PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primee semestre 2022

Ayudantía 11 - MAT1610

1. Calcule las siguientes integrales:

   a) $\int_2^6 (6-2x)\,dx$

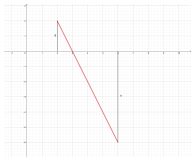
   b) $\int_{-5}^4 |2x-2|dx$

   c) $\int_{-3}^5 [x]dx$

   d) $\int_{-3}^3 |x^2+2x-3|dx$

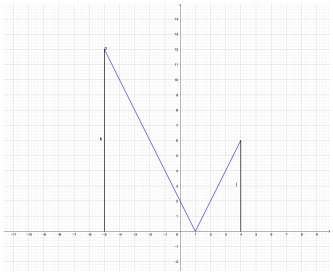
   Solución:

   a) Usando la interpretación de área tenemos que



$$\int_2^6 (6-2x)\,dx = 1-9 = -8$$

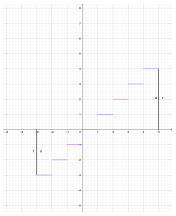
   b) Usando la interpretación de área tenemos que



$$\int_{-5}^4 |2x-2|dx = 36+9 = 45$$

   c) Usando la interpretación de área tenemos que

$$\int_{-3}^5 [x]dx = 10-6 = 4$$



d) Observe que $x^2+2x-3<0$ si $-3<x<1$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\int_{-3}^{3}|x^2+2x-3|dx &= \int_{-3}^{1}-x^2-2x+3\,dx+\int_{1}^{3}x^2+2x-3\,dx\\ &= \left(-\frac{x^3}{3}-x^2+3x\right)\Big|_{-3}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Big|_{1}^{3}\\ &= \frac{64}{3}\end{aligned}$$

2. Calcule el valor de $\int_{-1}^{5}f(x)dx$ si se sabe que

$$\int_{-2}^{2}f(x)dx=3,\int_{2}^{5}2f(x)dx=6 \text{ y que } \int_{-1}^{-2}f(x)dx=5$$

Solución

Observe que por propiedades de la integral del enunciado tenemos que $\int_{2}^{5}f(x)dx=3$, por lo tanto

$$\int_{-2}^{5}f(x)dx=6$$

además $\int_{-2}^{-1}f(x)dx=-5$ por lo tanto $\int_{-1}^{5}f(x)dx=11$

3. Demuestre que $\frac{\sqrt{2}\pi}{24}\leq\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}cos(x)dx<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x}dx\leq\frac{1}{2}$.

Solución

Notar que en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ el valor mínimo absoluto de la función $x\mapsto\cos(x)$ es $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$

$$\frac{\sqrt{2}\pi}{24}=\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\pi}{12}\leq\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(x)dx$$

Por otro lado, para $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, como $x<1$ entonces $1<\frac{1}{x}$ y como $\cos(x)<1$, por transitividad se tiene que, para $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$, $\cos(x)<\frac{1}{x}$ y en consecuencia,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\cos(x)dx<\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{x}dx$$

Por último, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$ el valor máximo absoluto de la función $x \mapsto \frac{1}{x}$ es $\frac{6}{\pi}$ y la longitud del intervalo de integración es $\frac{\pi}{12}$ entonces,

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{x} dx \leq \frac{6}{\pi}\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}$$

4. Determine la constante a y la función $f(x)$ tales que

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-a) + \arctan(x-a) + a - 2$$

Solución:
Sea $G(x) = \displaystyle\int_a^{2x-a} f(t)dt$ entonces, $G(a) = \displaystyle\int_a^a f(t)dt = 0$, es decir,
$\operatorname{sen}(0) + \arctan(0) + a - 2 = 0$ y en consecuencia $a = 2$ y

$$G(x) = \int_a^{2x-a} f(t)dt = \int_2^{2x-2} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

es decir,

$$\int_a^{2x-a} f(t)dt = \operatorname{sen}(x-2) + \arctan(x-2)$$

Entonces, derivando en ambos lados de la igualdad,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_2^{2x-2} f(t)dt = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \quad &\Rightarrow \quad f(2x-2)\frac{d}{dx}(2x-2) = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f(2x-2)\cdot 2 = \cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2} \\
&\Rightarrow \quad f\left(2x-2\right) = \frac{\cos(x-2) + \frac{1}{1+(x-2)^2}}{2} \\
&\Rightarrow \quad f(x) = \frac{\cos(\frac{x+2}{2}-2) + \frac{1}{1+(\frac{x+2}{2}-2)^2}}{2}
\end{aligned}$$