PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2018

Pauta Examen- MAT1610

1. a) Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t+t^2}{1+\text{sen}(t)}\, dt$

Solución:
Observemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} \int_0^x \frac{t+t^2}{1+\text{sen}(t)}\, dt = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t+t^2}{1+\text{sen}(t)}}{x^2}$$

que corresponde una forma indeterminada "0/0". Aplicando la regla del Hopital tenemos que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x \frac{t+t^2}{1+\text{sen}(t)}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x+x^2}{2x(1+\text{sen}(x))} = \frac{1+2x}{2+2\text{sen}(x)+2x\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por decidir usar H'opitalo sandwich, justificadamente
- 1 punto por usar correctamente TFC o determinar los l mites de las cotas
- 1 punto por resultado

b) Sea $f(x) = x^2 + 10\,\text{sen}(x)$, demuestre que existe un número c tal que $f(c) = 100$

Solución:
Si definimos la función $h(x) = x^2 + 10\,\text{sen}(x) - 100$, tenemos que h es continua en $[0, 11]$ y además tenemos que $h(0) = -100$ y $h(11) = 121 - 100 + 10\text{sen}(11) \leq 11$, por lo tanto, del TVI tenemos que existe $c \in (0, 11)$ tal que $h(c) = 0$ es decir, existe c con $f(c) = 100$.
Distribución de puntajes:

- 1 punto por decir que la función que trabajan es continua
- 1 punto por escoger intervalo adecuado
- 1 punto por concluir

2. a) Sea $f(x) = \ln(x^2 + 4^x)$. Determine $f'(x)$.

Solución:

Derivando obtenemos que

$$f'(x) = \frac{2x + \ln(4)4^x}{x^2 + 4^x}$$

Distribución de puntajes:

- 3 puntos por derivar correctamente (NO hay puntaje parcial)

b) Sea $f(x) = g(xe^x)$, donde $g'(x) = \sqrt{1 + x^2}$. Determine $f'(2x)$.

Solución:

Por la regla de la cadena tenemos que $f'(x) = g'(xe^x)(e^x + xe^x)$, desde el enunciado tenemos que

$$f'(x) = \sqrt{1 + (xe^x)^2}(e^x + xe^x)$$

por lo tanto

$$f'(2x) = \sqrt{1 + (2xe^{2x})^2}(e^{2x} + 2xe^{2x})$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por regla de la cadena
- 1 punto por determinar $f'(x)$ con la información dada
- 1 punto por determinar $f'(2x)$

3. a) Una partícula se desplaza a lo largo de la hipérbola de ecuación $xy = 8$. Cuando alcanza el punto $(4, 2)$, la coordenada y se incrementa con una rapidez de 3 cm/seg. ¿Cuán rápido está cambiando la coordenada x del punto en movimiento en ese instante?

Solución:
Derivando la curva tenemos que

$$\frac{dx}{dt}y + \frac{dy}{dt}x = 0$$

Reemplazando los datos obtenemos

$$2\frac{dx}{dt} + 4 \cdot 3 = 0$$

obteniendo que $\frac{dx}{dt} = -6$ Por lo tanto la cordenada x decrece a razón 6cm/seg. **Distribución de puntajes:**

- 1 punto por derivar correctamente la ecuación de la curva
- 1 punto por reemplazar correctamente
- 1 punto por resultado con signo o bien decir DECRECE y omitir el signo.

b) Se da el radio de un disco circular como de 24 cm, con un error máximo en la medición de 0,02 cm.Utilice diferenciales para estimar el error máximo en el área calculada del disco.

Solución:
El área del disco en función del radio está dada por $A(r) = \pi r^2$, por lo tanto el diferencial es

$$dA = 2\pi r dr$$

En $r = 24$, tenemos que $dA = 48\pi dr$, por lo tanto el error máximo en el cálculo de área será $48 \cdot \pi \cdot 0{,}02 \simeq 3{,}01 cm^2$ **Distribución de puntajes:**

- 1 punto por determinar diferencial del área
- 2 punto por conclusión

4. Sea $\mathcal{R}$ la región plana acotada por la parábola $y = 5x - x^2$ y la recta $y = x$.

   a) Determine el área de $\mathcal{R}$.

   Solución:

   La parábola y la recta intersectan en $x = 1$ y $x = 4$, por lo tanto la integral que determina el área es:

$$\int_0^4 5x - x^2 - x dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)_0^4 = \frac{32}{3}$$

   Distribución de puntajes:

   - 1 punto por determinar la integral con los límites correctos.
   - 1 punto por determinar primitiva
   - 1 punto por resultado

   b) Exprese, en términos de integrales, el volumem del sólido obtenido al rotar la región $\mathcal{R}$, en torno a la recta $x = -1$.

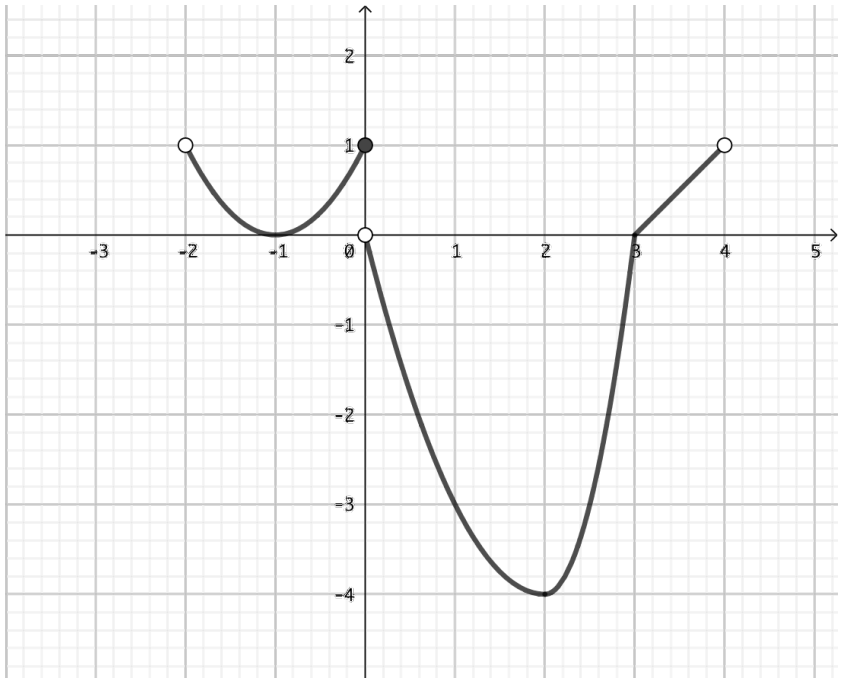
   Solución:
   Haciendo cascarones cilíndricos tenemos que el volumen es

$$\int_0^4 2\pi(x+1)(4x - x^2)dx$$

   Distribución de puntajes:

   - 3 puntos por expresar correctamente por alguna integral (NO hay puntaje parcial)

5. Sea $f : [-2, 4] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[-2, 4]$ y derivable en $(-2, 4)$ y cuyo gráfico de f' se muestra a continuación:



a) Determine los intervalos de monotonía de f.
Solución:

La función f es creciente en $(-2, 0)$ y $(3, 4)$, decreciente en $(0, 3)$ **Distribución de puntajes:**

- 1.5 puntos por intervalos de crecimiento.
- 1.5 puntos por intervalos de decrecimiento.

b) Determine los intervalos de concavidad de f.
Solución:
La función f es cóncava hacia arriba en $(-1, 0)$ y $(2, 4)$, cóncava hacia abajo en $(-2, -1)$ y $(0, 2)$ **Distribución de puntajes:**

- 1.5 puntos por intervalos de cóncavidad hacia arriba.
- 1.5 puntos por intervalos cóncavidad hacia abajo.

6. Determine:

a) $\int x \arctan(x)\, dx$

Solución:

Si $u = \arctan(x)$ y $dv = xdx$ tenemos que $du = \dfrac{1}{1+x^2}dx$ y $v = \dfrac{x^2}{2}$, haciendo integración por partes tendremos que:

$$\int x \arctan(x)\, dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}\arctan(x) - \frac{x}{2} + \frac{\arctan(x)}{2} + C$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por hacer proceso de integración por parte hasta llegar a una integral equivalente
- 1 punto por el resultado. Descontar 0.5 si olvida la constante.

b) $\int \dfrac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}}$

Solución:

Haciendo la sustitución $x = 3\text{sen}(\theta)$ obtenemos $dx = 3\cos(\theta)d\theta$, de esta forma queda

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{9}\int \csc^2(\theta)d\theta = -\frac{1}{9}\cot(\theta) + C$$

volviendo a la variable original tenemos que

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9-x^2}} = -\frac{1}{9}\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + C$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por hacer sustitución hasta llegar a la nueva integral
- 1 punto por el resultado en la variable original. Descontar 0.5 si olvida la constante.

c) $\displaystyle\int_1^3 \frac{x^2+2x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx$

Solución:

Haciendo fracciones parciales tenemos que

$$\frac{x^2+2x+2}{x(x^2+2x+1)} = \frac{2}{x} - \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\int_1^3 \frac{x^2+2x+2}{x(x^2+2x+1)}\,dx &= \int_1^3 \frac{2}{x}\,dx - \int_1^3 \frac{1}{(x+1)}\,dx - \int_1^3 \frac{1}{(x+1)^2}\,dx \\
&= \left(2\ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x+1}\right)_1^3 \\
&= 2\ln(3) - \ln(4) + \frac{1}{4} + \ln(2) - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Distribución de puntajes:

- 1 punto por hacer fracciones parciales y simplificar la integral
- 1 punto por integrar y obtener el resultado.