Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 3.

FILA A

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 50 minutos

Fecha : 27 de Mayo de 2016

1. Encuentre el valor de $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{n^2+k^2}\right)$

Solución

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{1+(k/n)^2}\right)\frac{1}{n}$$

0,5 pts.

Sea $\Delta x_i=\dfrac{1}{n}$, $f(x_i)=\dfrac{1}{1+(i/n)^2}$, $x_0=0$, $x_n=n$

0,5 pts.

Entonces por definición de integral definida, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{n^2+k^2}\right)=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\,dx=\arctan(19-\arctan(0)=\frac{\pi}{4}$$

1,0 pts.

2. Demuestre que:

$$\frac{4\pi\sqrt{2}}{(16+\pi^2)}\leq\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx\leq\frac{\pi}{2}$$

Solución

En el intervalo $[-\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{4}]$ tenemos que:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\cos(x)\leq 1$$

Como además

$$-\frac{\pi}{4}\leq x\leq\frac{\pi}{4}$$

Entonces

$$1 \leq 1 + x^2 \leq \frac{16 + \pi^2}{16}$$

Por lo tanto:

$$\frac{8\sqrt{2}}{16 + \pi^2} \leq \frac{\cos(x)}{1 + x^2} \leq 1$$

1,0 pts.

Luego, por teorema visto en clases:

$$\frac{4\pi\sqrt{2}}{(16 + \pi^2)} \leq \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(x)}{1 + x^2} dx \leq \frac{\pi}{2}$$

1,0 pts.

3. Sea g una función derivable, tal que $g(1) = g'(1) = 2$ y f definida por

$$f(x) = \int_0^x (2x - t)g(t)dt$$

Entonces el valor de $f''(1)$ es:

a) 6

b) $\frac{2}{3}$

c) 0

d) 8 **Respuesta correcta, 2,0 pts.**

e) Ninguno de los anteriores.

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Control 3.

FILA B

Nombre: _____

Sección:_____

Tiempo : 45 minutos

Fecha :27 de Mayo de 2016

1. Encuentre el valor de $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^p}{n^{p+1}}\right),\ p\in\mathbb{Q},\ p\neq -1$

Solución]

$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^p}{n^{p+1}}\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\frac{1}{n}$
0,5 pts.
Sean $\Delta x_i=\frac{1}{n}, f(x_i)=\left(\frac{i}{n}\right)^p, x_0=0, x_n=1$
0,5 pts.

Entonces por defición de integral definida

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k^p}{n^{p+1}}\right),\ =\int_0^1 x^p dx=\frac{x^{p+1}}{p+1}\Big|_0^1=\frac{1}{p+1}$$

1 pto.

2. **Demuestre que:**

$$\frac{3\pi}{(9+\pi^2)}\leq\int_{-\pi/3}^{\pi/3}\frac{\cos(x)}{1+x^2}dx\ \leq\frac{2\pi}{3}$$

Solución

En el intervalo $[-\frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{3}]$ **tenemos que:**

$$\frac{1}{2}\leq\cos(x)\leq 1$$

y como $-\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$,
Entonces:

$$\frac{9}{9+\pi^2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{9+\pi^2}{9}$$

Con lo cual:

$$\frac{9}{2(9+\pi^2} \leq \frac{\cos(x)}{1+x^2} \leq 1$$

1 pto.
Por lo tanto, por teorema visto en clase, se tiene que

$$\frac{3\pi}{(9+\pi^2)} \leq \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{\cos(x)}{1+x^2} dx \leq \frac{2\pi}{3}$$

1,0 pto.

3. Sea g **una función derivable, tal que** $g(1) = g'(1) = 2$ **y** f **definida por**

$$f(x) = \int_0^x (x+t)g(t)dt$$

Entonces el valor de $f''(1)$ **es:**

a) 18

b) 10**Respuesta correcta, 2,0 pts.**

c) 0

d) 8

e) **Ninguno de los anteriores.**