Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática
TAV 2013

MAT 1610-Cálculo I
Pauta Interrogación 1

1. a) Considere la sucesión definida por

$$a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \cdots + \frac{1}{3^n+n}$$

calcule los tres primeros términos y demuestre que la sucesión es convergente.

Solución:

Reemplazando en la igualdad tenemos que $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{9+2} = \frac{15}{44}$ y $a_3 = \frac{15}{44} + \frac{1}{30} = \frac{247}{660}$.

Observe que $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{3^{n+1}+(n+1)} > 0$ por lo tanto $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente.

Además

$$a_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+2} + \cdots + \frac{1}{3^n+n} < \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{3^n} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3} - 1}$$

luego

$$a_n \leq \frac{1}{2}$$

por lo tanto la sucesión es acotada.

Entonces como $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona y acotada es convergente.

b) Calcule $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{n^2+n+1}$ y demuestre, usando la definición, que el valor obtenido efectivamente es el límite.

Solución:

Por álgebra de límites tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2-1}{n^2+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(3-\frac{1}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2})} = 3$$

Ahora usando la definición tenemos que dado $\epsilon > 0$ basta tomar $n_0 > \text{máx}\{4, \frac{\epsilon}{4}\}$ ya que si $n \geq n_0$ tendremos que:

$$\left|\frac{3n^2-1}{n^2+n+1} - 3\right| = \frac{3n+4}{n^2+n+1} < \frac{3n+4}{n^2} < \frac{4n}{n^2} < \epsilon$$

2. Determine si los siguientes límites existen. En caso afirmativo calcule el límite, en caso contrario justifique la no existencia.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} x(x-\sqrt{x^2-1})$

Solución:
Usando álgebra de límites tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x(x-\sqrt{x^2-1}) &= \lim_{x\to+\infty} x(x-\sqrt{x^2-1}).\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x+\sqrt{x^2-1}}\\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\right)}\\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

b) $\lim\limits_{x\to0^+} \tan\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Solución:
Considere las sucesiones $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}}$ y $b_n = \dfrac{2}{(8k+1)\pi}$ y observe que:

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, pero $\tan\left(\dfrac{1}{a_n^2}\right) = 0$ y $\tan\left(\dfrac{1}{b_n^2}\right) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por lo tanto $\lim\limits_{x\to0^+} \tan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ no existe.

c) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\dfrac{x}{\cot(x)} - \dfrac{\pi}{2\cos(x)}\right)$

Solución:

Observe que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x}{\cot(x)} - \frac{\pi}{2\cos(x)}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)(x-\frac{\pi}{2})}{\cos(x)}$$

si realizamos el cambio de variable $u = x - \dfrac{\pi}{2}$ el límite pedido corresponde a:

$$\begin{aligned}\lim_{u\to0} \frac{\operatorname{sen}(u+\frac{\pi}{2})u}{\cos(u+\frac{\pi}{2})} &= \lim_{u\to0} \frac{\cos(u)u}{-\operatorname{sen}(u)}\\ &= -1\end{aligned}$$

3. a) Considere la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 1 \\ mx + n & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Determine condiciones sobre m y n de manera que f sea continua en $x = 1$.

Solución:

Sabemos que f es continua en $x = 1$ si y sólo si

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = f(1)$$

Observe que

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} mx + n = m + n$ y que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + 1 = 2$ por lo tanto f es continua en $x = 1$ si y sólo si $m + n = 2$.

b) ¿Es cierto que si f y g son dos funciones que **no** son continuas en $x = c$ entonces $f + g$ **no** es continua en $x = c$?

No es cierto, por ejemplo considere las funciones:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

y

$$g(x) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

ambas discontinuas en $x = 1$, sin embargo $(f + g)(x) = -2$ para todo $x \in \mathbb{R}$, luego $f + g$ es continua en $x = 1$.