Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer semestre de 2017

MAT1610 ⋆ Cálculo I

Interrogación N° 3

1. *a*) Demuestre que la función

$$\int_{1-x}^{1+x} \ln(t^2)\,dt,\ x \in [0, \frac{1}{2}]$$

es decreciente.

Solución

$$\begin{aligned}\int_{1-x}^{1+x} \ln(t^2)\,dt &= \int_{1-x}^{1} \ln(t^2)\,dt + \int_{1}^{1+x} \ln(t^2)\,dt \\ &= -\int_{1}^{1-x} \ln(t^2)\,dt + \int_{1}^{1+x} \ln(t^2)\,dt.\end{aligned}$$

Derivando obtenemos:

$$f'(x) = \ln\left((1-x)^2\right) + \ln\left((1+x)^2\right) = 2\ln(1-x^2).$$

Pero como $0 \le x \le \frac{1}{2}$ entonces $\frac{3}{4} \le 1 - x^2 \le 1$ Por lo tento

$$f'(x) = 2\ln(1-x^2) \le 0$$

Esto significa que $f(x)$ es decreciente en $[0, \frac{1}{2}]$.

b) Demuestre que si $f(t)$ es una función par, entonces $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ es una función impar.

Solución

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt = \int_0^{-x} f(-t)\,dt$$

por ser $f(x)$ función par.
Haciendo cambio de variable:

$$-t = u \to dt = -du$$

Entonces:

$$F(-x) = \int_0^{x} -f(-u)du = -\int_0^{x} f(u)\,du == -F(x)$$

Con lo que queda demostrado que $F(x)$ es función impar.

2. Sea f función continua tal que

$$\int_0^x f(t)\,dt \;=\; xe^{2x} \;-\; \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

para todo x, encuentre la función $f(x)$.

Solución

$$\int_0^x f(t)\,dt \;=\; xe^{2x} \;-\; \int_0^x e^{-t} f(t)\,dt$$

Derivando tenemos que:

$$f(x) \;=\; e^{2x} + 2xe^{2x} \;- e^{-x} f(x)$$

Por lo tanto:

$$f(x)(1 + e^{-x}) \;=\; e^{2x}(1 + 2x)$$

Por lo tanto:

$$f(x) \;=\; \frac{e^{2x}(1 + 2x)}{1 + e^{-x}}.$$

3. Calcule:

a)

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx$$

Solución

Sea

$$e^x = u \to e^x dx = du \to dx = \frac{du}{u}$$

Además:
Si $x = 0$ entonces $u = 1$
y si $x = 1$ entonces $u = e$.
Por lo tanto:

$$\int_1^e \frac{u}{1+u^2}\frac{du}{u} = \arctan(u)\Big|_1^e = \arctan(e) - \frac{\pi}{4}.$$

b)

$$\int \tan(x)\ln(cos(x))\,dx$$

Solución

Sea

$$\ln(\cos(x)) = u \to -\tan(x)\,dx = du$$

Pos lo tanto si llamamos I a la integral a resolver, entonces:

$$I = -\int u\,du = -\frac{u^2}{2} + C = -\frac{1}{2}\left(\ln(cos(x))\right)^2 + C$$

4. *a*) Calcular el área encerrada entre las curvas $y = x$, $y = \tan(x)$ y la recta $x = \frac{\pi}{4}$.

Solución

Entre $x = 0$ y $x = \pi/4$ las curvas $y = x$ e $y = \tan(x)$ se cortan sólo en $x = 0$ (de no ser así, la función $f(x) = x - \tan x$ tendría dos raíces entre 0 y $\pi/4$, por lo que —TVM— existiría $\alpha \in (0, \pi/4)$ tal que $f'(\alpha) = 1 - \sec^2\alpha = 0$, lo que es imposible ya que entonces $\cos\alpha = \pm 1$).
Así, el área pedida es simplemente

$$A = \int_0^{\pi/4} |\tan x - x|\ dx.$$

Como $\tan x > x$ en $(0, \pi/4]$, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\pi/4} (\tan x - x)\ dx = \left(-\ln(\cos x) - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{\pi/4} \\ &= -\ln(\cos(\pi/4)) - \frac{(\pi/4)^2}{2} - \left(-\ln(\cos 0)) - \frac{0^2}{2}\right) \\ &= -\ln(\sqrt{2}/2) - \frac{\pi^2}{32} + \ln 1 + 0 = \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi^2}{32} = \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi^2}{32}. \end{aligned}$$

b) Determine el volumen de un sólido generado al rotar la región $y = x^3$, $y = 6$ y $x = 0$ en torno al eje Y.

Solución

Dado que el sólido gira en torno al eje Y , tiene sentido rebanarlo en forma perpendicular al eje Y e integrar respecto a y.
Si se corta a la altura y se obtiene un disco circular de radio $x = \sqrt[3]{y}$. Por lo tanto, el área de la sección transversal de y es:

$$A(y) = \pi x^2 = \pi \left(\sqrt[3]{y}\right)^2 = \pi y^{2/3}.$$

Dado que el sólido está entre $y = 0$ y $y = 6$ entonces su volumen es:

$$V = \int_0^6 \pi y^{2/3}\, dy = \pi \left(\frac{3}{5} y^{5/3} \Big|_0^6 \right) = \frac{3\pi}{5} \left(6^{5/3}\right).$$