PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2022

# Ayudantía 8- MAT1610

1. Demostrar que si $x > 0$, entonces, $\frac{x}{1+x} < ln(x+1) < x$.
**Solución:**
**Una forma**
Sea $x > 0$, considere la función $f(x) = \ln(x)$, $a = 1$, $b = x + 1$. Notar que $f$ es continua y derivable en $(0, +\infty)$ y, en particular, es continua en $[a, b] = [1, 1 + x]$ y derivable en $(a, b) = (1, 1 + x)$. Por lo tanto, por el TVM, existe un valor $c$, $c \in (a, b) = (1, 1 + x)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(1+x)-f(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-0}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$,
es decir, existe un valor $c$, $c \in (1, 1 + x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

y, $f'(c) = \frac{1}{c}$, entonces

$$\frac{1}{c} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

para algún valor $c$, $c \in (1, 1 + x)$.

Por lo tanto, $1 < c < 1 + x$ y, en consecuencia, se tiene que,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c} < \frac{1}{1}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+x} < f'(c) < 1$$

o,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

o, como $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

**Otra Forma:** Análoga a la anterior
Sea $x > 0$, considere la función $f(x) = \ln(x + 1)$, $a = 0$, $b = x$. Notar que $f$ es continua y derivable en $(-1, +\infty)$ y, en particular, es continua en $[a, b] = [0, x]$ y derivable en $(a, b) = (0, x)$. Por lo tanto, por el TVM, existe un valor $c$, $c \in (a, b) = (0, x)$ tal que $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = \frac{f(x)-f(0)}{x} = \frac{\ln(1+x)-ln(1)}{x} = \frac{\ln(1+x)-0}{x} = \frac{\ln(1+x)}{x}$,
es decir, existe un valor $c$, $c \in (0, x)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

y, $f'(c) = \frac{1}{c+1}$, entonces

$$\frac{1}{c+1} = \frac{\ln(1+x)}{x}$$

para algún valor $c$, $c \in (0, x)$.

Por lo tanto, $0 < c < x$ ó $1 < c+1 < x+1$ y, en consecuencia, se tiene que,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{1}{c+1} < \frac{1}{1}$$

es decir,

$$\frac{1}{1+x} < f'(c) < 1$$

o,

$$\frac{1}{1+x} < \frac{\ln(1+x)}{x} < 1$$

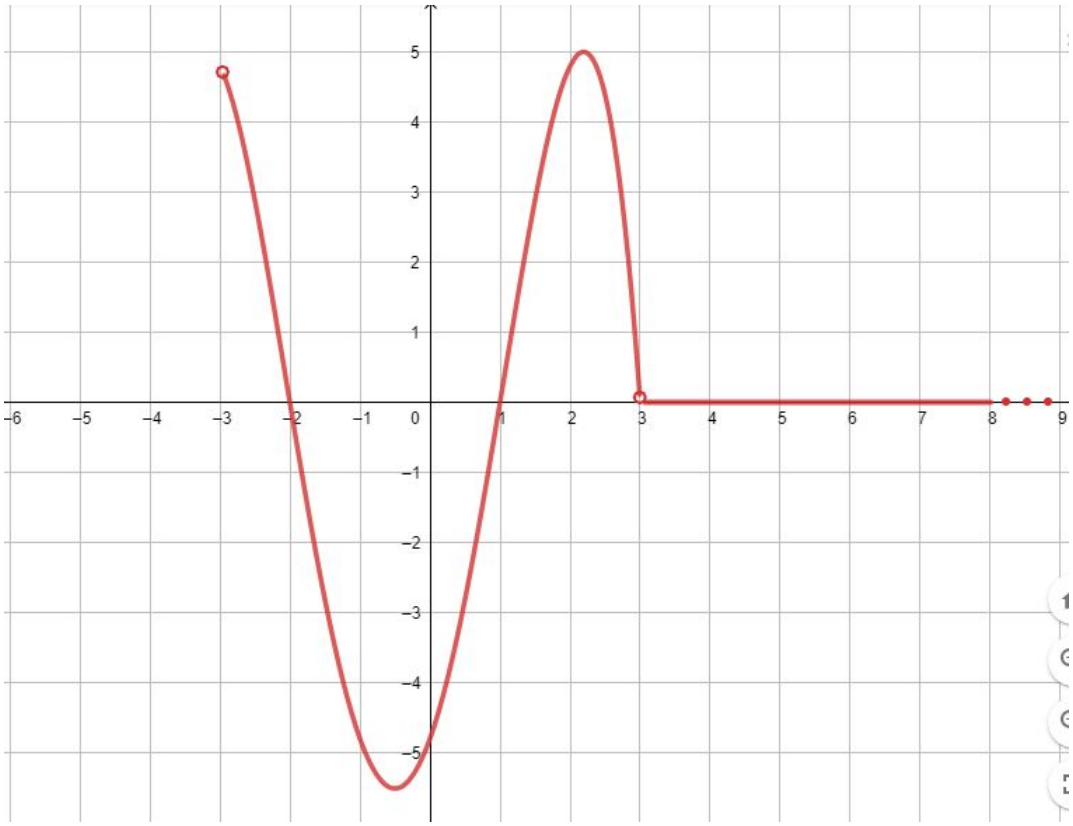
o, como $x > 0$

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$$

2. Demuestre que la ecuación $\arctan(x-1)+x^3-3=0$ tiene una única raíz.
**Solución**
Considere $f(x)=\arctan(x-1)+x^3-3$ y note que $f$ es continua en $\mathbb{R}$,
$f(0)=\arctan(-1)-3=-\frac{\pi}{4}-3<0$ y $f(2)=\arctan(1)+8-3=\frac{\pi}{4}+5>0$,
entonces, por el teorema del valor intermedio, existe un valor tal que $f(c)=0$, lo cual garantiza la existencia de la raíz.

Para la unicidad, suponga que existen dos raíces, $r_1$ y $r_2$, entonces, $f(r_1)=f(r_2)=0$ y como $f$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por el teorema de Rolle, existe un valor $c$, $c\in(r_1,r_2)$ tal que $f'(c)=0$ pero, $f'(x)=\frac{1}{1+(x-1)^2}+3x^2>0$, entonces $f'(c)=0$ implica una contradicción que proviene de suponer que existen dos raíces de la ecuación, por lo que se concluye que la raíz es única.
Nota: También se puede usar $f(1)=-2<0$

3. En la figura se muestra la gráfica de la función derivada ($g'$) de una función $g$ :




(a) Determine los intervalos donde $g$ es creciente y los intervalos donde $g$ es decreciente.

(b) Determine los valores críticos donde existe $g'$ y clasifíquelos.

(c) Determine los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia arriba y los intervalos donde $g(x)$ es cóncava hacia abajo.

(d) Basado en la gráfica, explique por qué en el intervalo $(-2, 0)$ existe un valor donde la segunda derivada de $g$ es igual a $-\frac{5}{2}$

**Solución**

(a) $g'(x) > 0$ en $(-3, -2)$ y en $(1, 3)$, entonces $g$ es creciente en $(-3, -2)$ y $g$ es creciente en $(1, 3)$.
Nota: Resaltar que no se pueden usar unión de los dos intervalos y explicar la razón.
$g'(x) < 0$ en $(-2, 1)$ entonces, $g$ es decreciente $(-2, 1)$.

(b) Valores críticos donde existe $g'$: $x = -2$ y $x = 1$, para clasificarlos se puede usar la primera o la segunda derivada:
Usando $g'$
$g'$ cambia de positiva($g$ creciente) a negativa ($g$ decreciente) en $x = -2$, entonces en $x = -2$ se alcanza un máximo local.
$g'$ cambia de negativa($g$ decreciente) a positiva ($g$ creciente) en $x = 1$, entonces en $x = 1$ se alcanza un mínimo local.

Usando $g''$
La recta tangente a $g'$ en $(-2, g'(-2))$ tiene pendiente negativa, es decir, $g''(-2) < 0$ por lo que, en $x = -2$, $g$ alcanza un máximo local.
La recta tangente a $g'$ en $(1, g'(1))$ tiene pendiente positiva, es decir, $g''(1) > 0$ por lo que, en $x = 1$, $g$ alcanza un mínimo local.

(c) $g''(x) < 0$ en $(-3, m)$, $-1 < m < 0$ y en $(2, 3)$ entonces, $g$ es cóncava hacia abajo en $(-3, m)$ y en $(2, 3)$
$g''(x) > 0$ en $(m, 2)$, $-1 < m < 0$ entonces, $g$ es cóncava hacia arriba en $(m, 2)$, $-1 < m < 0$.

(d) Notar que $g'$ en continua en $[-2, 0]$ y derivable en $(-2, 0)$ (es continua y no hay puntas), entonces por el TVM, existe un valor $c$, en $(-2, 0)$ tal que

$$g''(c) = \frac{g'(0) - g'(-2)}{0 - (-2)} = \frac{-5 - 0}{2} = -\frac{5}{2}$$

Resaltar que el TVM se está aplicando al la función $g'$.

Observación: La función $g$ es constante en el intervalo $(5, \infty)$.
El valor de $m$ puede tomarse como $-\frac{1}{2}$, solo que en la escala del gráfico no se especifica.

4. (a) Determine los valores de $b$ y $c$ para que la función $f(x) = \sqrt{c + bx - x^2}$ tenga su máximo global en el punto $(1, 2)$.

   (b) Para los valores de $b$ y $c$ hallados, determine, si existen, los intervalos donde $f$ es creciente y los intervalos donde $f$ es decreciente.

**Solución:**

(a) Notar que debe ocurrir que $f(1) = 2$, es decir, $\sqrt{c + b - 1} = 2$
Dado que la función polinlomial el coeficiente de $x^2$ es -1 (abre hacia abajo o es cóncava hacia abajo), entonces el dominio de la función $f$ es $[r_1, r_2]$ con $r_1, r_2 = \frac{-b \pm \sqrt{b^2+4c}}{-2}$, note que debe ocurrir que $b^2 + 4c > 0$ para que existan las dos raíces.
En este caso, $f'(x) = \frac{b-2x}{2\sqrt{c+bx-x^2}}$
Entonces, los valores críticos son: $x = \frac{b}{2}$, $x = r_1$, $x = r_2$, para que el máximo global se alcance en $x = 1$ debe ocurrir que $\frac{b}{2} = 1$, es decir, $b = 2$. Al reemplazar el valor de $b$ en $\sqrt{c + b - 1} = 2$ se obtiene que $c = 3$.
Notar que $f''(x) = -\frac{b^2+4c}{4\sqrt{(c+bx-x^2)^3}} < 0$ para todo $x \in (r_1, r_2)$, es decir, que efectivamente, en $x = 1$ se alcanza máximo global (también se puede argumentar usando la primera derivada).

(b) Note que para $b = 2$ y $c = 3$ se obtiene que $r_1 = -1$ y $r_2 = 3$, entonces
$f'(x) > 0$ si $x \in (-1, 1)$, entonces $f$ es creciente en dicho intervalo.
$f'(x) < 0$ si $x \in (1, 3)$, entonces $f$ es decreciente en dicho intervalo.