PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2019

Examen - MAT1610

1. Determine si la función f es diferenciable en el origen.

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \ln(x^2) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solución:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3 \ln(h^2) - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(h^2)}{h^{-2}}$$

Usando L'Hopiltal

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{2h}{h^2}}{-2h^{-3}} = \lim_{h\to 0} -h^2 = 0$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por definición de derivable
- (2 puntos) Por cálculo de límite
- (2 puntos) Por conclusión

2. Demuestre que si una función f es derivable en $\mathbb{R}$ y satisface que

$$2\big(f(x)\big)^3 + 6f(x) = 2x^3 + 6x + 1$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces f no puede tener máximos ni mínimos.

Solución:

Observe que al derivar obtenemos que

$$6(f(x))^2 f'(x) + 6f'(x) = 6x^2 + 6$$

obteniendo que para todo $x \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$f'(x) = \frac{6x^2 + 6}{6f^2(x) + 6}$$

por lo tanto $f'(x) > 0$ de lo que tenemos que f es creciente en $\mathbb{R}$ y por lo tanto no tiene máximos ni mínimos.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por derivar
- (2 puntos) Por ver que la derivada siempre es positiva
- (2 puntos) Por concluir

3. Calcule

$$\lim_{x\to 1}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{x-1}dt$$

Solución:

Observe que

$$\lim_{x\to 1}\int_1^x \frac{e^{t^2}}{x-1}dt = \lim_{x\to 1}\frac{\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt}{x-1}$$

que es un límte indeterminado de la forma $0/0$, usando L'Hopital tenemos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{\displaystyle\int_1^x e^{t^2}dt}{x-1} = \lim_{x\to 1} e^{x^2} = e$$

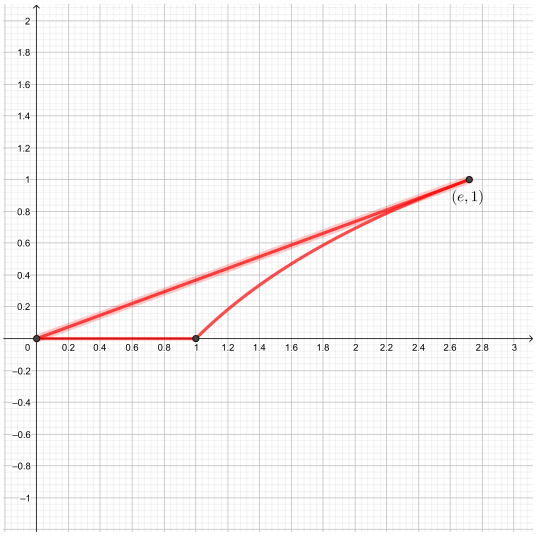
Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por separar la integral
- (2 puntos) Por usar TFC para aplicar L'Hopital
- (2 puntos) Por calcular el límite

4. Considere la región limitada por la gráfica de la función $f(x) = \ln x$, su tangente en $x = e$ y el eje X. Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido por la rotación de esta región alrededor del eje Y.

Solución:

Observe que la recta tangente a la curva $y = \ln(x)$ en $x = e$ tiene ecuación $y = x/e$, por lo tanto la región descrita corresponde a la mostrada en la figura adjunta



que puede ser descrita como $\{(x, y) : 0 \leq y \leq 1, ey \leq x \leq e^y\}$, usando secciones transversales obtenemos que el volumen de la región descrita puede ser calculada como

$$\pi \int_0^1 e^{2y} - e^2 y^2 dy = \frac{\pi(e^2 - 3)}{6}$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por determinar la región
- (2 puntos) Por plantear integral (en alguna técnica)
- (2 puntos) Por resultado

5. Determine

$$\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x} \, dx$$

Solución:

Realizando fracciones parciales obtenemos que

$$\frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x} = \frac{1}{x} + \frac{x + 1}{x^2 + 4}$$

por lo tanto

$$\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x} \, dx = \int \frac{1}{x} \, dx + \int \frac{x}{x^2 + 4} \, dx + \int \frac{1}{x^2 + 4} \, dx$$

luego

$$\int \frac{2x^2 + x + 4}{x^3 + 4x} \, dx = \ln(|x|) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por realizar fracciones parciales
- (1 puntos) Por cada una de las integrales (3 en total)
- (1 puntos) Por la constante de integración

6. Calcule
$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx$$

Solución:

Si hacemos la sustitución $x = \sec(\theta)$ tenemos que $dx = \sec(\theta)\tan(\theta)d\theta$, además si $x = 1$, $\theta = 0$ y si $x = 2$ se tiene que $\theta. = \pi/3$, obteniendo que

$$\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\,dx = \int_0^{\pi/3} \tan^2(\theta)d\theta = \int_0^{\pi/3} (\sec^2(\theta)-1)d\theta = \tan(\theta) - \theta\,\Big|_0^{\pi/3} = \sqrt{3} - \pi/3$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por la sutitución
- (2 puntos) por límites de integración o en su defecto por recuperar la variable original
- (2 puntos) por integrar correctamente

7. Sea $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$, demuestre que
$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2}(x)dx$$

Solución:

Observe que
$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x)dx = \int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-1}(x)\text{sen}(x)dx$$
pudiendo reallizar integración por partes considerando

$$u = \text{sen}^{n-1}(x),\ du = (n-1)\text{sen}^{n-2}(x)\cos(x) \text{ y } v = -\cos(x),\ dv = \text{sen}(x)dx$$

obteniendo que

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x)dx &= \left(-\text{sen}^{n-1}(x)\cos(x)\right)_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n-1)\text{sen}^{n-2}(x)\cos^2(x)\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (n-1)\text{sen}^{n-2}(x)(1-\text{sen}^2(x))\,dx \\
&= \int_0^{\pi/2} (n-1)\text{sen}^{n-2}(x)\,dx - \int_0^{\pi/2} (n-1)\text{sen}^n(x)\,dx
\end{aligned}$$

despejando obtenemos que

$$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n(x)dx = \frac{n-1}{n}\int_0^{\pi/2} \text{sen}^{n-2}(x)dx$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por plantear integración por partes
- (2 puntos) Por integrar correctamente lo planteado
- (2 puntos) Por concluir

8. Demuestre, usando TVM, que para todo $x > 0$ se tiene que

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

Solución:
Considere $f(x) = \ln(x+1)$, dado $x > 0$ podemos usar TVM ya que f es continua en $[0, x]$ y derivable en $(0, x)$, por lo tanto existe $c \in (0, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(c) = \frac{1}{1+c}$$

como $0 < c < x$, tenemos que $\dfrac{1}{1+x} < \dfrac{1}{1+c} < 1$ y por lo tanto

$$\frac{1}{x+1} < \frac{\ln(x+1)}{x} < 1$$

como $x > 0$, multiplicando por x tenemos que

$$\frac{x}{x+1} < \ln(x+1) < x$$

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por chequear hipótesis del TVM con función adecuada
- (2 puntos) Por aplicar TVM
- (2 puntos) por conlcuir