PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo Semestre 2014

MAT - 1610 * EXAMEN

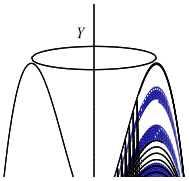
Tiempo: 140 minutos

Parte (I)

1. **10 PUNTOS**

   Determine el volumen del sólido que se obtiene al girar la región limitada por la curva, $y = 2x^2 - x^3$ y el eje X, en torno al eje Y.

   Solución



   Según el método del cascarón, el volumen es:

$$V = \int_0^2 (2\pi\, x)(2x^2 - x^3)\, dx$$

   (**5 pts**)

$$= 2\pi\Big(\frac{1}{2\,x^4} - \frac{x^5}{5}\Big)\Big|_0^2 == \frac{16\pi}{5}.$$

   (**5 pts**)

2. **10 PUNTOS**

Calcule:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)}$

Solución

Sea $0 = \tan(x/2)$ entonces, $x = 2\arctan(u)$, si $x = 0 \Rightarrow u = 0$, y si $x = \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow u = 1$
Además:

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2u}{1+u^2},\ \cos(x) = \frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx = \frac{2\,du}{1+u^2}$$

(**2 pts**)

Haiendo las substituciones, nos queda:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \operatorname{sen}(x) + \cos(x)} = 2\int_0^1 \frac{du}{2+2u}$$

$$= \ln(u+1)\Big|_0^1 = \ln(2).$$

(**3 pts**)

b) $\displaystyle\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx.$

Solución

Utilizando fracciones parciales, tenemos que:

$$\frac{2x^2 - x + 4}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

De donde

$A = 1, B = 1, C = 1.$

(**1 pts**)

Por lo tanto:

$$\int \frac{2x^2 - x + 4}{x^3 + 4x}\,dx = \int \frac{dx}{x} + \frac{x-1}{x^2+4}\,dx$$

$$= \ln|x| + \int \frac{2x}{x^2+4}\,dx - \int \frac{dx}{x^2+4}$$

(**1 pts**)

$$= \ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \int \frac{x}{x^2+4}$$

(**1 pts**)

Para la última integral, utilizamos la substitución:

$x = 2\tan(u) \Rightarrow dx = 2\sec^2(u)\,du$, y $u = \arctan(x/2)$.

Por lo tanto:

$$\int \frac{x}{x^2+4} = \frac{1}{2}\int du = \frac{1}{2} + C.$$

(**1.5 pts**)

Por lo tanto, la integral original vale:

$$\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{1}{2}\arctan(x/2) + C.$$

(**0.5 pts**)

PARTE (II)

1. **8 PUNTOS**

Enuncie los teoremas del Valor Medio Diferencial y del Valor Medio Integral.

Solución

i) **Teorema del valor Medio Diferencial**

Si f es función continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces existe un punto $\alpha \in (a,b)$ tal que:

$$f'(\alpha) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

(**4 pts**)

ii) **Teorema del valor Medio Integral**

Si f es continua en el intervalo de extremos a, b entonces existe α entre a y b tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\alpha)(b-a)$$

(**4 pts**)

OBSERVACIÓN: Por **cada** error en las hipótesis y la conclusión, se quita 1 punto.

2. **8 PUNTOS**

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ y sea f función definida por:

$$f(x) = \int_a^b t^x \, dt$$

Determine si f es continua en $x = -1$.

Solución

Si $x \neq -1$ tenemos que:

$$f(-1) = \int_a^b t^{-1} \, dt = \ln|t| \Big|_a^b = \ln(b/a).$$

(**4 pts**)

Para que f sea continua en $x = -1$ requerimos que:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \ln(b/a).$$

Dado que $\lim_{x \to -1} \dfrac{b\,b^x - a\,a^x}{x+1}$, es de la forma $\dfrac{0}{0}$, podemos usar L´Hospital y tenemos que el lí mite buscado sería igual al límite:

$$= \lim_{x \to -1} \frac{b\,b^x \ln(b) - a\,a^x \ln(a)}{1} = \ln(b) - \ln(a) = \ln(b/a).$$

Por lo tanto la función es continua en $x = -1$

(**4 pts**)

3. **8 PUNTOS**

Sea

$$f(x) = \int_0^x t^3 \, e^{t^2} \, dt$$

Estudie la concavidad de la función f.
Solución

Para estudiar la concavidad, debemos determinar el signo de la segunda derivada, para ello:

$$f'(x) = x^3 \, e^{x^2}.$$

(**4 pts**)

$$f''(x) = 3x^2 \, e^{x^2} + x^3 \, e^{x^2} (2x) = x^2 e^{x^2} (3 + 2x^2)$$

Como se puede observar, la segunda derivada es un producto de funciones positivas, por lo tanto, f es función cóncava hacia arriba en todo su dominio.

(**4 pts**)

4. **8 PUNTOS**

Si f es una función que admite derivada continua hasta el orden 2 y tal que $f(1) = 1$, $f'(1) = -1$ y $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = 4$. Calcule:

$$\int_0^1 x^2\, f''(x)\,dx.$$

Solución

Usando integración por partes, hacemos:

$$\begin{array}{rr} u = x^2 & dv = f''(x)\,dx \\ du = 2x\,dx & v = f'(x) \end{array}$$

Luego:

$$\int_0^1 x^2\, f''(x)\,dx = x^2\, f'(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\, f'(x)\,dx = f'(1) - 2\int_0^1 x\, f'(x)\,dx$$

$$= -1 - 2\underbrace{\int_0^1 x\, f'(x)\,dx}_{I_1}$$

(**3.5 pts**)

Para I_1, usamos nuevamente integración por partes, haciendo:

$$\begin{array}{rr} u = x & dv = f'(x)\,dx \\ du = dx & v = f(x) \end{array}$$

de donde:

$$I_1 = x\, f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx = f(1) - 4 = 1 - 4 = -3$$

(**3.5 pts**)

Luego:

$$\int_0^1 x^2\, f''(x)\,dx = -1 - 2\,(-3) = 5$$

(**1 pts**)

5. **8 PUNTOS**

Calcule:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\dfrac{x}{1-e^{x^2}}\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt\Big)$

Solución

Notemos que:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}\,dt\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt}{1-e^{x^2}}$$

como el límite es de la forma $\dfrac{0}{0}$, aplicanmos la regla de L'Hôpital y se obtiene:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}\,dt\Big)=\lim_{x\to 0}\frac{x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt}{1-e^{x^2}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt+x\,e^{x^2}}{-2x\,e^{x^2}}$$

(**2 pts**)

el límite nuevamente es de la forma $\dfrac{0}{0}$, luego volviendo a aplicar la regla de L'Hôpital, se tiene:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt+x\,e^{x^2}}{-2x\,e^{x^2}}\overset{L'H}{=}\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^2}+e^{x^2}+2x^2\,e^{x^2}}{-2\,e^{x^2}-4x^2\,e^{x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{2+2x^2}{-2(1+2x^2)}=-1$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\Big(\frac{x}{1-e^{x^2}}\int_0^x e^{t^2}\,dt\Big)=-1$$

(**2 pts**)

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\Big(\dfrac{2^{1/n}+2^{2/n}+\cdots+2^{n/n}}{n}\Big)$.

Solución

Se tiene:

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{2^{1/n}+2^{2/n}+\cdots+2^{n/n}}{n}\Big)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2^{k/n}$$

(**0.5 pts**)

que corresponde la suma de Riemann de $f(x)=2^x$, en el intervalo $[0,1]$ considerando la partición

$$P_n=\Big\{\frac{1}{n}\,,\,2\cdot\frac{1}{n}\,,\,3\cdot\frac{1}{n}\,,\,\ldots\,,\,(n-1)\,\frac{1}{n}\,,\,1\Big\}$$

y evaluando 2^x en el extremo derecho $\dfrac{k}{n}$ del k-esimo subintervalo.

(**1.5 pts**)

Como 2^x es continua en $[0,1]$, por teorema visto en clases tenemos que

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 2^{\,k/n} = \int_0^1 2^{\,x}\, dx = \frac{2^{\,x}}{\ln(2)}\Big|_0^1 = \frac{1}{\ln(2)}$$

(**2 pts**)