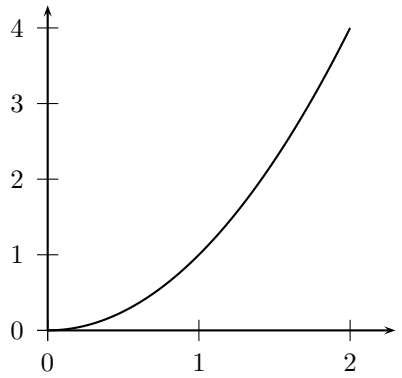
Es concepto integral, es uno de los desarrollos básicos del Análisis Matemático. Sus orígenes se remontan al tiempo de los griegos para resolver problemas aislados de cálculo de áreas y volúmenes.

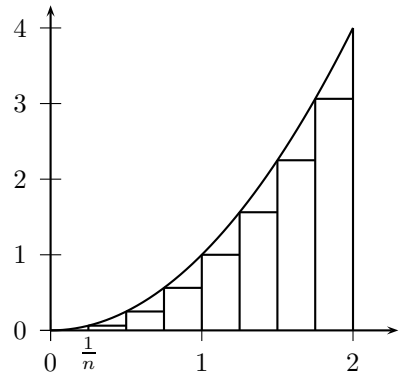


Este procedimiento consistía en rellenar ciertas figuras geométricas con otras cuya área o volumen es conocida (ver la figura anterior)

5.1. Sumas de Riemann

La integral es un número que en su esencia es una suma al límite. Para comprender mejor esta idea, ilustraremos con un ejemplo. Consideremos la región encerrada por las curvas $f(x) = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$ con área A,





y particionemos el intervalo $[0, 2]$ en subintervalos de longitud $1/n$. Así, podemos aproximar el área encerrada por la curva como la suma de rectángulos con área $f(k/n)/n$, $k = 1, \ldots, 2n$, vale decir

$$\mathrm{A} \sim \sum_{k=1}^{2n} \frac{f(k/n)}{n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6n^3}$$

Por construcción, la suma de las áreas asociadas a los rectángulos es siempre menor que A. Haciendo paso al límite tendremos que $A \geq 8/3$. Vale hacernos la siguiente pregunta ¿es posible determinar de manera exacta el valor de A?. Sabemos que A es el área encerrada por una curva que es aproximada por rectángulos de áreas definidas. Esta aproximación crece de manera monótona con cota superior A. Ahora consideremos la sucesión de rectángulos $R_{k,n}$ con altura $f(k/n)$ en el intervalo $[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n})$, el valor de A está acotado superiormente por

$$A \leq \sum_{k=1}^{2n} \frac{f((k+1)/n)}{n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(k+1)^2}{n^3} = \frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6n^3} + \frac{2n(2n+1)}{n^2} + \frac{2}{n^2}$$

que tiene a $8/3$ cuando $n \to \infty$. Por el Teorema de Sandwich, del curso de Cálculo 1, se deduce que $A = 8/3$.

En el ejemplo anterior no tan solo hemos encontrado el valor de A sino que también hemos probado que ese valor existe y en consecuencia demostrado que la figura delimitada por las curvas $f(x) = x^2$, $y = 0$ y $x = 2$ tiene área.

Ahora consideremos la función $g(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$ y determinemos el área encerrada por la curva que determina la gráfica de g y la recta $y = 0$. Dado que la función es creciente en el intervalo $[0, \pi/2]$ y es simétrica respecto a $x = \pi/2$ solo calcularemos el área en el intervalo $[0, \pi/2]$. Para cada natural n consideramos la partición $x_k = \frac{k\pi}{2n}$ del intervalo $[0, \pi/2]$ y la suma

$$2\sum_{k=1}^{n-1} g(x_k)(x_{k+1} - x_k) \leq A$$

siendo A el área que deseamos determinar. Luego para todo número natural n se satisface la siguiente desigualdad

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\tfrac{k\pi}{2n}) \leq A \leq \frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\tfrac{(k+1)\pi}{2n})$$

Si consideramos $\theta = \frac{\pi}{2n}$ la suma anterior equivale a la parte imaginaria de la siguiente cantidad

$$\sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{cis}(k\theta) = \frac{1 - \operatorname{cis}(n\theta)}{1 - \operatorname{cis}(\theta)} = \frac{1 - i}{1 - \operatorname{cis}(\theta)}$$

Luego,

$$\frac{\pi}{n} \operatorname{Re} \frac{1 - i}{1 - \operatorname{cis}(\frac{\pi}{2n})} \leq A$$

para todo natural n. Luego haciendo paso al límite para n al infinito se obtiene que $2 \leq A$. Similarmente, a partir de la cosa superior para A determinada más arriba, se prueba que $A \leq 2$ y por tanto $A = 2$.

El siguiente ejemplo dejará en claro que no todas las regiones admiten área mediante aproximación por rectángulos. Sea f una función definida sobre el intervalo $[0, 1]$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional.} \end{cases}$$

y π (resp. π') partición racional (resp. partición irracional) del intervalo $[0, 1]$ Luego,

$$\sum_{\pi} f(x_k)(x_{k+1} - x_k) = 0 \neq 1 = \sum_{\pi'} f(y_k)(y_{k+1} - y_k)$$

Definición 1. Sea f una función real, positiva y acotada sobre el intervalo $[a, b]$. Definimos su **suma de Riemann** asociada a la partición π por la expresión

$$s(f, \pi) = \sum_{\pi} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}), \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$$

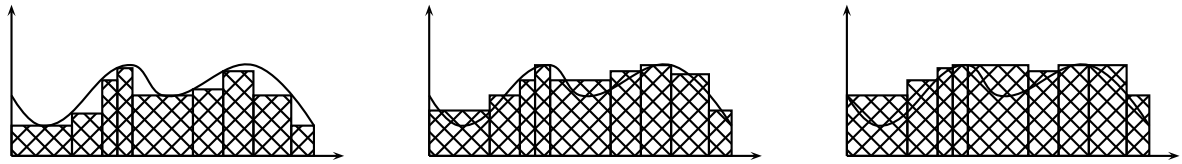
Definimos la **suma inferior** de f asociada a la partición π por la expresión

$$I(f, \pi) = \sum_{\pi} m_k(x_k - x_{k-1}), \quad m_k = \text{ínf}\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k)\}$$

Definimos la **suma superior** de f asociada a la partición π por la expresión

$$S(f, \pi) = \sum_{\pi} M_k(x_k - x_{k-1}), \quad M_k = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k)\}$$

De la definición anterior es inmediato que $I(f, \pi) \leq s(f, \pi) \leq S(f, \pi)$ para toda partición π.



Lema 2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y $\pi' \subset \pi$ particiones de $[a, b]$. Luego, $I(f, \pi) \leq I(f, \pi') \leq S(f, \pi') \leq S(f, \pi)$.*

Definición 3. Sea $[a, b]$ un intervalo acotado de los reales y $\pi \subset [a, b]$ finito. Diremos que π es una **partición** de $[a, b]$ si

$$\pi = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$$

Si π' es una partición que contiene a π, diremos que π' es **más fina** que π. Definimos el **largo de la partición** π por el número real

$$\|\pi\| = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k - x_{k-1}|$$

Proposición 4. *Sea f una función real acotada sobre $[a, b]$. Sea π_n una sucesión de particiones sobre $[a, b]$ tales que $\pi_{n+1} \subset \pi_n$ y $\|\pi_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$. Luego, $\lim_{n\to\infty} I(f, \pi_n)$ existe y*

$$\lim_{n\to\infty} I(f, \pi_n) = \lim_{n\to\infty} I(f, \pi_n \cup \pi)$$

para toda partición π de $[a, b]$.

Demostración. Sea $\pi_n = \{a = x_{n,1} < \cdots < x_{n,r_n} = b\}$ y $\pi = \{a < y < b\}$. Si $x_{n,k} < y \leq x_{n,k+1}$ entonces

$$I(f, \pi_n \cup \pi) \leq I(f, \pi_n) + |f(y)||x_{n,k+1} - x_{n,k}| \leq I(f, \pi_n) + \|\pi_n\| \sup_{y\in[a,b]} |f(y)|,$$

luego haciendo tender $n \to \infty$ se tiene

$$\lim_{n\to\infty} I(f, \pi_n \cup \pi) \leq \lim_{n\to\infty} I(f, \pi_n)$$

La otra desigualdad sigue del hecho que $I(f, \pi_n) \leq I(f, \pi_n \cup \pi)$ para todo natural n. ■

Proposición 5. *Sean π_n y π'_n dos particiones de $[a, b]$ tales que sus largo tiende a cero cuando $n \to \infty$. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces*

$$\lim_{n\to\infty} I(f, \pi_n) = \lim_{m\to\infty} I(f, \pi'_m)$$

Demostración. De la proposición anterior sigue que

$$\lim_{n\to\infty} I(f, \pi_n) \leq \lim_{m\to\infty} I(f, \pi_n \cup \pi'_m) = \lim_{m\to\infty} I(f, \pi'_m)$$

La otra desigualdad se prueba de manera similar. ■

Las proposiciones anteriores tienen un análogo para $S(f, \pi_n)$ y su demostración se deja como ejercicio. Esto nos permite hacer de manera consistente la siguiente definición.

Definición 6. Sea f una función real acotada sobre $[a, b]$. Definimos la **integral inferior** de f sobre $[a, b]$ por

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{I(f, \pi) \,:\, \pi \text{ partición de } [a, b]\}$$

Definimos la **integral superior** de f sobre $[a, b]$ por

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup\{I(f, \pi) \,:\, \pi \text{ partición de } [a, b]\}$$

Diremos que f es **integrable** sobre $[a,b]$ si

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

en tal caso denotaremos la integral de f en el intervalo $[a,b]$ por el símbolo

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Así la función que es tiene valor 1 en los racionales y 0 en los irracionales es no integrable, mientras que $f(x) = x^2$ si lo es.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = c$ para todo $x \in [a,b]$ y $\pi_n = \{x_k = a + k\frac{b-a}{n},\ k = 0,\dots,n\}$. Es fácil notar que $m_k = M_k = c$ para todo $k = 0,\dots,n$. De este modo,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\pi_n} m_k(x_k - x_{k-1}) = c(b-a) = \lim_{n\to\infty} \sum_{\pi_n} M_k(x_k - x_{k-1})$$

Por lo tanto las constantes son funciones integrables y se tiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b-a)$$

Ejemplo. Ahora sea $g(x) = x$ sobre el intervalo $[0,1]$ y π_n la partición $\{x_k = \frac{k}{n},\ k = 0,\dots,n\}$. Así,

$$\sum_{\pi_n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n^2} = \sum_{\pi_n} m_k(x_k - x_{k-1}) + \frac{1}{n}$$

que al hacer tender $n \to \infty$ se deduce que

$$\underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \frac{1}{2} = \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$$

que es el área de un triángulo isósceles de lado 1. Por lo tanto, la función g es integrable sobre $[0,1]$ y su integral coincide con el área del triángulo que delimita.

Ejemplo. Sea $f(x) = [x]$ sobre el intervalo $[0,2]$ y $\pi'_n = \{p_n\} \cup \{1 + p_n\}$ siendo p_n la partición del ejemplo anterior. Entonces,

$$\sum_{\pi'_n} M_k(x_k - x_{k-1}) = 1 = \sum_{\pi'_n} m_k(x_k - x_{k-1})$$

que es el área del cuadrado de lado 1. Por lo tanto, la función f es integrable sobre $[0,2]$ y su integral coincide con el área del cuadrado que delimita.

5.2. Funciones continuas

Un aspecto fundamental de las funciones integrables es que el límite no depende de la partición elegida ni del punto en que la función es evaluada. Esta afirmación sigue de la Proposición 2 y la desigualdad

$$\sum_{\pi} m_k(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{\pi} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \le \sum_{\pi} M_k(x_k - x_{k-1}), \quad \xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$$

siendo π una partición sobre el intervalo de integración de la función f. Los siguientes teoremas son de vital importancia para el cálculo de integrales y la caracterización de un conjunto de funciones integrables.

Teorema 7. *Sea f una función integrable sobre $[a,b]$, entonces*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{\pi_n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

para $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k)$ y π_n partición de $[a,b]$ tal que $\|p_n\| \to 0$ cuando $n \to \infty$.

Teorema 8. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces f es integrable.*

Demostración. Por la Proposición 2 podemos elegir $p_n = \{x_k = a + (b-a)\frac{k}{n} \,:\, k = 0, \ldots, n\}$, luego

$$\left| \sum_{\pi_n} M_k(x_k - x_{k-1}) - \sum_{\pi_n} m_k(x_k - x_{k-1}) \right| = \frac{(b-a)}{n} \sum_{\pi_n} (M_k - m_k) < \varepsilon \cdot (b-a)$$

ya que f es continua sobre un intervalo cerrado y acotado. ■

Corolario 9. *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua a tramos, entonces f es integrable.*

Un aspecto importante a tener presente de las integrales es que resultan ser un promedio de la función en el intervalo dado, es decir si f está definida en $[0,1]$ luego

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

es el promedio de los números $f(k/n)$. De este modo, al hacer tender $n \to \infty$ se tiene que

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n)$$

Más general,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + (b-a)k/n)$$

es el promedio de f en el intervalo $[a,b]$.

Ejercicio. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \right)$$

Ejercicio. Calcule el siguiente límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9}{n^3} (\sqrt{n^2+9} + 2\sqrt{n^2+36} + 3\sqrt{n^2+81} + \cdots + n\sqrt{n^2+9n^2})$$

Solución. Probaremos que la sucesión que se le toma límite es efectivamente la suma de Riemann de una función continua. Para ello notemos que

$$\frac{9}{n^3} (\sqrt{n^2+9} + 2\sqrt{n^2+36} + 3\sqrt{n^2+81} + \cdots + n\sqrt{n^2+9n^2}) = \frac{3}{n} \sum_{k=0}^{n} \left(3\frac{k}{n}\right) \sqrt{1 + \left(3\frac{k}{n}\right)^2}$$

que aproxima la integral en $[0,3]$ de la función $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$ y por tanto

$$\int_0^3 x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{(1+x^2)^{3/2}}{3}\bigg|_0^3 = \frac{10^{3/2} - 1}{3}$$

■

Ejercicio. Sea $y = f(x)$ una función con derivada continua sobre $[a, b]$ y $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ una partición. Defina $P_k = (x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots, n$.

(a) Calcule la longitud de la poligonal determinada por los trazos $\overline{P_0P_1}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$.

(b) Use el Teorema del Valor Medio para derivadas para reemplazar en la fórmula encontrada en (a) los términos $(y_k - y_{k-1})$.

(c) Use el concepto de integral para escribir la expresión exacta de la longitud de la poligonal.

(d) Calcule el valor de dicha longitud para $f(x) = x$ cuando $x \in [0, 1]$.

Ejercicio. Dada la función $f(x) = x(x + 2)$, $a \leq x \leq 2a$, $a > 0$, calcule

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx$$

Ejercicio. Calcule la integral

$$\int_1^3 e^x\,dx$$

Ejercicio. Sin calcular diga cuanto vale la integral

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx$$

5.3. Propiedades de la Integral

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones integrables, luego

(a)
$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

(b)
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

(c) Si $f(x) = c$ para todo x en $[a, b]$
$$\int_a^b f(x)\,dx = c(b - a)$$

(d)
$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(e) Para toda constante α
$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

(f)
$$\int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

(g) Para todo $a < c < b$ se satisface
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(h) Si $f(x) \geq 0$ para todo $a \leq x \leq b$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

(i) Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $a \leq x \leq b$ entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$$

(j) Si $m \leq f(x) \leq M$ para todo $a \leq x \leq b$ entonces

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$$

DEMOSTRACIÓN. Sea f una función acotada e integrable en el intervalo $[a, b]$.

(a) Para toda partición π del intervalo $[a, b]$ se satisface

$$\sum_\pi f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = -\sum_\pi f(\eta_k)(y_{k+1} - y_k)$$

escogiendo $\eta_k = \xi_{n-k}$ e $y_k = x_{n-k}$ partición del intervalo $[b, a]$.

(b) De la parte (a) se deduce que

$$\int_a^a f(x)\,dx = -\int_a^a f(x)\,dx$$

por tanto dicha integral debe ser cero.

(c) Esta parte fue demostrada en clases.

(d) Para toda partición π se satisface

$$\sum_\pi [f(\xi_k) + g(\xi_k)](x_{k+1} - x_k) = \sum_\pi f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_\pi g(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

que converge a la igualdad deseada cuando $\|\pi\| \to 0$.

(e) Para todo número real α y partición π se satisface

$$\sum_\pi \alpha f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \alpha \sum_\pi f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

que converge a la igualdad deseada cuando $\|\pi\| \to 0$.

(f) Esta parte es similar a la parte (d).

(g) Sea $a < c < b$ y sean π_1 y π_2 particiones de los intervalos $[a, c]$ y $[c, b]$ respectivamente. Luego $\pi = \pi_1 \cup \pi_2$ es partición de $[a, b]$ y se satisface

$$\sum_\pi f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) = \sum_{\pi_1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) + \sum_{\pi_2} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k)$$

que converge a la igualdad deseada cuando $\|\pi\| \to 0$.

Las otras demostraciones son inmediatas de la definición de integral y se dejan como ejercicio al lector. ■

Ejercicio. Calcule la integral

$$\int_0^1 (4+3x^2)\,dx$$

Ejercicio. Evalúe las siguientes integrales

$$\int_{-3}^0 (1+\sqrt{9-x^2})\,dx, \qquad \int_{-1}^2 |x|\,dx,$$

Ejercicio. Estime el valor de las siguientes integrales

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx, \qquad \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin(x)\,dx,$$

Ejercicio. Pruebe que

$$\int_0^1 (x+1)^2\,dx \geq \frac{1}{2}, \qquad 1{,}15 \leq \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt[4]{5+4x-x^2}} \leq 1{,}25$$

Ejercicio. Sea f una función integrable sobre $[a,b]$. Pruebe que $|f|$ es integrable y

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

5.4. Teorema Fundamental del Cálculo

Sea f una función real continua sobre el intervalo $[a,b]$. Luego para cada $x \in (a,b)$ definimos

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Sea M una cota superior para $|f|$ sobre $[a,b]$, luego para todo número real h se satisface

$$|F(x+h) - F(x)| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|\,dt \leq M|h|$$

que va a cero cuando $h \to 0$. De este modo la función F es continua. A continuación probaremos que F admite derivada en todo punto $x \in (a,b)$ y ésta coincide con $f(x)$. Para ello notemos que

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} |f(t)-f(x)|\,dx < \varepsilon$$

cada vez que $|h| < \delta$ dada la continuidad de f. Esto nos permite enunciar el siguiente teorema.

Teorema 10 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea f una función continua sobre $[a,b]$, luego*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es continua con derivada $f(x)$.

Una consecuencia inmediata del Teorema Fundamental del Cálculo es que

$$f(c) = \frac{F(b)-F(a)}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

para algún $c \in [a,b]$. Esto se debe al teorema del valor medio de funciones derivables. Así, la integral puede ser vista como un promedio de la función en un intervalo dado.

Definición 11. Definimos el **valor promedio** de una función integrable f sobre el intervalo $[a,b]$ como el número real

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$$

Ejercicio. Calcule el valor promedio de $f(x)=x$ en el intervalo $[-1,1]$. Calcule el valor promedio de $f(x)=[x]$ en el intervalo $[0,2]$.

Ejercicio. Si f es continua y $\int_1^3 f(x)\,dx = 8$, demuestre que f alcanza el valor 4, cuando menos una vez, en el intervalo $[1,3]$.

Una de las consecuencias más importantes del T.F.C. es el siguiente resultado.

Teorema 12. *Sea f una función continua con derivada continua sobre $[a,b]$. Luego*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

para todo $x \in [a,b]$.

Demostración. Definamos

$$F(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt, \qquad G(x) = F(x) - f(x)$$

luego $G'(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Por el teorema del valor medio se sabe que

$$\frac{G(x)-G(a)}{x-a} = G'(c) = 0, \qquad \text{para todo } x \in [a,b]$$

entonces $G(x) = F(a) - f(a) = 0$ para todo x en $[a,b]$. ■

Ejercicio. Encuentre una función f y un número a tales que

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\,dt = 2\sqrt{x}$$

Ejercicio. Calcule

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin(2t))^{1/t}\,dt$$

Solución. Por L'Hospital se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\int_0^x (1+\sin(2t))^{1/t}\,dt = \lim_{x\to 0}(1+\sin(2x))^{1/x}$$

Si el límite de la derecha existe y es igual a l, y dado que la función seno toma valores entre -1 y 1 se tiene, dada la continuidad del logaritmo, que

$$\log(l) = \lim_{x\to 0}\frac{\log(1+\sin(2x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\cos(2x)}{1+\sin(2x)} = 2$$

por lo tanto $l = e^2$. ■

Definición 13. Sea f una función integrable. Definimos su **integral indefinida** por

$$F(x) = \int f(x)\,dx$$

siendo $F'(x) = f(x)$. A la función F la denominaremos **una primitiva** de f.

Hemos de notar en la definición anterior que si F es primitiva de f entonces $G(x) = F(x) + c$ también es primitiva de f para toda constante c.

En adelante, si F es una primitiva de f entonces denotaremos

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

5.5. Integrales Conocidas

(a)
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

(b)
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$$

(c) Para todo número entero n se tiene
$$\int x^n\,dx = \begin{cases} \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{si } n > 0 \\ \log(x) & \text{si } x > 0 \text{ y } n = -1 \\ \frac{x^{n+1}}{n+1} & \text{si } n < 0 \end{cases}$$

(d)
$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan(x) + c$$

(e)
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

(f)
$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + c$$

(g)
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log(a)} + c$$

(h)
$$\int \csc^2(x)\,dx = -\cot(x) + c$$

(i)
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$$

5.6. Cambio de Variable

Sea $g : [a, b] \to [c, d]$ continua con derivada continua. Sea $f : [c, d] \to \mathbb{R}$, luego $h(x) = f(g(x))g'(x)$ es continua y por tanto integrable sobre $[a, b]$. Definamos
$$F(x) = \int_{g(a)}^{x} f(t)\,dt$$
una primitiva de f. Luego,
$$\int_a^x f(g(t))g'(t)\,dt = \int_a^x \frac{d}{dt}F(g(t))\,dt = F(g(x)) - F(g(a)) = \int_{g(a)}^{g(x)} f(t)\,dt$$
conocido como el Teorema del cambio de Variable.

Ejercicio. Determine el valor de a tal que
$$\int_a^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \frac{4}{3}$$

SOLUCIÓN. Podemos notar que en la integral anterior $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ y $g(x) = \frac{x^2}{2}$ luego por el teorema de cambio de variable se tiene

$$\int_a^2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \int_{a^2/2}^2 \frac{dx}{\sqrt{1+x}} = 2\sqrt{1+x}\Big|_{a^2/2}^2$$

luego $a^2 = (\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{3})\sqrt{2}$. Ya que la función integrando es impar se puede ver que podemos elegir tanto la raíz positiva como la negativa de a. ■

Ejercicio. Calcule la integral

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}\,dx$$

SOLUCIÓN. Si $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{3x^2-2x+1}{2}$ entonces

$$\int_0^1 \frac{3x-1}{3x^2-2x+1}\,dx = \int_{1/2}^1 \frac{dx}{x} = \log(2)$$

■

Ejercicio. Sea f una función diferenciable sobre $[a,b]$ y g continua sobre el recorrido de f. Determine una expresión para la derivada de

$$G(x) = \int_a^{f(x)} g(t)\,dt$$

SOLUCIÓN. Definamos

$$F(x) = \int_a^x g(t)\,dt$$

luego $G(x) = F(f(x))$ concluyendo así por regla de la cadena que

$$G'(x) = F'(f(x))f'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

■

Ahora, en el teorema de cambio de variable, supongamos que $c = g(a)$ y $d = g(b)$ siendo g una función inyectiva en $[a,b]$, entonces

$$\int_c^d f(x)\,dx = \int_a^b f'(g(x))g'(x)\,dx$$

que será la mejor representación para este teorema. Para ilustrar esta afirmación consideremos el siguiente ejercicio.

Ejercicio. Pruebe que el área del círculo con radio r es πr^2.

SOLUCIÓN. Sabemos que dicha área está dada por la integral

$$4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx$$

y definamos $g(x) = r\sin(x)$ que es inyectiva en $[0, \frac{\pi}{2}]$ tal que $g(0) = 0$ y $g(1) = r$. Luego,

$$4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2(x)}r\cos(x)\,dx = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x)\,dx$$

Pero $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$ luego

$$4\int_0^r \sqrt{r^2-x^2}\,dx = 4r^2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos(2x)}{2}\,dx = \pi r^2$$

■

Otro resultado importante, consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, es la *integración por parte* o también conocido *teorema de la vaca* que enunciaremos y probaremos a continuación.

Teorema 14. *Sean u y v funciones continuas con derivadas continuas sobre $[a, b]$. Luego,*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)\,dx$$

Demostración. Si definimos $f(x) = u(x)v(x)$ entonces

$$\int_a^b [u'(x)v(x) + u(x)v'(x)]\,dx = \int_a^b f'(x)\,dx = u(x)v(x)\Big|_a^b$$

■

Una manera sencilla de escribir el resultado anterior es el siguiente

$$\int udv = uv - \int vdu$$

en el sentido de la integral impropia ya que $du(x) = u'(x)\,dx$ y $dv(x) = v'(x)\,dx$.

Ejercicio. Calcule las integrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, \qquad \int_1^e \frac{\log(x)}{x}\,dx$$

Solución. Para la primera integral consideramos la primitiva $F(x) = \arctan(x)$ y de este modo la integral tiene por valor $\frac{\pi}{4}$. Para la segunda integral aplicaremos integración por parte, definiendo $u(x) = \log(x)$ y $v'(x) = \frac{1}{x}$, obteniendo así

$$\int_1^e \frac{\log(x)}{x}\,dx = [\log(x)]^2\Big|_1^e - \int_1^e \frac{\log(x)}{x}\,dx$$

por lo tanto esta integral tiene por valor numérico $\frac{1}{2}$. ■

Ejercicio. Mediante integración por parte determine el valor de la integral

$$\int_1^x \log(t)\,dt$$

Y determine una primitiva de la función $f(x) = \log(x)$

Solución. Si definimos $u(x) = \log(x)$ y $v'(x) = 1$ entonces

$$\int_1^x \log(t)\,dt = x\log(x) - \int_1^x dt = x(\log(x) - 1) + 1$$

■

Así, $F(x) = x(\log(x) - 1)$ es una primitiva de $f(x)$.

Ejercicios La Integral de Riemann

1.- Exprese como una integral indefinida el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3\left(1+\frac{2k}{n}\right)^3-6\right)\frac{2}{n}$$

y calcule la integral resultante.

2.- Exprese como una integral indefinida el límite

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left[\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)^{1/n}\right]$$

y calcule la integral resultante.

3.- Calcule las siguiente integrales indefinidas

a) $\displaystyle\int \sin(x)\log(\tan(x))\,dx$

b) $\displaystyle\int \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{x}(1+x)}\,dx$

4.- Sea f una función continua y sean

$$F(x)=\int_0^x f(u)(x-u)\,du, \qquad G(x)=\int_0^x\left(\int_0^u f(t)\,dt\right)du$$

Demuestre que $F(x)=G(x)$.

5.- Sea $I=\displaystyle\int_{-1}^{2}\sqrt{1+x^4}\,dx$.

a) Demuestre que $3\le I\le 3\sqrt{17}$.

b) Demuestre que $I\le 6$.

6.- Sea f una función integrable sobre $[-a,a]$. Entonces si f es impar pruebe que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=0$$

7.- Sea f una función integrable sobre $[-a,a]$. Entonces si f es par pruebe que

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx=2\int_0^a f(x)\,dx$$

8.- Calcule el área encerrada por las curvas $f(x)=\sin(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ en el intervalo $[0,\pi]$.

9.- Determine el área encerrada por las curvas $f(x)=x^2$ y $g(x)=\sqrt{x}$.

10.- Calcule la integral

$$\int x\sin(x)\,dx$$

11.- Calcule la integral

$$\int \frac{\log^2(x)}{x}\,dx$$

12.- Calcule

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\,dx$$

Funciones Logaritmo y Exponencial

Consideremos f una función continua sobre $[a,b]$. Si F es una primitiva de f tal que $F(a)=0$ luego

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

Por el TFC sabemos que F tiene por derivada a f. El siguiente ejercicio nos introducirá la función logaritmo como la integral de una función continua para sobre $(0,\infty)$.

Ejercicio. Sea $F(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ para todo $x>0$.

(a) Determine el dominio de F.

(b) Justifique la existencia de F' y calcúlela.

(c) Deduzca que F es inyectiva.

(d) Justifique la existencia de F^{-1} y $(F^{-1})'$. Calcule $(F^{-1})'$ en términos de F^{-1}.

Ejercicio. Sea f una función derivable de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$, continua tal que $f(0)=1$ y $f'(x)=f(x)$, para todo x.

(a) Demuestre que

$$\int_0^x f(t)\,dt=f(x)-f(0)$$

(b) Demuestre que f es inyectiva.

(c) Demuestre que $(f^{-1})'(x)=\frac{1}{x}$.

(d) Demuestre que

$$f^{-1}(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

6.1. Función Logaritmo

Sea $f(x)=\frac{1}{x}$ para todo x en el intervalo $(0,\infty)$, luego f es continua sobre $[1,x]$ (o bien sobre $(x,1)$) y definamos

$$F(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

que es continua con derivada $F'(x)=f(x)$ para todo $x\in(0,\infty)$, consecuencia del teorema fundamental del cálculo. Dado que $F'(x)>0$ para todo $x\in(0,\infty)$ se deduce que F es estrictamente creciente. Más aun, F es una función cóncava ya que $F''(x)<0$.

Definición 1. Definimos la función **logaritmo** como la función definida por la integral

$$\log(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$$

para todo $x\in(0,\infty)$.

Teorema 2. *Para todo a,b reales positivos se satisface* $\log(ab)=\log(a)+\log(b)$.

Demostración. Sea $a\in\mathbb{R}$ y definamos la función $f(x)=\log(ax)$ que tiene por derivada

$$f'(x)=\frac{1}{x}$$

Luego, por el teorema fundamental del cálculo se deduce que

$$f(x)-f(1)=\int_1^x f'(t)\,dt=\log(x)+C$$

siendo $C=0$. ■

Si queremos saber el logaritmo de a^{-1} para $a > 0$ hemos de notar que

$$0 = \log(1) = \log(a) + \log(a^{-1})$$

consecuencia del teorema anterior. Esto nos permite enunciar el siguiente resultado:

Corolario 3. *Para todo a, b números reales positivos*

$$\log(a/b) = \log(a) - \log(b)$$

Hasta el momento hemos sido capaces de definir en el curso de Cálculo 1 a^r para $a > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$. Una de las ventajas al definir la función logaritmo es la consistencia de la expresión a^r para todo $r \in \mathbb{R}$. En vía de esta afirmación probemos el siguiente resultado.

Lema 4. *Sea $a > 0$ y $r \in \mathbb{Q}$, luego*

$$\log(a^r) = r \log(a)$$

Demostración. Por regla de la cadena se tiene que

$$\frac{d}{dx} \log(x^r) = r \frac{x^{r-1}}{x^r} = \frac{r}{x}$$

que por el teorema fundamental del cálculo se obtiene la siguiente relación

$$\log(x^r) = \int_1^x \frac{d}{dt} \log(t^r)\, dt = r \int_1^x \frac{dt}{t} = r \log(x)$$

■

Sabemos que la función logaritmo es una función estrictamente creciente por lo tanto $\log(2) > 0$. De este modo,

$$\lim_{n\to\infty} \log(2^n) = \lim_{n\to\infty} n \log(2)$$

que es infinito. Por lo tanto, la función logaritmo es no acotada. Similarmente se puede demostrar que

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$$

Por otro lado recordemos el en número e de Euler está dado por

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

entonces el siguiente lema nos relaciona la función logaritmo y el número e.

Lema 5.

$$\log(e) = 1$$

Demostración. La función logaritmo es continua sobre $(0, \infty)$ entonces

$$\log(e) = \lim_{n\to\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

■

6.2. Función Exponencial

Sabemos de la sección anterior que la función logaritmo es estrictamente creciente sobre $(0, \infty)$ y recorrido todos los reales. De este modo es posible definir su función inversa, que denotaremos $\exp(x)$, por la relación

$$\begin{aligned} \exp(\log(x)) &= x, \quad \text{para todo } x > 0 \\ \log(\exp(x)) &= x, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

que denominaremos *exponencial*. En particular se tiene que $\exp(0) = 1$ y $\exp(1) = e$.

Teorema 6. *Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$\exp(a + b) = \exp(a) \exp(b)$$

Demostración. Por definición existen $x, y > 0$ tales que $a = \log(x)$ y $b = \log(t)$. Entonces,

$$\exp(a + b) = \exp(\log(x) + \log(y)) = \exp(\log(xy)) = xy$$

Por otro lado tenemos que $\exp(a) = x$ y $\exp(b) = y$ igualdades que concluyen la demostración. ■

Gracias al teorema anterior y la relación $\exp(1) = e$ se demuestra inductivamente que $\exp(n) = e^n$ para todo natural n. Además es posible concluir para todo número natural n que $\exp(-n) = e^{-n}$ ya que

$$1 = \exp(0) = \exp(n - n) = \exp(n) \exp(-n) = e^n \exp(-n)$$

Ya que para todo $r \in \mathbb{Q}$ podemos definir a^r, $a > 0$, que satisface la relación $\log(a^r) = r \log(a)$, entonces podremos hacer la siguiente definición

Definición 7. Para todo $a > 0$ y real x definimos

$$a^x = \exp(x \log(a))$$

En particular $e^x = \exp(x)$.

Teorema 8. *La función exponencial es continua, convexa, derivable, estrictamente creciente tal que*

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$

Consideremos la ecuación $b^y = x$ que tiene por solución $y = \log(x)/\log(b)$, que motiva la siguiente definición:

Definición 9. Sea b un número real positivo distinto de 1. Definimos el **logaritmo en base** b por la relación

$$\log_b(x) = \frac{\log(x)}{\log(b)}$$

6.3. Crecimiento Exponencial

Los materiales radiactivos se descomponen a una razón que es proporcional a la cantidad de material presente en cada momento. Esto significa que si $y = y(t)$ es la cantidad de material radiactivo en el tiempo t, entonces la función y satisface una ecuación diferencial de la forma:

$$\frac{dy}{dt} = r\, y$$

siendo $r < 0$ la constante de proporcionalidad. La ecuación anterior se llama *ecuación diferencial* porque ella involucra la derivada de una función desconocida $y = y(t)$. Resolver la ecuación diferencial es encontrar una función que satisfaga la ecuación.

Teorema 10. *Para una constante $r \neq 0$, las soluciones de la ecuación diferencial*

$$\frac{dy}{dt} = r\, y$$

son de la forma

$$y(t) = Ce^{rt}$$

donde C es una constante arbitraria.

6.4. Funciones Hiperbólicas

Ya hemos definido la función exponencial $e^x = \exp(x)$ como la inversa de la función logaritmo. A continuación definiremos la funciones hiperbólicas como una cierta combinación de la función exponencial.

Definición 11. Para todo $x \in \mathbb{R}$ definimos las **funciones hiperbólicas**:

(a) **Seno hiperbólico**

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

(b) **Coseno hiperbólico**

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(c) **Tangente hiperbólico**

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

(d) **Cotangente hiperbólico**

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

No es difícil probar que

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Ejercicios Funciones Logaritmo & Exponencial

1.-

Técnicas de Integración

A continuación trataremos diferentes técnicas, mediante cambio de variable, que nos permitirán calcular integrales. Para ello será introduciremos el concepto de *integral indefinida* y sus propiedades.

7.1. Integral Indefinida

Definición 1. Diremos que una función F es una **primitiva** de una función f sobre (a, b) si $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in (a, b)$.

Ejemplo. Si consideramos $f(x) = x^2$ es evidente que $F(x) = x^3/3$ es una primitiva. Más aun, para toda constante $C \in \mathbb{R}$ se tiene que $G(x) = F(x) + C$ es también primitiva de f.

En relación al ejemplo anterior, hemos de notar que si f admite por primitiva a F luego $G(x) = F(x) + C$, siendo $C \in \mathbb{R}$, entonces G también es una primitiva. El siguiente teorema nos permitirá caracterizar la familia de las funciones primitivas a una función dada.

Teorema 2. *Sean F, G primitivas de una función dada f. Entonces F, G difieren en una constante.*

Demostración. Sea H una función continuamente diferenciable tal que $H'(x) = 0$ para todo x en el dominio de H. Luego, por el teorema del valor medio se tiene que

$$\frac{H(x) - H(a)}{x - a} = H'(c), \qquad c \in (a, x)$$

entonces $H(x) = H(a)$ para todo x en el dominio de H. Por lo tanto si definimos $H(x) = F(x) - G(x)$ se tiene que $F(x) = G(x) + C$ siendo C una constante. ■

Una consecuencia inmediata del teorema fundamental del cálculo y la noción de primitivas es la siguiente relación

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)\, dt = G(x) - G(a)$$

cuando F, G son primitivas de f. Esto nos permite hacer la siguiente definición.

Definición 3. Sea f una función integrable y F una primitiva. Denotaremos por

$$\int f(x)\, dx$$

a cualquier función de la forma $F(x) + C$ siendo C algún número real. La función F será denominada como la **integral indefinida**.

De la definición anterior puede deducirse que

$$\frac{d}{dx} \int f(x)\, dx = f(x) \qquad \text{y} \qquad \int \frac{d}{dx} F(x)\, dx = F(x) + C$$

Ejemplo. Consideremos la función $\sin(x)$ que tiene a $-\cos(x)$ como una primitiva luego

$$\int \sin(x)\, dx = -\cos(x) + C$$

siendo C una constante real.

7.2. Fórmulas Básicas de Integración

A continuación expondremos una familia de funciones integrables con sus respectivas primitivas.

(a)
$$\int 0\,dx = C$$

(b)
$$\int a\,dx = ax + C$$

(c)
$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

(d)
$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C$$

(e)
$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C$$

(f)
$$\int \sec^2(x)\,dx = \tan(x) + C$$

(g)
$$\int \csc(x)\,dx = -\cot(x) + C$$

(h)
$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + C$$

(i)
$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

(j)
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C$$

(k)
$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos(x) + C$$

(l)
$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \arctan(x) + C$$

(m)
$$\int \frac{-1}{1-x^2}\,dx = -\operatorname{arccot}(x) + C$$

(n) Para todo $a \neq -1$ y $x > 0$
$$\int x^a\,dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$$

(ñ)
$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log(a)} + C$$

(o)
$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C$$

(p)
$$\int \cosh(x)\,dx = -\sinh(x) + C$$

(q)
$$\int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\coth(x) + C$$

(r)
$$\int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = -\tanh(x) + C$$

(s)
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

(t) Si $|x| > 1$ entonces
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \log(x + \sqrt{1+x^2}) + C$$

(u)
$$\int \frac{1}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\log(\tfrac{1+x}{1-x}) + C$$

7.3. Integración por Partes

En el lenguaje de las integrales indefinidas enunciaremos el siguiente teorema, conocido como integración por partes.

Teorema 4. *Sean u, v funciones continuamente diferenciables, luego*

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

donde du (resp. dv) denota $u\,dx$ (resp. $v\,dx$).

El anterior teorema es consecuencia inmediata del teorema fundamental del cálculo. A continuación ilustraremos unos ejemplos donde se utiliza el teorema anterior.

Ejemplo. Sea la integral impropia

$$I = \int xe^x\,dx$$

y definamos $u = x$ y $dv = e^x\,dx$ entonces por el teorema de integración por parte se obtiene

$$I = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$$

Ahora calculemos la integral impropia de la función logaritmo

$$\int \log(x)\,dx = x\log(x) - \int x\cdot\frac{1}{x}\,dx = x(\log(x) - 1) + C$$

luego de haber elegido $u = \log(x)$ y $dv = 1$.

Finalmente, sea $u = e^x$ y $dv = \sin(x)\,dx$ entonces

$$\begin{aligned} I = \int e^x\sin(x)\,dx &= -e^x\cos(x) + \int e^x\cos(x)\,dx \\ &= -e^x\cos(x) + e^x\sin(x) - I \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\int e^x\sin(x)\,dx = e^x(\sin(x) - \cos(x)) + C$$

7.4. Integración por Substitución

En esta sección expondremos alguno de los cambio de variables más usuales para el cálculo de integrales. Para ello todas las integrales que calcularemos serán indefinidas. Para ello antes introduciremos la siguiente definición,

Definición 5. Sean $p(x), q(x)$ polinomios de variable x. Diremos que $p(x)/q(x)$ es una **función racional**.

Ejemplo. Consideremos para todo entero $n \neq 1$ la integral

$$I = \int (ax + b)^n\,dx$$

y el cambio de variable $y = ax + b$, luego

$$I = \frac{1}{a}\int y^n\,dy = \frac{1}{a}\cdot\frac{y}{n+1} + C = \frac{1}{a}\cdot\frac{(ax+b)^n}{n+1} + C$$

Ejemplo. Ahora el ejemplo anterior para $n = 1$ y cambio de variable $y = ax + b$, entonces

$$\int \frac{1}{ax+b}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{a}\log|y| + C = \frac{1}{a}\log|ax+b| + C$$

Ejemplo. Integremos a continuación la función $\sin(ax)$ para a un número real haciendo el cambio de variable $y = ax$

$$\int \sin(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int \sin(y)\,dy = -\frac{\cos(y)}{a} + C = -\frac{\cos(ax)}{a} + C$$

Muchas integrales de tipo polinomial racional admiten solución mediante un cambio de variable trigonométrico como expondremos en los siguientes ejemplos.

Ejemplo. Consideremos la integral de la función racional

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$

y el cambio de variable $x = a\sin(u)$, obteniendo así la siguiente representación de la integral anterior

$$I = a\int \frac{\cos(u)}{\sqrt{a^2 - a^2\sin^2(u)}}\,du = \int \frac{\cos(u)}{|\cos(u)|}\,du = \pm \arcsin(\tfrac{x}{a}) + C$$

donde el signo de la última igualdad depende del índice de integración.

Ejemplo. Consideremos la integral de la función racional

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

y el cambio de variable $x = a\tan(u)$, obteniendo así la siguiente representación de la integral anterior

$$I = a\int \frac{\sec^2(u)}{\sqrt{a^2 + a^2\tan^2(u)}}\,du = \int \frac{\sec^2(u)}{|\sec(u)|}\,du = \pm\int \sec(u)\,du$$

donde el signo de la última igualdad depende del índice de integración. De este modo solo nos resta calcular la integral de la función secante,

$$\begin{aligned}\int \sec(u)\,du &= \int \frac{\cos(u)}{\cos^2(u)}\cdot\frac{1+\sin(u)}{1+\sin(u)}\,du \\ &= \int \frac{\sec^2(u) + \tan(u)\sec(u)}{\tan(u)+\sec(u)}\,du = \log|\tan(u) + \sec(u)| + C\end{aligned}$$

obteniendo así, luego de volver a través de los cambio de variable,

$$I = \log\left|\frac{x}{a} + \frac{a}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right| + C$$

Ejercicio. Calcule para todo $a > 0$ la integral indefinida

$$\int \frac{dx}{a^2 \pm x^2}$$

Ejemplo. Integremos la función tangente

$$I = \int \tan(x)\,dx$$

con el cambio de variable $y = \cos(x)$, obteniendo la siguiente igualdad

$$I = \int \frac{-y}{y}\,dy = \cos(x)$$

Ejemplo. Para calcular la integral de la función cosecante recordemos la identidad trigonométrica $\sin(x) = 2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})$, luego

$$I = \int \csc(x)\,dx = \int \frac{dx}{2\sin(\frac{x}{2})\cos(\frac{x}{2})} = \frac{1}{2}\int \frac{\sec^2(\frac{x}{2})}{\tan(\frac{x}{2})}\,dx = \log|\tan(\tfrac{x}{2})| + C$$

Ejemplo. Para el cálculo de la siguiente integral consideremos el cambio de variable $t = \log(x)$

$$I = \int \frac{\cos(\log(x))}{x}\,dx = \int \cos(t)\,dt = \sin(\log(x)) + C$$

Ejemplo. Calculemos la siguiente integral por el método de integración por parte

$$I = \int \arcsin(x)\,dx = x\arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

luego de suponer que $u = \arcsin(x)$ y $dv = dx$. Si en la integral del lado derecho del la última igualdad hacemos el cambio de variable $t = x^2$ obtendremos

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -\sqrt{1-t}$$

Por lo tanto, la integral indefinida I queda dada por

$$I = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C$$

Ejemplo. Ahora sea la integral

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^3-1}}$$

que puede ser escrita de la siguiente forma

$$I = \int \frac{x^2}{x^3\sqrt{x^3-1}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{x^3\sqrt{x^3-1}}$$

haciendo el cambio de variable $u = x^3$. Entonces,

$$I = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u\sqrt{u-1}}$$

Ahora consideremos el cambio de variable $t^2 = u - 1$, luego

$$I = \frac{2}{3}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{2}{3}\arctan(\sqrt{x^3-1}) + C$$

Ejercicio. Calcule la integral indefinida

$$\int \frac{x}{(x^2 \pm 1)^n}\,dx$$

para todo n en los naturales.
Nota. Ver el caso en que $n = 1$.

7.5. Fórmulas de Reducción

Consideremos f continuamente diferenciable y F una primitiva. Luego para todo natural n definamos

$$I_n = \int [f(x)]^n\,dx$$

que mediante integración por parte se puede escribir

$$I_n = F(x)[f(x)]^{n-1} - (n-1)\int F(x)f'(x)[f(x)]^{n-2}\,dx$$

A continuación veremos unos ejemplos de integrales I_n donde se obtiene una relación de recurrencia.

Ejemplo. Sea $f(x) = \sin(x)$ luego

$$\begin{aligned} I_n = \int \sin^n(x)\,dx &= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)\int \sin^{n-2}(x)\cos^2(x), dx \\ &= -\cos(x)\sin^{n-1}(x) + (n-1)(I_{n-2} - I_n) \end{aligned}$$

que de manera inductiva permite calcular I_n para todo natural n. Analice los casos $n = 2$ y $n = 5$.

Ejercicio. Encuentre una forma recursiva para la integral I_n cuando $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \csc(x)$ y $f(x) = \sec(x)$.

Ejemplo. Algunas relaciones importantes que resultan inmediato de integrar por parte son

$$I_n = -x^n\cos(x) + n\int x^{n-1}\cos(x)\,dx, \quad I_n = \int x^n\sin(x)\,dx$$

$$I_n = -x^n\sin(x) - n\int x^{n-1}\sin(x)\,dx, \quad I_n = \int x^n\cos(x)\,dx$$

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}, \quad I_n = \int x^n e^x\,dx$$

$$I_n = x\log^n(x) - nI_{n-1}, \quad I_n = \int \log^n(x)\,dx$$

Ejercicio. Encuentre una expresión recursiva para

$$I_{n,m} = \int \sin^n(x)\cos^m(x)\,dx$$

para $n, m \in \mathbb{N}$.

7.6. Integración de Funciones Racionales

Recordemos que una función racional $R(x)$ es un cuociente de polinomios, $R(x) = P(x)/Q(x)$. Para integrar este tipo de polinomios estudiaremos su descomposición en fracciones parciales simples. Supongamos que el grado del numerador es igual o mayor que el denominador, entonces, realizando la división de polinomios obtenemos:

$$R(x) = F(x) + \frac{G(x)}{Q(x)}$$

siendo $G(x)$ un polinomio de grado menor que $Q(x)$.

Un resultado importante que no demostraremos en estos apuntes es que $G(x)/Q(x)$, como antes, se puede descomponer es una suma de funciones racionales $R_k = G_k(x)/Q_k(x)$ tales que el grado de $Q_k(x)$ mayor en uno que el grado de $G(k)(x)$. A continuación realizaremos el cálculo de integrales de funciones fraccionales aplicando el proceso de fracciones parciales.

Ejemplo. Consideremos la función fraccional $(3x-5)/(x^2-4x+3)$ tal que

$$\frac{3x-5}{x^2-4x+3} = \frac{3x-5}{(x-3)(x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1}$$

que nos arroja el sistema

$$\begin{array}{|c} \text{A+B=3} \\ \hline \text{A+B=5} \end{array}$$

que tiene por solución $A = 2$ y $B = 1$. De este modo, la integral indefinida asociada a la función fraccional está dada por

$$\int \frac{3x-5}{x^2-4x+3}\,dx = 2\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{dx}{x-1} = 2\log(x-3) + \log(x-1)$$

Ejemplo. Ahora estamos interesados en calcular la integral

$$I = \int \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$$

Lo primero que debemos hacer es determinar una expresión en fracciones parciales para la función racional $R(x) = \frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)}$. Para ello notemos que

$$\frac{x^2+2x+3}{(x-1)^2(x^2+1)} = \frac{Ax+B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}$$

que entrega el sistema

$$\left|\begin{array}{c} \text{B+C=0} \\ \text{A-B-2C+D=1} \\ \text{B+C-2D=2} \\ \text{A-B+D=3} \end{array}\right|$$

que admite solución para $A = 3$, $B = -1$, $C = 1$ y $D = -1$. Entonces la integral indefinida queda dada por

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{3x-1}{(x-1)^2}\,dx + \int \frac{x-1}{x^2+1}\,dx \\ &= 3\int \frac{dx}{x-1}\,dx + 2\int \frac{dx}{(x-1)^2} + \int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+1} \\ &= 3\log(x-1) - \frac{2}{x-1} + \frac{\log(x^2+1)}{2} - \arctan(x) + C \end{aligned}$$

Ejercicio. Calcule las integrales indefinidas

$$\int \frac{dx}{x^3-1}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}, \quad \int \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}(1+\sqrt[3]{x})}$$

Ejemplo. Calculemos la integral indefinida

$$I = \int \sqrt{\tan(x)}\,dx$$

con el cambio de variable $t = \sin(x)$ obteniendo así

$$I = \int t^{1/2}(1-t^2)^{-3/4}dt$$

que admite cambio de variable $u = t^2$,

$$I = \frac{1}{2}\int u^{-1}\left(\frac{1-u}{u}\right)^{-3/4}\,du$$

Finalmente, si $y^4 = \frac{1-u}{u}$ tendremos

$$I = -2\int \frac{dy}{1+y^4}$$

donde

$$\frac{1}{1+y^4} = \frac{1}{(1+\sqrt{2}y+y^2)(1-\sqrt{2}y+y^2)}$$

que puede ser resuelto por fracciones parciales y obtener finalmente el valor de la integral.

Ejercicios Técnicas de Integración

1.- Calcule la integral

$$\int \frac{\cos(\log(x))}{x}\, dx$$

2.- Usando el método del integración por partes calcule

$$\int \arcsin(x)\, dx$$

Integrales Impropias

La definición de integral de Riemann necesita dos hipótesis mínimas que son que la función sea acotada y que esté definida en un intervalo cerrado y acotado. Cuando al menos una de estas condiciones no se cumple debemos usar otros recursos para darle sentido a las integrales. Entonces, hablaremos de integrales impropias cuando la función no es acotada en el intervalo de integración o cuando el intervalo de integración no es acotado, es decir tiene una de las formas siguientes: $(-\infty, a)$, (a, ∞) y $(-\infty, \infty)$.

8.1. Integrales Impropias de Primera Especie

Definición 1. Sea $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[a, c]$ para todo $c > a$. Definimos la **integral impropia** sobre el intervalo $[a, \infty)$ por

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

cuando el límite existe. Si el límite existe diremos que la **integral es convergente**, de lo contrario diremos que la **integral es divergente**.

Ejemplo. Sea $f(x) = 1/x^2$ sobre $[0, \infty)$. Puesto que f es continua, entonces es integrable sobre todo intervalo acotado $[1, c]$, para $c > 1$, entonces

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to\infty} \left(1 - \frac{1}{c}\right) = 1$$

Así podemos notar que la integral impropia de f sobre el intervalo $[1, \infty)$ es convergente.

Ejemplo. Sea $f(x) = 1/x$ sobre $[0, \infty)$. Puesto que f es continua, entonces es integrable sobre todo intervalo acotado $[1, c]$, para $c > 1$, entonces

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_1^c \frac{dx}{x} = \lim_{c\to\infty} \log(c) = \infty$$

Así podemos notar que la integral impropia de f sobre el intervalo $[1, \infty)$ es divergente.

Definición 2. Sea $f : (-\infty, a] \to \mathbb{R}$ una función integrable sobre $[c, a]$ para todo $c < a$. Definimos la **integral impropia** sobre el intervalo $(-\infty, a]$ por

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^a f(x)\,dx$$

cuando el límite existe. Si el límite existe diremos que la **integral es convergente**, de lo contrario diremos que la **integral es divergente**.

Ejemplo. Consideremos la función $f(x) = e^x$ sobre $(-\infty, 0]$, luego

$$\int_{-\infty}^0 f(x)\,dx = \lim_{c\to-\infty} (1 - e^c) = 1$$

Por lo tanto f tiene integral impropia convergente sobre $(-\infty, 0]$.

Lo anterior motiva la siguiente definición.

Definición 3. Sea $f : (-\infty, \infty) \to \mathbb{R}$ una función tal que

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_a^\infty f(x)\,dx$$

existen para algún número real a. Definimos la **integral impropia** sobre el intervalo $(-\infty, \infty)$ por

$$\int_{-\infty}^a f(x)\,dx = \int_{-\infty}^a f(x)\,dx + \int_a^\infty f(x)\,dx$$

Ejercicio. Para $a > 0$ identifique los valores de p tales que

$$\int_a^\infty \frac{dx}{x^p}$$

es convergente.

Las siguientes propiedades para las integrales impropias son inmediatas de la definición y las propiedades de las integrales de Riemann para funciones acotadas sobre intervalos acotados. La demostración de las mismas se dejan como ejercicio para el lector.

(i) **Linealidad.** Si f y g son integrables en $[a, c)$ para todo $c > a$, y si sus respectivas integrales impropias sobre $[a\infty)$ son convergentes, entonces también existe

$$\int_{-\infty}^a (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_{-\infty}^a f(x)\, dx + \beta \int_{-\infty}^a g(x)\, dx$$

(ii) **Regla de Barrow.** Si f es una función continua en $[a, \infty)$ y si $F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f en $[a, c]$ para todo $c > a$ entonces si f tiene integral convergente sobre $[a, \infty)$ se satisface

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \lim_{c\to\infty} F(c) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty$$

(iii) **Cambio de Variable.** Si $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua y si $\varphi : [\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua; Donde $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$ y si además $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) \to b^-$ cuando $t \to \beta$ y si $\varphi([\alpha, \beta)) = [a, \infty)$, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)\, dx = \int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

Si una de las integrales es convergente (divergente), la otra también lo es.

(iv) **Integración por Partes.** Si f, g son dos funciones con derivadas continuas en $[a, \infty)$ y son convergentes dos de los tres términos siguientes, entonces:

$$\int_a^\infty f(x)g'(x)\, dx = f(x)g(x)\Big|_a^\infty - \int_a^\infty f'(x)g(x)\, dx$$

Observación. Todas las propiedades anteriores son válidas para integrales sobre intervalos del tipo $(-\infty, a]$.

Ejercicio. Resolver las siguientes integrales:

(a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x^2}{1+x^2}\, dx$

Ejercicio. Demuestre que para todo natural n se satisface

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\, dt = n!$$

Ejercicio. Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$$

Ejercicio. Calcule la siguiente integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$$

Ejercicio. Demuestre que

$$\int_0^\infty e^{-x}\cos(\alpha x)\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Ejercicio. Calcule el valor de la siguiente integral

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4}$$

8.2. Integrales Impropias de Segunda Especie

Definición 4. Si $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ una función tal que, para todo $a<c<b$, f es integrable en $[c,b]$ entonces se define

$$\int_{a^+}^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

cuando este límite existe.

Ejemplo. La función $f(x)=x^{-1/2}$ no está definida para $x=0$, luego

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} 2(1-\sqrt{c}) = 2$$

Definición 5. Si $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ una función tal que, para todo $a<c<b$, f es integrable en $[a,c]$ entonces se define

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-}\int_c^b f(x)\,dx$$

cuando este límite existe.

Definición 6. Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es una función tal que, para todo $c_1<c_2$ en (a,b) f es integrable en $[c_1,c_2$ entonces se define

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c_1\to a^+}\int_{c_1}^{x_0} f(x)\,dx + \lim_{c_2\to b^-}\int_{c_2}^{x_0} f(x)\,dx$$

para cualquier $x_0\in(a,b)$ si el límite existe.

Ejemplo. Consideremos la función $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$

$$f(x)=\begin{cases}1/x^2 & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$$

entonces la función f tiene problemas de integrabilidad en $x=0$ lo que dice

$$\int_{-1}^1 f(x)\,dx = \lim_{c\to 0^-}\int_{-1}^c \frac{dx}{x^2} + \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{dx}{x^2} = -\lim_{c\to 0^-}\left(\frac{1}{c}+1\right) - \lim_{c\to 0^+}\left(1-\frac{1}{c}\right) = \infty$$

por lo tanto la función no tiene integral en $[-1,1]$.

Ejemplo. Sea $b>0$ y $p\neq 1$

$$\int_0^b \frac{dx}{x^p} = \frac{b^{1-p}}{1-p} - \lim_{c\to 0^+}\frac{c^{1-p}}{1-p} = \begin{cases}b^{1-p}(1-p)^{-1} & \text{si} p<1\\ -\infty & \text{si} p>1\end{cases}$$

Por otro lado, si $p=1$ se tiene

$$\int_0^b \frac{dx}{x} = \log(b) - \lim_{c\to 0^+}\log(c) = -\infty$$

Por lo tanto la función $f(x)=x^{-p}$ es integrable sobre $[0,b]$ si y sólo si $p<1$.

Observación. También se pueden aplicar estas definiciones cuando hay varios puntos conflictivos $a < c_1 < c_2 < \cdots < c_n < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \cdots + \int_{c_{n-2}}^{c_{n-1}} f(x)\,dx + \int_{c_{n-1}}^{c_n} f(x)\,dx$$

donde cada integral de la derecha se ha obtenido como un límite.

Las siguientes propiedades para las integrales impropias son inmediatas de la definición y las propiedades de las integrales de Riemann para funciones acotadas sobre intervalos acotados. La demostración de las mismas se dejan como ejercicio para el lector.

(i) **Linealidad.** Si f y g son integrables en $[a,b)$ y si sus respectivas integrales impropias son convergentes, entonces

$$\int_a^{b^-} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{b^-} f(x)\,dx + \beta \int_a^{b^-} g(x)\,dx$$

(ii) **Regla de Barrow.** Si f es una función continua en $[a,b)$ y si $F : [a,b) \to \mathbb{R}$ es una primitiva de f en $[a,c]$ para todo $a < c < b$ entonces si f tiene integral convergente sobre $[a,b)$ se satisface

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \lim_{c \to b^-} F(c) - F(a) = F(x)\Big|_a^{b^-}$$

(iii) **Cambio de Variable.** Si $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ es una función continua y si $\varphi : [\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ es una función con derivada continua; Donde $-\infty < \alpha < \beta \leq \infty$ y si además $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(t) \to b^-$ cuando $t \to \beta$ y si $\varphi([\alpha,\beta)) = [a,b]$, entonces:

$$\int_a^{b^-} f(x)\,dx = \int_\alpha^{\beta^-} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

Si una de las integrales es convergente (divergente), la otra también lo es.

(iv) **Integración por Partes.** Si f, g son dos funciones con derivadas continuas en $[a,b)$ y son convergentes dos de los tres términos siguientes, entonces:

$$\int_a^{b^-} f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^{b^-} - \int_a^{b^-} f'(x)g(x)\,dx$$

Observación. Todas las propiedades son válidas para integrales sobre intervalos de la forma $(a,b]$, cambiando a por a^+ y b^- por b.

Ejercicio. Demuestre que para todo número natural n se satisface

$$\int_0^1 \log^n(x)\,dx = (-1)^n n!$$

Ejercicio. Calcule el valor de las siguientes integrales

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}, \quad \int_1^e \frac{dx}{x\log(x)}$$

Ejercicio. Demuestre que para todo $a < b$ en los reales se satisface

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(b-x)(x-a)}} = \pi$$

8.3. Criterios de Convergencia

No siempre es posible determinar una expresión amigable en el cálculo de integrales. Más aun, la mayoría de las veces solo es posible aproximar el valor numérico. Por ello resulta de vital importancia saber al menos si estas convergen o no. A continuación expondremos algunos de los criterios más importantes para analizar la convergencia o divergencia de integrales, tanto de primera como de segunda especie.

8.3.1. Criterios de Convergencia para Primera Especie

Los criterios de convergencia están enunciados para integrales impropias sobre intervalos de la forma $[a, \infty)$, pero todos ellos valen de la misma forma para intervalos del tipo $(-\infty, a]$.

Criterio de comparación. *Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones continuas, positivas y tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \geq a$. Entonces se tiene que:*

(a) Si $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ *converge entonces* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *converge.*

(b) Si $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *diverge entonces* $\displaystyle\int_a^\infty g(x)\,dx$ *diverge.*

Ejercicio. Pruebe que las siguientes integrales convergen.

$$\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2}, \quad \int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^2}\,dx$$

Criterio de comparación al límite. *Sean $f(x)$, $g(x)$ funciones continuas, positivas. Entonces, para $x \geq a$ tenemos que:*

(a) Si $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = K$, *$K \neq 0$, entonces*

$$\int_a^\infty f(x)\,dx < \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \int_a^\infty g(x)\,dx < \infty$$

(b) Si $K = 0$, luego si

$$\int_a^\infty g(x)\,dx < \infty \quad \text{entonces} \quad \int_a^\infty f(x)\,dx < \infty$$

Ejercicio. Demuestre que para todo natural n la integral

$$\int_0^\infty x^n e^{-n}\,dx$$

converge.

Ejercicio. Determine los valores de p, q tales que la integral

$$\int_1^\infty \frac{x^p}{1+x^q}\,dx$$

converge.

8.3.2. Criterios de Convergencia para Segunda Especie

Los criterios de convergencia están enunciados para integrales impropias sobre intervalos de la forma $(a, b]$, pero todos ellos valen de la misma forma para intervalos del tipo $[a, b)$.

Criterio de comparación. *Si f y g son funciones positivas, integrables en $[x, b]$, para todo $x \in (a, b)$ tales que $g(x) \leq f(x)$ para todo $x \in (a, b)$. Entonces:*

(a) Si $\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx$ *converge entonces* $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ *converge.*

(b) Si $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ *diverge entonces* $\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx$ *diverge.*

Criterio de comparación al límite. *Si las funciones* f, g *son positivas e integrables en* $[x, b]$ *para todo* $x \in (a, b)$ *entonces*

(a) Si $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = K$, $K \neq 0$, *entonces*

$$\int_{a^+}^{b} f(x)\,dx < \infty \quad \text{si y sólo si} \quad \int_{a^+}^{b} g(x)\,dx < \infty$$

(b) Si $K = 0$, *luego si*

$$\int_{a^+}^{b} g(x)\,dx < \infty \quad \text{entonces} \quad \int_{a^+}^{b} f(x)\,dx < \infty$$

Ejercicio. Demuestre que la siguiente integral diverge

$$\int_1^2 \frac{dx}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$$

Ejercicio. Demuestre que la integral

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\sqrt{\sin(x)}}$$

converge.

Ejercicio. Demuestre que la integral siguiente diverge

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}\,dx$$

Ejercicio. Analice la convergencia de la integral

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x}\,dx$$

para distintos valores de $\alpha \in \mathbb{R}$.

Ejercicio. Demuestre que la siguiente integral converge

$$\int_0^{\pi} \log(\sin(x))\,dx$$

Ejercicio. Demuestre que la integral

$$\int_0^1 \log(\tfrac{1}{1-x})\,dx$$

converge.

Ejercicio. Determine si la siguiente integral converge

$$\int_0^{\infty} \frac{x+3}{(x+1)(x+2)}\,dx$$

Ejercicios Técnicas de Integración

1.-

Índice alfabético

acotado superiormente, 4

cota superior, 4

elemento máximo, 4

Referencias

[1] Seymour Lipschutz and Marc Lipson. Linear Algebra. Fourth Edition, Schaum's Outline Serie, Mc Graw Hill.

[2] Serge Lang. Linear Algebra. Third Edition. Springer.