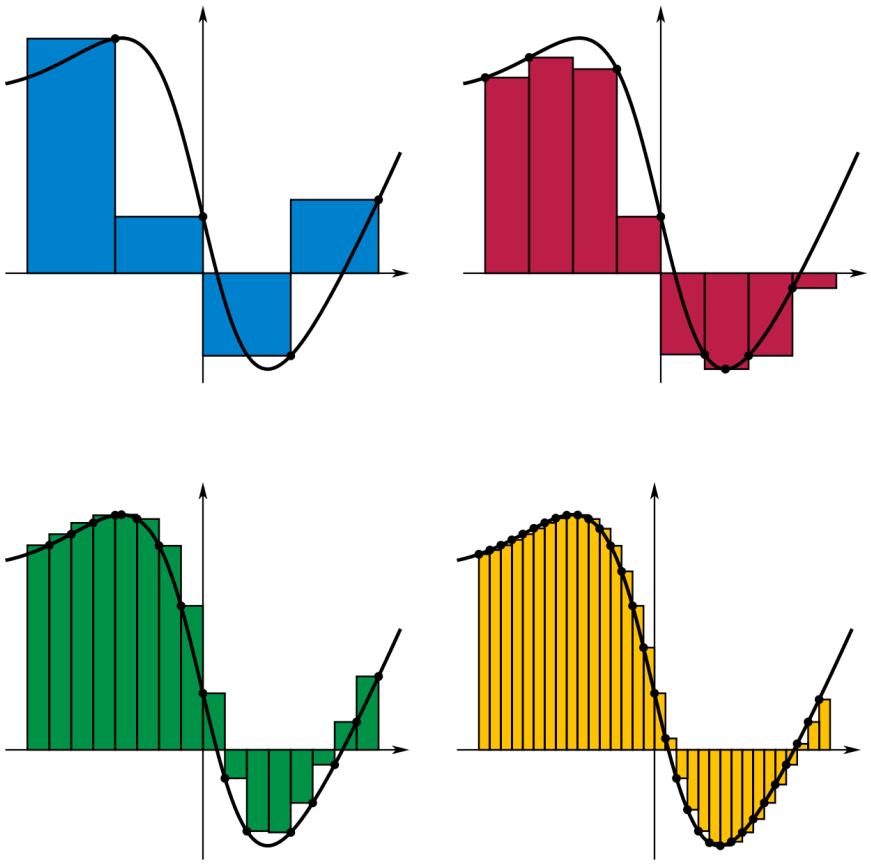
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Compilado de ayudantías de cálculo 1



Alberto Valdés

anvaldes@uc.cl

Versión 2019 - Primer Semestre

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ante cualquier error o algo que mejorar, hagan llegar su comentarios al mail anvaldes@uc.cl. Estos comentarios serán tenidos en cuenta para la versión 2019 - Segundo Semestre.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 1

Trigonométria

1. Contenidos

Curvas seno y coseno desplazadas

Las curvas sinusoidales y cosenoidales:

$y = a \cdot sin\,(k[x-b])$ $\qquad$ $y = a \cdot cos\,(k[x-b])$

tienen una **amplitud** $|a|$, **período** $\frac{2\pi}{k}$, y **desfase** b

Un intervalo apropiado para graficar un periodo completo es $\left[b, b+\frac{2\pi}{k}\right]$

Propiedades periódicas

Las funciones seno y coseno tienen periodo 2π:

$sin(x) = sin(x+2\pi)$ $\qquad$ $cos(x) = cos(x+2\pi)$

Las funciones cosecante y secante tienen periodo 2π:

$csc(x) = csc(x+2\pi)$ $\qquad$ $sec(x) = sec(x+2\pi)$

Las funciones tangente y cotangente tienen periodo π:

$tan(x) = tan(x+\pi)$ $\qquad$ $cotan(x) = cotan(x+\pi)$

Curvas cosecante y secante desplazadas

Las funciones:

$y = a \cdot csc\,(k[x-b])$ $\qquad$ $y = a \cdot sec\,(k[x-b])$

tienen **período** $\frac{2\pi}{k}$

Curvas tangente y cotangente desplazadas

Las funciones:

$y = a \cdot tan\,(k[x - b])$ $\qquad$ $y = a \cdot cot\,(k[x - b])$

tienen **período** $\frac{\pi}{k}$

Funciones trigonométricas inversas

La función **seno inverso** es la función $sin^{-1}(x)$ con dominio sobre $[-1, 1]$ y rango $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por:

$$sin^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad sin(y) = x$$

La función **coseno inversa** es la función $cos^{-1}(x)$ con dominio sobre $[-1, 1]$ y rango $[0, \pi]$, definida por:

$$cos^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad cos(y) = x$$

La función **tangente inversa** es la función $tan^{-1}(x)$ con dominio sobre $\mathbb{R}$ y rango $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, definida por:

$$tan^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad tan(y) = x$$

Identidades fundamentales

$$csc(\theta) = \frac{1}{sin(\theta)} \qquad sec(\theta) = \frac{1}{cos(\theta)} \qquad tan(\theta) = \frac{sin(\theta)}{cos(\theta)} \qquad cot(\theta) = \frac{cos(\theta)}{sin(\theta)} \qquad cot(\theta) = \frac{1}{tan(\theta)}$$

Identidades pitagóricas

$sin^2(\theta) + cos^2(\theta) = 1$ $\qquad$ $tan^2(\theta) + 1 = sec^2(\theta)$ $\qquad$ $cot^2(\theta) + 1 = csc^2(\theta)$

Propiedades par e impar

La función seno es una función impar:

$sin(-x) = -sin(x)$

La función coseno es una función par:

$cos(-x) = cos(x)$

Formulas de adición y sustracción

$$sin(s+t) = sin(s) \cdot cos(t) + sin(t) \cdot cos(s)$$

$$sin(s-t) = sin(s) \cdot cos(t) - sin(t) \cdot cos(s)$$

$$cos(s+t) = cos(s) \cdot cos(t) - sin(s) \cdot sin(t)$$

$$cos(s-t) = cos(s) \cdot cos(t) + sin(s) \cdot sin(t)$$

$$tan(s+t) = \frac{tan(s) + tan(t)}{1 - tan(s) \cdot tan(t)}$$

$$tan(s-t) = \frac{tan(s) - tan(t)}{1 + tan(s) \cdot tan(t)}$$

Suma de senos y cosenos

Si A y B son números reales, entonces:

$$A \cdot sin(x) + B \cdot cos(x) = k \cdot sin(x + \phi)$$

donde $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ y ϕ satisface que:

$$cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{y} \qquad sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Formulas para bajar potencias

$$sin^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2} \qquad cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2} \qquad tan^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{1 + cos(2x)}$$

Formulas de producto a suma

$$sin(s) \cdot cos(t) = \tfrac{1}{2}\left[sin(s+t) + sin(s-t)\right]$$

$$sin(t) \cdot cos(s) = \tfrac{1}{2}\left[sin(s+t) - sin(s-t)\right]$$

$$cos(s) \cdot cos(t) = \tfrac{1}{2}\left[cos(s+t) + cos(s-t)\right]$$

$$sin(s) \cdot sin(t) = \tfrac{1}{2}\left[cos(s-t) - cos(s+t)\right]$$

Formulas de suma a producto

$sin(x) + sin(y) = 2 \cdot sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$sin(x) - sin(y) = 2 \cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$

$cos(x) + cos(y) = 2 \cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$

$cos(y) - cos(x) = 2 \cdot sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$

2. Problemas

Problema 1. Encuentre la amplitud, período y desface de las siguientes funciones y grafique un periodo completo.

$$y = cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \qquad y = 2 \cdot sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

Problema 2. Encuentre el valor exacto de las siguientes expresiones.

$$sin\left(cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) \qquad tan\left(sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right) \qquad cot\left(sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$$

Problema 3. Demostrar las siguientes igualdades.

$$\frac{1 + sin(x)}{1 - sin(x)} - \frac{1 - sin(x)}{1 + sin(x)} = 4 \cdot tan(x) \cdot sec(x)$$

$$\frac{sin^3(x) + cos^3(x)}{sin(x) + cos(x)} = 1 - sin(x) \cdot cos(x)$$

Problema 4.

a) Usando la formula para $sin(s + t)$ obtener la formula para $sin(s - t)$.
b) Usando la formula para $cos(s + t)$ obtener la formula para $cos(s - t)$.

Problema 5. Encontrar el valor exacto de las siguientes expresiones

$$sin(15^o) \qquad cos(105^o) \qquad tan(15^o)$$

Problema 6. Demostrar la formula

$$A \cdot sin(x) + B \cdot cos(x) = k \cdot sin(x + \phi)$$

con $k = \sqrt{A^2 + B^2}$ y ϕ tal que: $cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ $sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Problema 7. Obtener todas las formulas de producto a suma a partir de las formulas para $sin(s + t), sin(s - t), cos(s + t)$ y $cos(s - t)$

Problema 8. Obtener todas las formulas de suma a producto a partir de las formulas de producto a suma

Problema 9. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas

$$3 \cdot sin^2(\theta) - 7 \cdot sin(\theta) + 2 = 0$$

$$sin^2(\theta) = 2 \cdot sin(\theta) + 3$$

3. Soluciones

Problema 1.

Notemos que $cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = (1) \cdot cos\left(1 \cdot \left[x - \left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\right)$

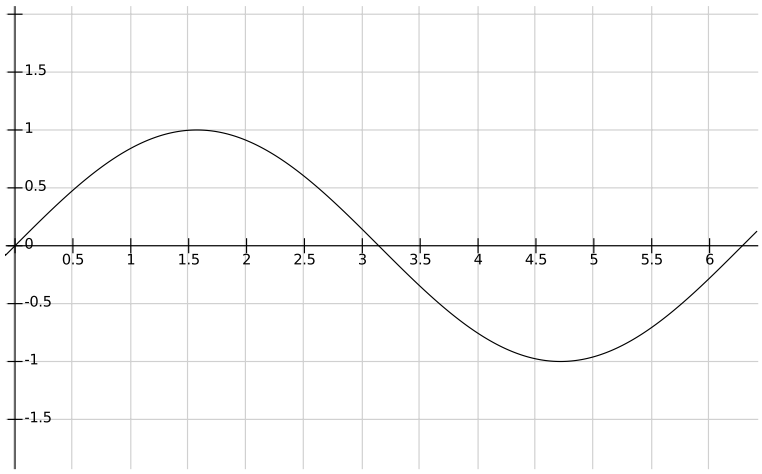
De este modo:

Amplitud $= |1| = 1$

Periodo $= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

Desfase $= \frac{\pi}{2}$

Pasaremos ahora a graficar:



Ahora para la otra función notemos que:

$2 \cdot sin\left(\frac{2x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = (2) \cdot sin\left(\frac{2}{3}\left[x - \left(\frac{\pi}{4}\right)\right]\right)$

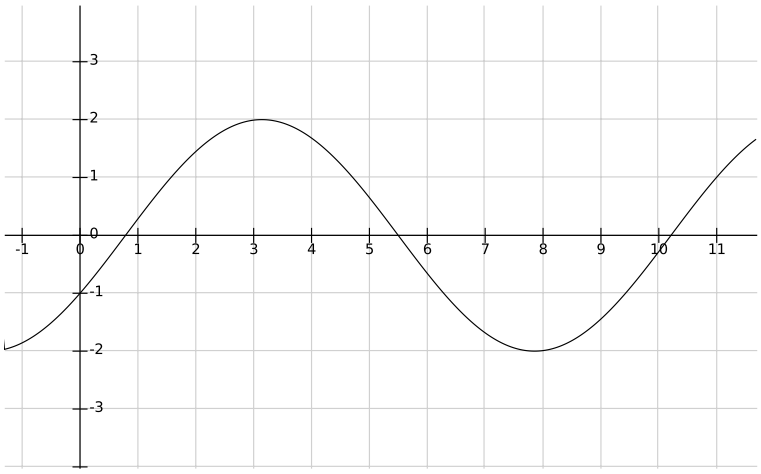
De este modo:

Amplitud $= |2| = 2$

Periodo $= \frac{2\pi}{\frac{2}{3}} = 3\pi$

Desfase $= \frac{\pi}{4}$

Ahora pasaremos a graficar:



Problema 2.

Primero calcularemos $sin\left(cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right)$.

Sea $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right) \Rightarrow cos(\alpha) = \frac{3}{5}$.

De este modo:

$sin\left(cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)\right) = sin\left(\alpha\right)$

Ahora recordando que $sin^2(\alpha) = 1 - cos^2(\alpha)$ y que $cos(\alpha) = \frac{3}{5}$, entonces:

$sin^2(\alpha) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{25}{25} - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$

De este modo:

$sin(\alpha) = \pm\frac{4}{5}$

Ahora como $\alpha = cos^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)$ y como la función $cos^{-1}(x)$ va hacia el intervalo $[0, \pi]$, entonces α pertenece al primer cuadrante, y por ende $sin(\alpha)$ es mayor que cero. De esta forma:

$$\boxed{sin(\alpha) = \frac{4}{5}}$$

Ahora procederemos a calcular $tan\left(sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right)$.

Primero digamos que $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) \Rightarrow sin(\alpha) = \frac{12}{13}$

De este modo:

$tan\left(sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)} = \frac{\frac{12}{13}}{cos(\alpha)}$

Ahora calcularemos $cos(\alpha)$ recordando que $cos^2(\alpha) = 1 - sin^2(\alpha)$

$cos^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{169}{169} - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$

De este modo:

$cos(\alpha) = \pm\frac{5}{13}$

Ahora notemos que como $sin^{-1}(x)$ va hacia el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De este modo $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)$ pertenece al primer intervalo, por ende el $cos(\alpha)$ es un valor positivo. Así tenemos que:

$cos(\alpha) = \frac{5}{13}$

Finalmente:

$tan\left(sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = tan(\alpha) = \frac{\frac{12}{13}}{\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}$

De esta forma:

$$\boxed{tan\left(sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right)\right) = \frac{12}{5}}$$

Finalmente, calcularemos $cot\left(sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right)$.

Sea $\alpha = sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \Rightarrow sin(\alpha) = \frac{2}{3}$

Notemos que como $sin^{-1}(x)$ va hacía el intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. De este modo, notamos que α se encuentra en el primer intervalo.

Ahora:

$cot\left(sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = cot\left(\alpha\right) = \frac{cos(\alpha)}{sin(\alpha)} = \frac{cos(\alpha)}{\frac{2}{3}}$

Ahora nos centraremos en calcular $cos(\alpha)$

$cos^2(\alpha) = 1 - sin^2(\alpha) = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = 1 - \frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

Y como α esta en el primer cuadrante, entonces $cos(\alpha)$ es positivo, por ende $cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$

De este modo:

$cot\left(sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{cos(\alpha)}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Finalmente:

$$\boxed{cot\left(sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

Problema 3.

Partiremos por demostrar la primera igualdad:

$$\frac{1+sin(x)}{1-sin(x)} - \frac{1-sin(x)}{1+sin(x)} = \frac{[1+sin(x)][1+sin(x)] - [1-sin(x)][1-sin(x)]}{[1-sin(x)][1+sin(x)]} =$$

$$\frac{[1+sin(x)]^2 - [1-sin(x)]^2}{1^2 - sin^2(x)} = \frac{[1+2sin(x)+sin^2(x)] - [1-2sin(x)+sin^2(x)]}{1-sin^2(x)} =$$

$$\frac{1+2sin(x)+sin^2(x)-1+2sin(x)-sin^2(x)}{1-sin^2(x)} = \frac{4sin(x)}{1-sin^2(x)} = \frac{4sin(x)}{cos(x)\cdot cos(x)} = 4\frac{sin(x)}{cos(x)}\cdot\frac{1}{cos(x)} =$$

$4 \cdot tan(x) \cdot sec(x)$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{1+sin(x)}{1-sin(x)} - \frac{1-sin(x)}{1+sin(x)} = 4 \cdot tan(x) \cdot sec(x)}$$

Ahora demostraremos la segunda igualdad:

$$\frac{sin^3(x)+cos^3(x)}{sin(x)+cos(x)} = \frac{[sin(x)+cos(x)][sin^2(x)-sin(x)\cdot cos(x)+cos^2(x)]}{sin(x)+cos(x)} =$$

$sin^2(x) + cos^2(x) - sin(x) \cdot cos(x) = 1 - sin(x) \cdot cos(x)$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{sin^3(x)+cos^3(x)}{sin(x)+cos(x)} = 1 - sin(x) \cdot cos(x)}$$

Problema 4.

a) Recordemos que:

$sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha) \cdot cos(\beta) + cos(\alpha) \cdot sin(\beta)$

Además tenemos que:

$sin(s - t) = sin(s + [-t])$

Es por esto que tomamos a:

$\alpha = s$, $\beta = -t$.

De este modo:

$sin(s - t) = sin(s + [-t]) = sin(s) \cdot cos(-t) + cos(s) \cdot sin(-t)$

Usando la propiedad par del coseno y la impar de seno, nos da que:

$sin(s) \cdot cos(-t) + cos(s) \cdot sin(-t) = sin(s) \cdot cos(t) - cos(s) \cdot sin(t)$

Por lo tanto:

$$\boxed{sin(s - t) = sin(s) \cdot cos(t) - cos(s) \cdot sin(t)}$$

b) Recordemos que:

$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha) \cdot cos(\beta) - sin(\alpha) \cdot sin(\beta)$

Además tenemos que:

$cos(s - t) = cos(s + [-t])$

Es por esto que tomamos a:

$\alpha = s$, $\beta = -t$.

De este modo:

$cos(s - t) = cos(s + [-t]) = cos(s) \cdot cos(-t) - sin(s) \cdot sin(-t)$

Usando la propiedad par del coseno y la impar de seno, nos da que:

$cos(s) \cdot cos(-t) - sin(s) \cdot sin(-t) = cos(s) \cdot cos(t) + sin(s) \cdot sin(t)$

Por lo tanto:

$$\boxed{cos(s - t) = cos(s) \cdot cos(t) + sin(s) \cdot sin(t)}$$

Problema 5.

Lo primero que haremos será calcular $sin(15^o)$.

$sin(15^o) = sin(45^o - 30^o) = sin(45^o) \cdot cos(30^o) - cos(45^o) \cdot sin(30^o) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} =$

$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1)$

De este modo:

$$\boxed{sin(15^o) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (\sqrt{3} - 1)}$$

Ahora calcularemos $cos(105^o)$.

$cos(105^o) = cos(60^o + 45^o) = cos(60^o) \cdot cos(45^o) - sin(60^o) \cdot sin(45^o) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{4} =$
$\frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{3})$

De este modo:

$$\boxed{cos(105^o) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{3})}$$

Ahora calcularemos $tan(15^o)$.

$tan(15^o) = tan(60^o - 45^o) = \frac{tan(60^o) - tan(45^o)}{1 + tan(60^o) \cdot tan(45^o)} = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}$

De este modo:

$$\boxed{tan(15^o) = \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}}$$

Problema 6.

Partimos desde:

$$A{\cdot}sin(x)+B{\cdot}cos(x) = \frac{\sqrt{A^2+B^2}}{\sqrt{A^2+B^2}}{\cdot}[A \cdot sin(x) + B \cdot cos(x)] = \sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot cos(x)\right]$$

Ahora definimos un angulo ϕ tal que:

$cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ y $sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

$\Big($ Notese que $cos^2(\phi) + sin^2(\phi) = \frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2} = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1\Big)$

Por lo tanto:

$$\sqrt{A^2+B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot sin(x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \cdot cos(x)\right] = \sqrt{A^2+B^2}\,[cos(\phi) \cdot sin(x) + sin(\phi) \cdot cos(x)]$$

Recordando que:

$$sin(x+\phi) = cos(\phi) \cdot sin(x) + sin(\phi) \cdot cos(x)$$

Y definiendo $k = \sqrt{A^2+B^2}$

Obtenemos que:

$$\sqrt{A^2+B^2}\,[cos(\phi) \cdot sin(x) + sin(\phi) \cdot cos(x)] = k \cdot sin(x+\phi)$$

Finalmente:

$$\boxed{A \cdot sin(x) + B \cdot cos(x) = k \cdot sin(x+\phi)}$$

con $k = \sqrt{A^2+B^2}$ y ϕ tal que: $sin(\phi) = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ y $cos(\phi) = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$

Problema 7.

Recordemos las formulas:

$$sin(s+t) = sin(s) \cdot cos(t) + sin(t) \cdot cos(s) \quad (1)$$

$$sin(s-t) = sin(s) \cdot cos(t) - sin(t) \cdot cos(s) \quad (2)$$

$$cos(s+t) = cos(s) \cdot cos(t) - sin(t) \cdot sin(s) \quad (3)$$

$$cos(s-t) = cos(s) \cdot cos(t) + sin(t) \cdot sin(s) \quad (4)$$

Ahora si hacemos (1) + (2) Obtenemos que:

$sin(s+t) + sin(s-t) = 2 \cdot sin(s) \cdot cos(t)$

De este modo:

$$\boxed{sin(s) \cdot cos(t) = \frac{sin(s+t) + sin(s-t)}{2}}$$

Si hacemos (1) − (2) Obtenemos que:

$sin(s+t) - sin(s-t) = 2 \cdot sin(t) \cdot cos(s)$

De este modo:

$$\boxed{sin(t) \cdot cos(s) = \frac{sin(s+t) - sin(s-t)}{2}}$$

Si hacemos (3) + (4) Obtenemos que:

$cos(s+t) + cos(s-t) = 2 \cdot cos(s) \cdot cos(t)$

De este modo:

$$\boxed{cos(s) \cdot cos(t) = \frac{cos(s+t) + cos(s-t)}{2}}$$

Si hacemos (3) − (4) Obtenemos que:

$cos(s+t) - cos(s-t) = -2 \cdot sin(t) \cdot sin(s)$

$$\boxed{sin(t) \cdot sin(s) = \frac{cos(s-t) - cos(s+t)}{2}}$$

Problema 8.

Las formulas de producto a suma son:

$$sin(s) \cdot cos(t) = \frac{sin(s+t) + sin(s-t)}{2} \quad (1)$$

$$sin(t) \cdot cos(s) = \frac{sin(s+t) - sin(s-t)}{2} \quad (2)$$

$$cos(s) \cdot cos(t) = \frac{cos(s+t) + cos(s-t)}{2} \quad (3)$$

$$sin(t) \cdot sin(s) = \frac{cos(s-t) - cos(s+t)}{2} \quad (4)$$

Sea $x = s + t$, $y = s - t$. Entonces:

$$s = \frac{x+y}{2}, \quad t = \frac{x-y}{2}$$

Si reemplazamos en (1):

$$sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{sin(x) + sin(y)}{2}$$

De este modo:

$$\boxed{sin(x) + sin(y) = 2 \cdot sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

Si reemplazamos en (2):

$$sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{sin(x) - sin(y)}{2}$$

De este modo:

$$\boxed{sin(x) - sin(y) = 2 \cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

Si reemplazamos en (3):

$$cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{cos(x)+cos(y)}{2}$$

De este modo:

$$\boxed{cos(x)+cos(y)=2\cdot cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

Si reemplazamos en (4):

$$sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right)=\frac{cos(y)-cos(x)}{2}$$

De este modo:

$$\boxed{cos(y)-cos(x)=2\cdot sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cdot sin\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

Problema 9.

Primero resolveremos la siguiente ecuación:

$3\cdot sin^2(\theta)-7\cdot sin(\theta)+2=0$

Utilizaremos la siguiente variable auxiliar $u=sin(\theta)$. De este modo, la ecuación queda como sigue:

$3u^2-7u+2=0$

Ahora vemos que esta es una ecuación cuadrática, por ende la resolvemos con la formula cuadrática.

De este modo:

$u_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3}=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{6}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{6}=\frac{7\pm5}{6}$

Así tenemos que:

$u_1=\frac{7+5}{6}=\frac{12}{6}=2$

$u_2 = \frac{7-5}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Notemos que como $u = sin(\theta)$, entonces la solución $u_1 = 2$ no es valida pues u no puede ser mayor que 1. Así tenemos que la única solución valida es $u = \frac{1}{3}$, que es equivalente a que $sin(\theta) = \frac{1}{3}$.

En el intervalo $[0, 2\pi]$ la soluciones son $\theta_1 = sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ y $\theta_2 = \pi - sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

Ahora si calculamos estas soluciones para cualquier intervalo, entonces las soluciones son:

$\theta_1 = sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

$\theta_2 = \pi - sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + 2\pi k = [2k+1]\pi - sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$

Ahora resolveremos la siguiente ecuación:

$sin^2(\theta) = 2sin(\theta) + 3$

Utilizamos la variable auxiliar $u = sin(\theta)$

De este modo, nos queda la siguiente ecuación:

$u^2 = 2u + 3$

Que es equivalente a la ecuación:

$u^2 - 2u - 3 = 0$

Como observamos, esta es una ecuación cuadrática, por ende utilizaremos la formula cuadrática para resolver esta ecuación:

$u_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}$

Por lo tanto:

$u_1 = \frac{2+4}{2} = \frac{6}{2} = 3$

Y como $u = sin(\theta)$, por lo tanto u_1 debe ser menor o igual que 1 y como $u_1 = 3$, entonces se descarta esta solución.

Además, tenemos que:

$u_2 = \frac{2-4}{2} = \frac{-2}{2} = -1$

Y como $u = sin(\theta)$, entonces como $u_2 = -1$, entonces debe ocurrir que $sin(\theta) = -1$. Y la solución a esta ecuación en el intervalo $[0, 2\pi]$ es $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Por ende la solución general de la ecuación es:

$\theta = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$ con $k \in \mathbb{Z}$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 2

Límites y Continuidad

1. Contenidos

Limite por la izquierda

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Se lee **el limite izquierdo de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es igual a** L , si es que se puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo un x lo bastante cerca de a pero menor que a

Limite por la derecha

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

Se lee **el limite derecho de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es igual a** L , si es que se puede aproximar los valores de $f(x)$ a L tanto como quiera, escogiendo un x lo bastante cerca de a pero mayor que a

Limite

Se dice que: $$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to a^+} f(x) = L \quad \wedge \quad \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

Es decir, que el **limite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** L si y solo si tanto el **limite por derecha de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** L y el **limite por izquierda de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** L

Limites notables

$$\lim_{x \to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Leyes de los limites

Suponga que c es una constante y que los límites: $\lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$ existen. Entonces:

- $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$
- $\lim_{x\to a}[c\cdot f(x)] = c\cdot \lim_{x\to a} f(x)$
- $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\cdot\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$
- $\lim_{x\to a}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ si $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$

Teorema de la compresión

Si $f(x)\leq g(x)\leq h(x)$, cuando x esta cerca de a (quizás excepto en a) y:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

entonces:

$$\lim_{x\to a} g(x) = L$$

Definición de limite

Sea f una función definida en algún intervalo abierto que contiene al número a, excepto posiblemente a a misma. Entonces decimos que el **limite de** $f(x)$ **cuando** x **tiende a** a **es** L, se escribe:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$

si para todo número $\epsilon > 0$ hay un número $\delta > 0$ tal que

$$\text{si } 0<|x-a|<\delta \quad \text{entonces } |f(x)-L|<\epsilon$$

Continuidad

Una función f es continua en un número a si:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Teorema

Si f y g son funciones continuas en a y c es una constante, entonces las funciones siguientes también son continuas en a:

- $f + g$
- $f - g$
- $c \cdot f$
- $f \cdot g$
- $\dfrac{f}{g}$ si $g(a) \neq 0$

Teorema

Los siguientes tipos de funciones son continuas en todo su dominio:

- Polinomios
- Funciones racionales
- Funciones raíz
- Funciones trigonométricas
- Funciones trigonométricas inversas
- Funciones exponenciales
- Funciones logarítmicas

Teorema

Si f es continua en b y $\lim\limits_{x \to a} g(x) = b$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(g(x)) = f(b)$. En otras palabras:

$$\lim_{x \to a} f(g(x)) = f\left(\lim_{x \to a} g(x)\right)$$

2. Problemas

Problema 1. Demuestre que los siguientes limites no existen.

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{x(x-1)} \qquad\qquad \lim_{x\to 2}\frac{x}{x-2}$$

Problema 2. Calcular los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1} \quad (m,n\in\mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{x} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2} \qquad \lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{cos(x)-sin(x)}{cos(2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(2x)}{sin(3x)} \qquad \lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^p-a^p} \quad m,p\in\mathbb{Z}^+ \qquad \lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x}-3x) \qquad \lim_{x\to 0}\left[x^2\cdot sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right] \qquad \lim_{x\to 0^+}\left[\sqrt{x}\cdot e^{sin\left(\frac{\pi}{x}\right)}\right]$$

Problema 3. Demostrar por definición los siguientes límites.

$$\lim_{x\to -2}(3x+5)=-1 \qquad\qquad \lim_{x\to 2}(x^2-1)=3$$

Problema 4. Encuentre los valores de p y q de manera que la función:

$$f(x)=\begin{cases} -2\cdot sin(x) & \text{si} \quad x\le -\frac{\pi}{2} \\ p\cdot sin(x)+q & \text{si} \quad -\frac{\pi}{2}< x< \frac{\pi}{2} \\ cos(x) & \text{si} \quad x\ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

sea continua en todo $\mathbb{R}$

Problema 5. Determine $a, b \in \mathbb{R}$, tal que $f(x)$ sea continua en todo su dominio, donde

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)^2}{3} & \text{si} \quad x < -1 \\ \\ b \quad \text{si} \quad x = -1 \\ \\ \dfrac{(a-x)^2}{2} & \text{si} \quad x > -1 \end{cases}$$

3. Soluciones

Problema 1.

Primero demostraremos que $\lim_{x\to 1}\sqrt{x(x-1)}$ no existe.

Lo primero que haremos será mostrar que si nos acercamos a 1 por la izquierda entonces $x < 1$. Por lo tanto $(x-1) < 0$ y como $x > 0$, entonces:

$x(x-1) < 0$ cuando nos acercamos por la izquierda a 1

De esta forma, la raíz de $x(x-1)$ no existirá cuando nos acerquemos por la izquierda a 1, por lo tanto:

$\lim_{x\to 1}\sqrt{x(x-1)}$ no existe

Ahora pasaremos a demostrar que $\lim_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}$ no existe.

Cuando x tiende a 2 entonces $(x-2)$ tiende a 0. Por ende $\dfrac{1}{x-2}$ tiende a ∞. Así de esta manera $\lim_{x\to 2}\dfrac{x}{x-2}$ no existe.

Problema 2.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x-1)}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)}{x(x+1)}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sqrt{1+x}-1][\sqrt{1+x}+1]}{x[\sqrt{1+x}+1]}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-1}{x[\sqrt{1+x}+1]}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x[\sqrt{1+x}+1]}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1[\sqrt{1+x}+1]}=\frac{1}{2}$$

Para calcular el siguiente limite se debe tener en cuenta la siguiente factorización:

$$x^k-1=(x-1)(1+x+...+x^{k-1})=(x-1)\cdot\sum_{i=1}^{k}x^{i-1}$$

Para todo $k\in\mathbb{N}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\cdot\sum_{i=1}^{m}x^{i-1}}{(x-1)\cdot\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}}=\lim_{x\to 1}\frac{\sum_{i=1}^{m}x^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}x^{i-1}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}\lim_{x\to 1}x^{i-1}}{\sum_{i=1}^{n}\lim_{x\to 1}x^{i-1}}=\frac{\sum_{i=1}^{m}1}{\sum_{i=1}^{n}1}=\frac{m}{n}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{x}=\frac{5}{5}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{5x}$$

Usaremos la variable auxiliar $u=5x$. Como $x\to 0$, entonces $u\to 0$.

De este modo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(5x)}{5x}=5\cdot\lim_{u\to 0}\frac{sin(u)}{u}=5\cdot 1=5$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+cos(x)}{1+cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-cos(x)][1+cos(x)]}{x^2[1+cos(x)]}=$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{[1-cos^2(x)]}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{[1-cos^2(x)]}{x^2}\cdot\frac{1}{1+cos(0)}=\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{[1-cos^2(x)]}{x^2}$$

Ahora, recordando que $sin^2(x)+cos^2(x)=1$, entonces: $sin^2(x)=1-cos^2(x)$

De este modo:

$$\frac{1}{2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin^2(x)}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(x)}{x}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot(1)^2=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos(x)-sin(x)}{cos(2x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos(x)-sin(x)}{cos(2x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos(x)+sin(x)}{cos(x)+sin(x)}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[cos(x)-sin(x)][cos(x)+sin(x)]}{cos(2x)[cos(x)+sin(x)]}$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[cos^2(x)-sin^2(x)]}{cos(2x)[cos(x)+sin(x)]}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[cos^2(x)-sin^2(x)]}{cos(2x)}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{cos(x)+sin(x)}=$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[cos^2(x)-sin^2(x)]}{cos(2x)}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[cos^2(x)-sin^2(x)]}{cos(2x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[cos^2(x)-sin^2(x)]}{cos(2x)}$$

Ahora usaremos que $cos(2x)=cos^2(x)-sin^2(x)$, por lo tanto:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos(x)-sin(x)}{cos(2x)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{[cos^2(x)-sin^2(x)]}{cos(2x)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{cos(2x)}{cos(2x)}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(2x)}{sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sin(2x)}{cos(2x)}}{sin(3x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{sin(3x)}\cdot\frac{1}{cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{sin(3x)}\cdot\lim_{x\to 0}=\frac{1}{cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{sin(3x)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin(2x)}{sin(3x)}\cdot\frac{x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{sin(3x)}\cdot\frac{sin(2x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x}{sin(3x)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{sin(3x)}{x}\right)^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{x}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(3x)}{x}\right)^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{x}=$$

$$\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(3x)}{x}\cdot\frac{3}{3}\right)^{-1}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{x}\cdot\frac{2}{2}=\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(3x)}{3x}\cdot\right)^{-1}\cdot 3^{-1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{2x}\right)\cdot 2=$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(3x)}{3x}\cdot\right)^{-1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{2x}\right)$$

Ahora haremos los siguientes cambios de variable:

Sea $u_1=2x$. Si $x\to 0$, entonces $u_1\to 0$

Sea $u_2=3x$. Si $x\to 0$, entonces $u_2\to 0$

De este modo:

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(3x)}{3x}\cdot\right)^{-1}\cdot\left(\lim_{x\to 0}\frac{sin(2x)}{2x}\right)=\frac{2}{3}\cdot\left(\lim_{u_2\to 0}\frac{sin(u_2)}{u_2}\cdot\right)^{-1}\cdot\left(\lim_{u_1\to 0}\frac{sin(u_1)}{u_1}\right)=\frac{2}{3}\cdot(1)^{-1}\cdot(1)=\frac{2}{3}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}=\lim_{x\to a}\left[(x^m-a^m)\cdot\frac{1}{(x^p-a^p)}\right]=\lim_{x\to a}\left[(x^m-a^m)\cdot\frac{a^m}{a^m}\cdot\frac{1}{(x^p-a^p)}\cdot\frac{a^p}{a^p}\right]=$$

$$\frac{a^m}{a^p}\cdot\lim_{x\to a}\left[\frac{(x^m-a^m)}{a^m}\cdot\frac{a^p}{(x^p-a^p)}\right]=\frac{a^m}{a^p}\cdot\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{x^m}{a^m}-\frac{a^m}{a^m}\right)\cdot\frac{a^p\cdot\frac{1}{a^p}}{(x^p-a^p)\cdot\frac{1}{a^p}}\right]=$$

$$\frac{a^m}{a^p}\cdot\lim_{x\to a}\left[\left(\left[\frac{x}{a}\right]^m-1\right)\cdot\left(\frac{1}{\left[\frac{x}{a}\right]^p-1}\right)\right]$$

Ahora usamos la variable auxiliar $u=\frac{x}{a}$. Si $x\to a$, entonces $u\to 1$, por ende:

$$=\frac{a^m}{a^p}\cdot\lim_{u\to 1}\left[(u^m-1)\cdot\left(\frac{1}{u^p-1}\right)\right]=\frac{a^m}{a^p}\cdot\lim_{u\to 1}\frac{u^m-1}{u^p-1}$$

Ahora notemos que el limite $\lim_{u\to 1}\dfrac{u^m-1}{u^p-1}$ ya se calculo antes y vale $\dfrac{m}{p}$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^m-a^m}{x^p-a^p}=\frac{a^m}{a^p}\cdot\frac{m}{p}$$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$$

Lo primero que haremos será introducir la variable n de la siguiente forma:

$$\frac{1}{n}+1=\frac{2x+1}{x+2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{n}=\frac{2x+1}{x+2}-1=\frac{2x+1}{x+2}-\frac{x+2}{x+2}=\frac{2x+1-x-2}{x+2}=\frac{x-1}{x+2}\ \Rightarrow n=\frac{x+2}{x-1}$$

De esta forma:

$$n(x-1)=x+2\ \Rightarrow nx-n=x+2\ \Rightarrow\ nx-x=n+2\ \Rightarrow x(n-1)=n+2\ \Rightarrow x=\frac{n+2}{n-1}$$

Así tenemos que:

$$x-1=\frac{n+2}{n-1}-1=\frac{n+2}{n-1}-\tfrac{n-1}{n-1}=\frac{n+2-n+1}{n-1}=\frac{3}{n-1}$$

Así obtenemos que:

$$\frac{1}{x-1}=\frac{n-1}{3}$$

Como sabemos que: $\dfrac{1}{n}+1=\dfrac{2x+1}{x+2}$ y que $\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{n-1}{3}$, entonces:

$$\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

Y como $n=\dfrac{x+2}{x-1}$, entonces cuando $x\to 1^+$ implica que $n\to\infty$

De este modo:

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{3}}$$

De esta forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n-1}{3}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}\right]^{\frac{1}{3}}=\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}\right]^{\frac{1}{3}}=$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right]^{\frac{1}{3}}=e^{\frac{1}{3}}$$

Así finalmente tenemos que:

$$\lim_{x\to1^{+}}\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}=e^{\frac{1}{3}}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2+x}-3x)=\lim_{x\to\infty}\left[(\sqrt{9x^2+x}-3x)\cdot\frac{\sqrt{9x^2+x}+3x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(\sqrt{9x^2+x}-3x)\cdot(\sqrt{9x^2+x}+3x)}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(9x^2+x)-(3x)^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{9x^2+x-9x^2}{\sqrt{9x^2+x}+3x}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{9x^2+x}+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\frac{1}{x}}{[\sqrt{9x^2+x}+3x]\cdot\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9x^2+x}\cdot\frac{1}{x}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{\frac{9x^2+x}{x^2}}+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{9+\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}+3}=\frac{1}{\sqrt{9+0}+3}$$

$$=\frac{1}{6}$$

Ahora calcularemos $\lim_{x\to0}\left[x^2\cdot sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$ usando el teorema del sándwich

Notemos que:

$$-1\leq sin\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$$

$$0\leq sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\leq1$$

$$0\cdot x^2\leq x^2\cdot sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2$$

$$0\leq x^2\cdot sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\leq x^2$$

$$\lim_{x\to0}0\leq\lim_{x\to0}\left[x^2\cdot sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]\leq\lim_{x\to0}x^2$$

$$0 \leq \lim_{x \to 0} \left[x^2 \cdot sin^2 \left(\frac{1}{x} \right) \right] \leq 0$$

De este modo:

$$\lim_{x \to 0} \left[x^2 \cdot sin^2 \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0$$

Ahora calcularemos $\lim_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x} \cdot e^{sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \right]$ utilizando el teorema del sándwich

Notemos que:

$$-1 \leq sin \left(\frac{\pi}{x} \right) \leq 1$$

$$e^{-1} \leq e^{sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq e^1$$

$$\sqrt{x} \cdot e^{-1} \leq \sqrt{x} \cdot e^{sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq \sqrt{x} \cdot e^1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot e^{-1} \leq \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot e^{sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot e^1$$

$$0 \cdot e^{-1} \leq \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot e^{sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} \leq 0$$

De este modo, tenemos que:

$$\lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} \cdot e^{sin\left(\frac{\pi}{x}\right)} = 0$$

Problema 3.

Partiremos demostrando el limite $\lim_{x \to -2} (3x + 5) = -1$

Lo que tenemos que hacer es buscar un δ en función de ϵ de modo que:

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $|x - (-2)| < \delta$ entonces $|(3x + 5) - (-1)| < \epsilon$

Para demostrar este limite, lo primero que haremos será asumir que $|x - (-2)| = |x + 2| < \delta$

Luego lo notemos que:

$|(3x + 5) - (-1)| = |3x + 5 + 1| = |3x + 6| = |3(x + 2)| = |3| \cdot |x + 2| = 3 \cdot |x + 2| < 3 \cdot \delta$

Así que para que $|(3x + 5) - (-1)| < \epsilon$ debe ocurrir que $3\delta = \epsilon \ \Rightarrow \ \delta = \frac{\epsilon}{3}$

Ahora que ya encontramos $\delta = \frac{\epsilon}{3}$, lo que haremos será pasar a la demostración formal.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \frac{\epsilon}{3} > 0$ tal que:

Si $|x-(-2)| < \delta \ \Rightarrow \ |x+2| < \frac{\epsilon}{3} \ \Rightarrow \ 3|x+2| < \epsilon \ \Rightarrow \ |3(x+2)| < \epsilon \ \Rightarrow \ |(3x+5)-(-1)| < \epsilon$

De este modo, se demostró que:

$$\lim_{x \to -2}(3x+5) = -1$$

Ahora, pasaremos a demostrar que $\lim_{x \to 2}(x^2-1) = 3$

Lo que tenemos que hacer es buscar un δ en función de ϵ de modo que:

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ tal que si $|x-2| < \delta$ entonces $|(x^2+1)-3| < \epsilon$

Para demostrar este limite, lo primero que haremos será asumir que $|x-2| < \delta$

Luego lo notemos que:

$|(x^2+1)-3| = |x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |(x-2)([x-2]+4)| = |x-2||(x-2)+4|$

Usando la desigualdad triangular tenemos que:

$|x-2| \cdot |(x-2)+4| \leq |x-2| \cdot [|x-2|+4] = |x-2|^2 + 4 \cdot |x-2| < \delta^2 + 4\delta$

Por lo tanto para que $|(x^2+1)-3| < \epsilon$ debe ocurrir que $\delta^2 + 4\delta = \epsilon$

Ahora despejaremos esta ecuación:

$\delta^2 + 4\delta = \epsilon \ \Rightarrow \ \delta^2 + 4\delta + 4 = \epsilon + 4 \ \Rightarrow \ [\delta+2]^2 = \epsilon + 4 \ \Rightarrow \ \delta + 2 = \pm\sqrt{\epsilon+4} \ \Rightarrow \ \delta = \pm\sqrt{\epsilon+4} - 2$

Como δ debe ser mayor que cero, entonces $\delta = \sqrt{\epsilon+4} - 2$

Ahora que ya encontramos $\delta = \sqrt{\epsilon+4} - 2$, lo que haremos será pasar a la demostración formal.

$\forall \epsilon > 0 \ \exists \ \delta = \sqrt{\epsilon+4} - 2 > 0$ tal que:

Si $|x-2| < \delta \ \Rightarrow \ |x-2| < \sqrt{\epsilon+4} - 2 \ \Rightarrow \ |x-2|^2 + 4|x-2| < [\sqrt{\epsilon+4} - 2]^2 + 4[\sqrt{\epsilon+4} - 2]$

$= [(\epsilon+4) - 4\sqrt{\epsilon+4} + 4] + 4\sqrt{\epsilon+4} - 8 = \epsilon$

De esta forma se demostro que:

$|x-2|^2 + 4|x-2| < \epsilon$

Y como:

$|(x^2-3)-1| = |x^2-4| = |(x-2)([x-2]+4)| < |x-2||[x-2]+4| \leq |x-2|\cdot[|x-2|+4] = |x-2|^2+4|x-2|$

Entonces $|(x^2-3)-1| < |x-2|^2+4|x-2| < \epsilon \;\Rightarrow\; |(x^2-3)-1| < \epsilon$

De este modo, se demostró que:

$$\lim_{x\to 2}(x^2-1) = 3$$

Problema 4.

Notemos que la función $f(x)$ es continua para $\left(-\infty, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ y para $\left(\frac{\pi}{2}, +\infty\right)$, por ende los únicos puntos para los que no se sabe si la función es continua son $-\frac{\pi}{2}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Para que la función sea continua en $x = -\frac{\pi}{2}$, debe ocurrir que:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x)$$

Notemos que:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -2\cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (-2)\cdot(-1) = 2$$

Y que:

$$\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = p\cdot sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) + q = -p + q$$

Así para asegurar la continuidad en $x = -\frac{\pi}{2}$, nos queda la siguiente ecuación:

$$\boxed{-p+q=2}$$

Por otro lado, notemos que:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^-} f(x) = p\cdot sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + q = p + q$$

Además:

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) = \lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} f(x) = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Así para asegurar la continuidad en $x = \frac{\pi}{2}$, nos queda la siguiente ecuación:

$$\boxed{p+q=0}$$

Ahora nos queda el siguiente sistema a resolver:

$p+q=0$ y $-p+q=2$

De la primera ecuación obtenemos que $p=-q$. Si reemplazamos en la segunda ecuación nos queda que: $-(-q)+q=2 \Rightarrow 2q=2 \Rightarrow \boxed{q=1}$

Como sabemos que $p=-q$, entonces $\boxed{p=-1}$

Así obtuvimos que los valores de p y q de modo que la función $f(x)$ sea continua son:

$$\boxed{p=-1 \quad q=1}$$

Problema 5.

Notemos que para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio, solo debemos corroborar que sea continua en $x=-1$.

Para que la función sea continua en $x=-1$ debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$

Ahora:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \frac{(-1-a)^2}{3} = \frac{(-1)^2(a+1)^2}{3} = \frac{(a+1)^2}{3}$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \frac{(a-(-1))^2}{2} = \frac{(a+1)^2}{2}$$

$$f(-1) = b$$

De este modo, como debe ocurrir que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$, entonces nos queda que:

$$\frac{(a+1)^2}{2} = \frac{(a+1)^2}{3} \Rightarrow \frac{(a+1)^2}{2} - \frac{(a+1)^2}{3} = 0$$

$$\Rightarrow (a+1)^2 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = (a+1)^2 \cdot \left(\frac{3}{2\cdot 3} - \frac{2}{3\cdot 2}\right) = (a+1)^2 \cdot \left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) = (a+1)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0$$

De esta forma $(a+1)^2 \cdot \frac{1}{6} = 0 \Rightarrow (a+1)^2 = 0 \Rightarrow a+1=0 \Rightarrow a=-1$

Así tenemos que: $\boxed{a=-1}$

Por otro lado, se tiene que cumplir también que $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = f(-1)$

Por lo tanto:

$$\frac{(-1+1)^2}{3} = b \;\Rightarrow\; \boxed{b = 0}$$

Así obtuvimos que los valores de a y b son $a = -1$ y $b = 0$.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 3

TVI y derivadas

1. Contenidos

Teorema del valor intermedio

Sea f una función continua sobre el intervalo cerrado $[a, b]$ y sea N cualquier número entre $f(a)$ y $f(b)$, donde $f(a) \neq f(b)$. Entonces existe un número c en (a, b) tal que $f(c) = N$

Derivada como función

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Teorema

Si f es derivable en a entonces f es continua en a

Derivada de una función constante

Sea $c \in \mathbb{R}$: $$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

Regla de la potencia (Versión General)

Sea $n \in \mathbb{R}$ $$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}$$

Regla del múltiplo constante

Sea $c \in \mathbb{R}$ y f una función derivable, entonces: $$\frac{d}{dx}[c \cdot f(x)] = c \cdot \frac{d}{dx}[f(x)]$$

Regla de la suma

Sean f y g derivables entonces:	$\dfrac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \dfrac{d}{dx}[f(x)] + \dfrac{d}{dx}[g(x)]$

Regla de la diferencia

Sean f y g derivables entonces:	$\dfrac{d}{dx}[f(x)-g(x)] = \dfrac{d}{dx}[f(x)] - \dfrac{d}{dx}[g(x)]$

Definición del número e

e es el número tal que:	$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$

Igualdad importante

Sea $f(x)$ una función positiva, entonces:	$e^{ln(f(x))} = f(x)$

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Regla del producto

Sea f y g funciones derivables, entonces:	$\dfrac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f(x)\cdot\dfrac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\cdot\dfrac{d}{dx}[f(x)]$

Regla del cociente

Sea f y g funciones derivables, entonces:	$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right] = \dfrac{\frac{d}{dx}[f(x)]\cdot g(x) - \frac{d}{dx}[g(x)]\cdot f(x)}{[g(x)]^2}$

2. Problemas

Problema 1. Demostrar que la ecuación: .

$$x^4 + x - 3 = 0$$

tiene por lo menos una solución en el intervalo $(1, 2)$

Problema 2. Calcular los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x} \qquad\qquad \lim_{x\to 0} \frac{4^x - 2^x}{5^x - 3^x}$$

Problema 3. Calcule la función derivada de las siguientes funciones usando la definición.

$$f(x) = \frac{2}{x^2 + 4} \qquad f(x) = x + \sqrt{x} \qquad f(x) = sin(x)$$

Problema 4. Derive la siguientes funciones:

$$f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 \qquad g(y) = \frac{y^2 + 4y + 3}{\sqrt{y}} \qquad h(x) = e^{x+1} + 1 \qquad u(x) = \frac{x + 6}{x - 2}$$

Problema 5. Hallar la ecuación de la linea tangente a la curva $y = \sqrt[4]{x}$ en el punto $(1, 1)$

Problema 6. Hallar la ecuación de la linea normal a la curva $y = x^4 + 2 \cdot e^x$ en el punto $(0, 2)$

Problema 7. Si $f(10) = -\frac{1}{2}$, $g(10) = 6$, $f'(10) = \frac{1}{3}$, $g'(10) = 8$. Encontrar:

$$(5 \cdot f + g)'(10) \qquad (6 \cdot f \cdot g - 9 \cdot g)'(10) \qquad \left(\frac{f}{g}\right)'(10) \qquad \left(\frac{1}{g} - \frac{g}{f}\right)'(10)$$

Problema 8. Demostrar:

a) Si f es una función derivable en a entonces f es continua en a

b) La regla del producto

c) La regla del cociente

3. Soluciones

Problema 1.

Sea $f(x) = x^4 + x - 3$. Notemos que $f(x)$ es continua en el intervalo $[1, 2]$. Además $f(1) = -1$ y $f(2) = 15$, por lo tanto, por TVI existe un $c \in (1, 2)$ tal que $f(c) = 0$. Lo cual es equivalente a decir que:

$x^4 + x - 3 = 0$ tiene una solución en el intervalo $(1, 2)$.

Problema 2.

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^x - 3^x}{x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x - 3^x}{x} \cdot \frac{3^x}{3^x} \right) = \lim_{x\to 0} 3^x \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{2^x - 3^x}{x} \cdot \frac{1}{3^x} \right) = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1}{x}$$

Notemos que $\frac{2}{3}^x = e^{ln\left(\left[\frac{2}{3}\right]^x\right)} = e^{x \cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)}$

De este modo, nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x \cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)} - 1}{x}$$

Hacemos el cambio de variable $u = x \cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)$

De esta forma $\frac{u}{ln\left(\frac{2}{3}\right)} = x$

Finalmente, como cuando $x \to 0$, entonces $u \to 0$, entonces nos queda:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x \cdot ln\left(\frac{2}{3}\right)} - 1}{x} = \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{\frac{u}{ln\left(\frac{2}{3}\right)}} = ln\left(\frac{2}{3}\right) \cdot \lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4^x - 2^x}{5^x - 3^x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{4^x - 2^x}{5^x - 3^x} \cdot \frac{x}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{4^x - 2^x}{x} \cdot \frac{x}{5^x - 3^x} \right) = \lim_{x\to 0} \left(\frac{4^x - 2^x}{x} \right) \cdot \lim_{x\to 0} \left(\frac{x}{5^x - 3^x} \right)$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{4^x - 2^x}{x} \right) \cdot \left[\lim_{x\to 0} \left(\frac{5^x - 3^x}{x} \right) \right]^{-1}$$

Ahora nos centraremos en calcular un limite de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{a^x - b^x}{x} \right) = \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{a^x - b^x}{x} \right) \cdot \left(\frac{b^x}{b^x} \right) \right] = \lim_{x\to 0} b^x \cdot \lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{a^x - b^x}{x} \right) \cdot \left(\frac{1}{b^x} \right) \right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x} \right)$$

Ahora, usamos que $\left(\frac{a}{b}\right)^x = e^{ln\left(\left[\frac{a}{b}\right]^x\right)} = e^{x\cdot ln\left(\frac{a}{b}\right)}$. De este modo:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\cdot ln\left(\frac{a}{b}\right)} - 1}{x}\right)$$

Ahora lo que haremos será el cambio de variable $u = x\cdot ln\left(\frac{a}{b}\right) \;\Rightarrow\; x = \dfrac{u}{ln\left(\frac{a}{b}\right)}$

Y además como cuando $x \to 0$ entonces $u \to 0$

De esta forma:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x\cdot ln\left(\frac{a}{b}\right)} - 1}{x}\right) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{e^u - 1}{\frac{u}{ln\left(\frac{a}{b}\right)}}\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right)\cdot \lim_{u\to 0}\left(\frac{e^u - 1}{u}\right) = ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Finalmente tenemos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{4^x - 2^x}{5^x - 3^x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{4^x - 2^x}{x}\right)\cdot\left[\lim_{x\to 0}\left(\frac{5^x - 3^x}{x}\right)\right]^{-1} = ln\left(\frac{4}{2}\right)\cdot\left[ln\left(\frac{5}{3}\right)\right]^{-1} = \frac{ln(2)}{ln\left(\frac{5}{3}\right)}$$

Problema 3.

Notemos que la definición de derivada nos dice que:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

De este modo lo primero que haremos será calcular la derivada de $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2}{(x+h)^2+4} - \frac{2}{x^2+4}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{2[x^2+4]}{[(x+h)^2+4][x^2+4]} - \frac{2[(x+h)^2+4]}{[x^2+4][(x+h)^2+4]}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2[x^2+4]-2[(x+h)^2+4]}{[(x+h)^2+4][x^2+4]}}{h} = 2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[x^2+4] - [(x+h)^2+4]}{h\cdot[(x+h)^2+4]\cdot[x^2+4]} = 2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{[x^2+4] - [x^2+2xh+h^2+4]}{h\cdot[(x+h)^2+4]\cdot[x^2+4]}$$

$$= -2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(2xh+h^2)}{h\cdot[(x+h)^2+4]\cdot[x^2+4]} = -2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{(2xh)}{h\cdot[(x+h)^2+4]\cdot[x^2+4]} - 2\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h\cdot[(x+h)^2+4]\cdot[x^2+4]}$$

$$= -2\cdot\frac{1}{[x^2+4]}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{2xh}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{[(x+h)^2+4]} - 2\cdot\frac{1}{[x^2+4]}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{[(x+h)^2+4]}$$

$$= -2\cdot\frac{1}{[x^2+4]}\cdot 2x\cdot\frac{1}{[x^2+4]} - 2\cdot\frac{1}{[x^2+4]}\cdot 0\cdot\frac{1}{[x^2+4]} = -\frac{4x}{(x^2+4)^2}$$

Ahora calcularemos la derivada para $f(x) = x + \sqrt{x}$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h + \sqrt{x+h} - x - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} + \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \right) \right] = 1 + \lim_{h\to 0} \frac{[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}] \cdot [\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}{h \cdot [\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}$$

$$= 1 + \lim_{h\to 0} \frac{1}{[\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{[\sqrt{x+h} - \sqrt{x}] \cdot [\sqrt{x+h} + \sqrt{x}]}{h}$$

$$= 1 + \frac{1}{[\sqrt{x} + \sqrt{x}]} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{(x+h) - x}{h} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Ahora calcularemos la derivada para $f(x) = sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x+h) - sin(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{sin(x) \cdot cos(h) + sin(h) \cdot cos(x) - sin(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{sin(x) \cdot cos(h) - sin(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{sin(h) \cdot cos(x)}{h}$$

$$= sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{cos(h) - 1}{h} + cos(x) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{sin(h)}{h}$$

$$= sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{cos(h) - 1}{h} \right) \cdot \left(\frac{h}{h} \right) \right] + cos(x) \cdot 1$$

$$= sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{cos(h) - 1}{h^2} \right) \cdot h \right] + cos(x)$$

$$= sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{cos(h) - 1}{h^2} \right) + cos(x)$$

En el problema 2 de la ayudantía 2 calculamos el valor de $\lim_{h\to 0} \left(\frac{cos(h) - 1}{h^2} \right)$ el cual vale $\frac{1}{2}$

Por lo tanto:

$$sin(x) \cdot \lim_{h\to 0} h \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{cos(h) - 1}{h^2} \right) + cos(x) = cos(x)$$

Problema 4.

Lo primero que haremos será derivar a $f(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2$

$$f'(x) = 2 \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)' = 2 \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \cdot \left(x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{3}}\right)'$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{\frac{1}{2}-1} - \left(\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{1}{3}-1}\right]$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{1}{3}\right) x^{-\frac{4}{3}}\right]$$

$$= 2 \cdot \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) \cdot \left[\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{3 \cdot x\sqrt[3]{x}}\right]$$

Ahora lo que haremos será derivar a $g(y) = \dfrac{y^2 + 4y + 3}{\sqrt{y}}$

$$g'(y) = \frac{(y^2 + 4y + 3)' \cdot \sqrt{y} - (\sqrt{y})' \cdot (y^2 + 4y + 3)}{(\sqrt{y})^2} = \frac{(2y + 4) \cdot \sqrt{y} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (y^2 + 4y + 3)}{y}$$

$$= \frac{\frac{(2y+4)\cdot 2\sqrt{y}\cdot\sqrt{y}}{2\sqrt{y}} - \frac{1}{2\sqrt{y}} \cdot (y^2 + 4y + 3)}{y} = \frac{\frac{(2y+4)\cdot 2y}{2\sqrt{y}} - \frac{y^2+4y+3}{2\sqrt{y}}}{y} = \frac{\frac{4y^2+8y-y^2-4y-3}{2\sqrt{y}}}{y}$$

$$= \frac{3y^2 + 4y - 3}{2y\sqrt{y}}$$

Ahora, lo que haremos será derivar $h(x) = e^{x+1} + 1$

$$h'(x) = (e^{x+1} + 1)' = (e^{x+1})' + (1)' = (e^{x+1})' = e^{x+1} \cdot (x + 1)' = e^{x+1} \cdot 1 = e^{x+1}$$

Finalmente derivaremos $u(x) = \dfrac{x + 6}{x - 2}$

$$u'(x) = \frac{(x + 6)' \cdot (x - 2) - (x - 2)' \cdot (x + 6)}{(x - 2)^2} = \frac{1 \cdot (x - 2) - 1 \cdot (x + 6)}{(x - 2)^2} = \frac{(x - 2) - (x + 6)}{(x - 2)^2} = -8 \cdot \frac{1}{(x - 2)^2}$$

Problema 5.

Sea $f(x) = \sqrt[4]{x} = x^{\frac{1}{4}} \;\Rightarrow\; f'(x) = \frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{4}-1} = \frac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{4}}$

Notemos que la recta tangente esta determinada por $y = f'(1)(x-1) + f(1)$

Es fácil ver que $f'(1) = \frac{1}{4} \cdot 1^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}$ y que $f(1) = \sqrt[4]{1} = 1$

De este modo, la recta tangente esta determinada por:

$$y = \frac{1}{4}(x-1) + 1 = \frac{x}{4} - \frac{1}{4} + \frac{4}{4} = \frac{x}{4} + \frac{3}{4} = \frac{x+3}{4}$$

$$\boxed{y = \frac{x+3}{4}}$$

Problema 6.

Notemos que la recta normal al punto $(0,2)$ es $y = m(x-0)+2 = mx+2$ con m tal que $m \cdot f'(0) = -1$

Como $f(x) = x^4 + 2 \cdot e^x \;\Rightarrow\; f'(x) = 4x^3 + 2 \cdot e^x$

De este modo $f'(0) = 2$.

Como $m \cdot f'(0) = -1$ entonces $m = -\frac{1}{2}$

Finalmente la recta normal es:

$$\boxed{y = -\frac{x}{2} + 2}$$

Problema 7.

Lo primero que haremos será calcular $(5 \cdot f + g)'(10)$

$$(5 \cdot f + g)'(10) = 5 \cdot f'(10) + g'(10) = 5 \cdot \frac{1}{3} + 8 = \frac{5}{3} + \frac{24}{3} = \frac{29}{3}$$

$$(6 \cdot f \cdot g - 9 \cdot g)'(10) = 6 \cdot (f \cdot g)'(10) - 9 \cdot g'(10) = 6 \cdot [f(10) \cdot g'(10) + f'(10) \cdot g(10)] - 9 \cdot g'(10)$$

$$= 6 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cdot 8 + \frac{1}{3} \cdot 6 \right] - 9 \cdot 8 = 6 \cdot [-4+2] - 72 = 6 \cdot (-2) - 72 = -12 - 72 = -84$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(10)\cdot g(10) - f(10)\cdot g'(10)}{[g(10)]^2} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 6 - \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 8}{[6]^2} = \frac{2+4}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\left(\frac{1}{g} - \frac{g}{f}\right)'(10) = \left(\frac{1}{g}\right)'(10) - \left(\frac{g}{f}\right)'(10) = \left(\frac{(1)'\cdot g(10) - g'(10)\cdot 1}{[g(10)]^2}\right) - \left(\frac{g'(10)\cdot f(10) - g(10)\cdot f'(10)}{[f(10)]^2}\right)$$

$$= \left(\frac{0\cdot 6 - 8\cdot 1}{[6]^2}\right) - \left(\frac{8\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) - 6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)}{\left[-\frac{1}{2}\right]^2}\right) = -\frac{8}{36} - \frac{-4-2}{\frac{1}{4}} = -\frac{2}{9} + 6\cdot 4 = -\frac{2}{9} + \frac{24\cdot 9}{9} = -\frac{2}{9} + \frac{216}{9} = \frac{214}{9}$$

Problema 8.

Notemos que si existe una función $f(x)$ es derivable en $x = a$ entonces:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$$

con L un numero real.

De este modo:

$$\frac{\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)]}{\lim_{h\to 0} h} = L$$

Lo que implica que:

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] = L \cdot \lim_{h\to 0} h$$

Por lo tanto:

$$\lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] = 0$$

Ahora notemos lo siguiente:

$$0 = \lim_{h\to 0}[f(a+h) - f(a)] = \lim_{h\to 0} f(a+h) - \lim_{h\to 0} f(a) = \lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a)$$

Así tenemos que:

$$0 = \lim_{h\to 0} f(a+h) - f(a)$$

Que es lo mismo a decir que:

$$\lim_{h\to 0} f(a+h) = f(a)$$

Que es la definición de continuidad en el punto $x = a$

Ahora demostraremos la regla del producto. Sea $f(x) = u(x) \cdot g(x)$, entonces:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot g(x+h) - u(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot g(x+h) - u(x+h)\cdot g(x) + u(x+h)\cdot g(x) - u(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot g(x+h) - u(x+h)\cdot g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)\cdot g(x) - u(x)\cdot g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[u(x+h) \cdot \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \right] + \lim_{h\to 0} \left[g(x) \cdot \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} u(x+h) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right)$$

$$= u(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right)$$

Recordando la definición de derivada llegamos a que:

$$u(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) + g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) = u(x)\cdot g'(x) + u'(x)\cdot g(x)$$

Así finalmente obtenemos que:

$$\boxed{[u(x)\cdot g(x)]' = u(x)\cdot g'(x) + u'(x)\cdot g(x)}$$

Demostrando así la regla del producto.

Ahora demostraremos a la regla del cociente. Sea $f(x) = \dfrac{g(x)}{u(x)}$, entonces calcularemos su derivada:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x+h)}{u(x+h)} - \frac{g(x)}{u(x)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{g(x+h)\cdot u(x)}{u(x+h)\cdot u(x)} - \frac{g(x)\cdot u(x+h)}{u(x)\cdot u(x+h)}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x+h)}{u(x+h)\cdot u(x)\cdot h} = \lim_{h\to 0} \left[\left(\frac{g(x+h)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x+h)}{h} \right) \cdot \left(\frac{1}{u(x+h)\cdot u(x)} \right) \right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{u(x+h)\cdot u(x)} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{[u(x)]^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{[u(x)]^2} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x) + g(x)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x+h)}{h}$$

$$= \frac{1}{[u(x)]^2} \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x+h)}{h} \right)$$

$$= \frac{1}{[u(x)]^2} \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)\cdot u(x) - g(x)\cdot u(x)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{g(x)\cdot u(x+h) - g(x)\cdot u(x)}{h} \right)$$

$$= \frac{1}{[u(x)]^2} \cdot \left(\lim_{h\to 0} \left[u(x) \cdot \left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right) \right] - \lim_{h\to 0} \left[g(x) \cdot \left(\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right) \right] \right)$$

$$= \frac{1}{[u(x)]^2} \cdot \left(\lim_{h\to 0} u(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left[\frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right] - \lim_{h\to 0} g(x) \cdot \lim_{h\to 0} \left[\frac{u(x+h) - u(x)}{h} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{[u(x)]^2} \cdot [u(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot u'(x)] = \frac{u(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot u'(x)}{[u(x)]^2}$$

Finalmente se tiene que:

$$\boxed{\left(\frac{g(x)}{u(x)} \right)' = \frac{u(x)\cdot g'(x) - g(x)\cdot u'(x)}{[u(x)]^2}}$$

Demostrando así la regla del cociente.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 4

Derivación implícita y derivación logarítmica

1. Contenidos

Derivada de las funciones trigonométricas

·	$\frac{d}{dx}[sin(x)] = cos(x)$	$\frac{d}{dx}[csc(x)] = -csc(x) \cdot cot(x)$
·	$\frac{d}{dx}[cos(x)] = -sin(x)$	$\frac{d}{dx}[sec(x)] = sec(x) \cdot tan(x)$
·	$\frac{d}{dx}[tan(x)] = sec^2(x)$	$\frac{d}{dx}[cot(x)] = -csc^2(x)$

Regla de la cadena

Si g es derivable en x y f en $g(x)$, entonces la función compuesta $F = f\ o\ g$, definida mediante $F(x) = f(g(x))$, es derivable en x y F' esta dada por el producto:

· $$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

En notación de Leibniz, si tanto $y = f(u)$ como $u = g(x)$, son funciones diferenciables, por lo tanto:

· $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

Derivadas importantes

$\frac{d}{dx}[a^x] = a^x \cdot ln(a)$	$\frac{d}{dx}[ln(x)] = \frac{1}{x}$

Derivada de las funciones trigonométricas inversas

·	$\frac{d}{dx}[sin^{-1}(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}[csc^{-1}(x)] = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$
·	$\frac{d}{dx}[cos^{-1}(x)] = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{d}{dx}[sec^{-1}(x)] = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2-1}}$
·	$\frac{d}{dx}[tan^{-1}(x)] = \frac{1}{x^2+1}$	$\frac{d}{dx}[cot^{-1}(x)] = -\frac{1}{x^2+1}$

Pasos en la derivación logarítmica

1. Tome logaritmos naturales a ambos lados de una ecuación $y = f(x)$ y utilice las leyes de los logaritmos para simplificar

2. Derive implicitamente respecto a x

3. Resuelva la ecuación resultante para y'

Definición del numero e

$$e = \lim_{x \to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \qquad e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

2. Problemas

Problema 1. Deriva las siguientes funciones trigonométricas:

$$y = \frac{x}{2 - tan(x)} \qquad\qquad y = \frac{1 + sin(x)}{x + cos(x)}$$

Problema 2. Derive las siguientes funciones

$$y = \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^3 \qquad y = e^{-5x} \cdot cos(3x) \qquad y = e^{x \cdot cos(x)} \qquad y = x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) \qquad y = a^x$$

Problema 3. Encuentre los puntos de la curva con ecuación $(x^2+y^2)^2 = 8 \cdot (x^2 - y^2)$, en los cuales las rectas tangentes son horizontales.

Problema 4. Encuentre $\frac{dy}{dx}$ por derivación implícita $\qquad e^{x^2 \cdot y} = x + y$

Problema 5. Suponga que f es una función derivable uno a uno y que su función inversa f^{-1} también es derivable. Utilice la derivación implicita para demostrar que:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre que el numerador no sea 0

Problema 6. Encuentre la derivada de las siguientes funciones. Simplifique cuando pueda.

$$y = tan^{-1}(x - \sqrt{1+x^2}) \qquad\qquad y = tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$$

Problema 7. Aplique la derivación logarítmica para encontrar la derivada de las siguientes funciones

$$y = x^x \qquad\qquad y = sin(x)^{cos(x)} \qquad\qquad x^y = y^x$$

Problema 8. Use la definición de derivada para demostrar que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1$$

3. Soluciones

Problema 1.

Sea $f(x) = \dfrac{x}{2 - tan(x)}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot [2 - tan(x)] - x \cdot [2 - tan(x)]'}{[2 - tan(x)]^2} = \frac{[2 - tan(x)] - x \cdot [-sec^2(x)]}{[2 - tan(x)]^2} = \frac{2 - tan(x) + x \cdot sec^2(x)}{[2 - tan(x)]^2}$$

Sea $f(x) = \dfrac{1 + sin(x)}{x + cos(x)}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{[1 + sin(x)]'[x + cos(x)] - [1 + sin(x)][x + cos(x)]'}{[x + cos(x)]^2} = \frac{cos(x)[x + cos(x)] - [1 + sin(x)][1 - sin(x)]}{[x + cos(x)]^2}$$

$$= \frac{cos(x) \cdot x + cos^2(x) - [1 - sin^2(x)]}{[x + cos(x)]^2} = \frac{cos(x) \cdot x + cos^2(x) - 1 + sin^2(x)}{[x + cos(x)]^2}$$

$$= \frac{cos(x) \cdot x + [cos^2(x) + sin^2(x)] - 1}{[x + cos(x)]^2} = \frac{cos(x) \cdot x + 1 - 1}{[x + cos(x)]^2} = \frac{cos(x) \cdot x}{[x + cos(x)]^2}$$

Problema 2.

Sea $f(x) = \left(\dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^3$, entonces:

$$f'(x) = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)' = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2 \cdot \left(\frac{[x^2 + 1]'[x^2 - 1] - [x^2 + 1][x^2 - 1]'}{[x^2 - 1]^2}\right)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2 \cdot \left(\frac{2x[x^2 - 1] - [x^2 + 1]2x}{[x^2 - 1]^2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2 \cdot 2x \cdot \left(\frac{[x^2 - 1] - [x^2 + 1]}{[x^2 - 1]^2}\right)$$

$$= 3 \cdot \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}\right)^2 \cdot 2x \cdot \left(\frac{-2}{[x^2 - 1]^2}\right) = -12 \cdot \frac{(x^2 + 1)^2 \cdot x}{(x^2 - 1)^4}$$

Sea $f(x) = e^{-5x} \cdot cos(3x)$, entonces:

$$f'(x) = e^{-5x} \cdot [cos(3x)]' + [e^{-5x}]' \cdot cos(3x) = e^{-5x} \cdot [-sin(3x)] \cdot (3x)' + [e^{-5x}] \cdot (-5x)' \cdot cos(3x)$$

$$= e^{-5x} \cdot [-sin(3x)] \cdot 3 + [e^{-5x}] \cdot (-5) \cdot cos(3x) = -3 \cdot e^{-5x} \cdot sin(3x) - 5 \cdot e^{-5x} \cdot cos(3x)$$

Sea $f(x) = e^{x \cdot cos(x)}$, entonces:

$$f'(x) = e^{x \cdot cos(x)} \cdot [x \cdot cos(x)]' = e^{x \cdot cos(x)} \cdot [(x)' \cdot cos(x) + x \cdot cos(x)'] = e^{x \cdot cos(x)} \cdot [cos(x) + x \cdot (-sin(x))]$$

$$= e^{x \cdot cos(x)} \cdot [cos(x) - x \cdot sin(x)]$$

Sea $f(x) = x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right)$, entonces:

$$f'(x) = (x)' \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot \left[sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]' = sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{x}\right]'$$

$$= sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)\left[x^{-1}\right]' = sin\left(\frac{1}{x}\right) + x \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)\left[(-1) \cdot x^{-2}\right] = sin\left(\frac{1}{x}\right) - x \cdot cos\left(\frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{x^2}\right]$$

$$= sin\left(\frac{1}{x}\right) - cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)$$

Sea $f(x) = a^x$

Notemos que $a^x = e^{ln(a^x)} = e^{x \cdot ln(a)}$

Por lo tanto:

$f(x) = e^{x \cdot ln(a)}$

De este modo:

$$f'(x) = e^{x \cdot ln(a)} \cdot [x \cdot ln(a)]' = e^{x \cdot ln(a)} \cdot ln(a) = a^x \cdot ln(a)$$

Problema 3.

Lo primero que tenemos que hacer es calcular la derivada implícita. Al reemplazar $y = y(x)$ en la ecuación, enemos que:

$$(x^2 + [y(x)]^2)^2 = 8 \cdot (x^2 - [y(x)]^2)$$

Derivando a ambos lados, obtenemos que:

$$2 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot (x^2 + [y(x)]^2)' = 8 \cdot [2x - 2y(x)y'(x)]$$

$$2 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot [2x + 2y(x)y'(x)] = 8 \cdot [2x - 2y(x)y'(x)]$$

$$2 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot [2x] + 2 \cdot 2 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot y(x) \cdot y'(x) = 8 \cdot [2x] - 8 \cdot 2y(x) \cdot y'(x)]$$

$$4 \cdot x \cdot (x^2 + [y(x)]^2) + 4 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot y(x) \cdot y'(x) = 16 \cdot x - 16 \cdot y(x) \cdot y'(x)$$

De esta forma, despejaremos $y'(x)$

$$4 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot y(x) \cdot y'(x) + 16 \cdot y(x) \cdot y'(x) = 16 \cdot x - 4 \cdot x \cdot (x^2 + [y(x)]^2)$$

$$y'(x) \cdot [4 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot y(x) + 16 \cdot y(x)] = 4 \cdot x \cdot [4 - (x^2 + [y(x)]^2)]$$

$$y'(x) = \frac{4 \cdot x \cdot [4 - (x^2 + [y(x)]^2)]}{[4 \cdot (x^2 + [y(x)]^2) \cdot y(x) + 16 \cdot y(x)]}$$

Volviendo a reemplazar $y = y(x)$ obtenemos que:

$$y'(x) = \frac{4 \cdot x \cdot [4 - (x^2 + y^2)]}{[4 \cdot (x^2 + y^2) \cdot y + 16 \cdot y]} = \frac{4x \cdot [4 - (x^2 + y^2)]}{4y \cdot [(x^2 + y^2) + 4]}$$

Los puntos donde las rectas tangentes son horizontales son aquellos en donde $y'(x) = 0$, es decir cuando:

$$\frac{4x \cdot [4 - (x^2 + y^2)]}{4y \cdot [(x^2 + y^2) + 4]} = 0$$

Lo primero que debemos notar es que acá no consideraremos el caso en que $y \neq 0$

De este modo, para que $y'(x) = 0$ sin considerar el caso en que $y = 0$ debe ocurrir que:

$$4x \cdot [4 - (x^2 + y^2)] = 0$$

Por lo tanto, tenemos dos casos:

$x = 0$ (1)

$4 - (x^2 + y^2) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ (2)

De esta manera, del primer caso se obtiene que los puntos en donde las tangentes son horizontales son aquellos en los que $x = 0$, sin considerar cuando $y = 0$.

Del segundo caso se obtiene que los puntos en donde las tangentes son horizontales son aquellos que pertenecen a la circunferencia de radio 2 centrada en el origen, sin considerar los puntos $(2, 0)$ y $(-2, 0)$.

Problema 4.

Tenemos la ecuación:

$$e^{x^2 \cdot y} = x + y$$

Reemplazaremos con $y = y(x)$

$$e^{x^2 \cdot y(x)} = x + y(x)$$

Ahora derivaremos respecto a x en ambos lados

$$e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot [x^2 \cdot y(x)]' = 1 + y'(x)$$

$$e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot [(x^2) \cdot y'(x) + (x^2)' \cdot y(x)] = 1 + y'(x)$$

$$e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot [x^2 \cdot y'(x) + 2x \cdot y(x)] = 1 + y'(x)$$

$$e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot [x^2 \cdot y'(x)] + e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot 2x \cdot y(x) = 1 + y'(x)$$

$$e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot x^2 \cdot y'(x) - y'(x) = 1 - e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot 2x \cdot y(x)$$

$$y'(x) \cdot [e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot x^2 - 1] = 1 - e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot 2x \cdot y(x)$$

$$y'(x) = \frac{1 - e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot 2x \cdot y(x)}{e^{x^2 \cdot y(x)} \cdot x^2 - 1}$$

Ahora, reemplazaremos $y(x) = y(x)$ y $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$

De esta forma, nos queda que:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1 - 2 \cdot e^{x^2 \cdot y} \cdot x \cdot y}{e^{x^2 \cdot y} \cdot x^2 - 1}}$$

Problema 5.

Notemos que por propiedades de la función inversa tenemos que:

$$f(f^{-1}(x)) = x$$

De este modo, si derivamos a ambos lados, obtenemos que:

$$\frac{d(f(f^{-1}(x)))}{dx} = \frac{dx}{dx}$$

Lo que implica que:

$$\frac{d(f(f^{-1}(x)))}{dx} = 1$$

Ahora notemos que por regla de la cadena:

$$\frac{d(f(f^{-1}(x)))}{dx} = \frac{d(f(f^{-1}(x)))}{df^{-1}(x)} \cdot \frac{df^{-1}(x)}{dx}$$

Sea $u = f^{-1}(x)$, entonces:

$$\frac{d(f(f^{-1}(x)))}{df^{-1}(x)} \cdot \frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{d(f(u))}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot \frac{du}{dx}$$

De este modo:

$$f'(u) \cdot \frac{du}{dx} = 1$$

Ahora recordando que $u = f^{-1}(x)$ y reemplazando, obtenemos que:

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot \frac{df^{-1}(x)}{dx} = 1$$

De este modo:

$$\frac{df^{-1}(x)}{dx} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Que es lo mismo que:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

siempre y cuando el denominador no sea 0

Problema 6.

Lo primero que haremos será encontrar la derivada de $y = tan^{-1}(x - \sqrt{1+x^2})$

$$y'(x) = \frac{1}{(1+[x-\sqrt{1+x^2}]^2)} \cdot [x - \sqrt{1+x^2}]' = \frac{1}{(1+[x-\sqrt{1+x^2}]^2)} \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} \cdot (1+x^2)'\right]$$

$$= \frac{1}{(1+[x-\sqrt{1+x^2}]^2)} \cdot \left[1 - \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1+x^2}} \cdot 2x\right] = \frac{1}{(1+[x-\sqrt{1+x^2}]^2)} \cdot \left[1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right]$$

Ahora calcularemos la derivada de $y = tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)$

De este modo:

$$y'(x) = \frac{1}{\left(1 + \left[\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right]^2\right)} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)' = \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{1-x}{1+x}\right]\right)} \cdot \left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)'$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{1-x}{1+x}\right]\right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{1-x}{1+x}\right)' = \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{1-x}{1+x}\right]\right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{(1-x)'(1+x) - (1+x)'(1-x)}{(1+x)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\left(1 + \left[\frac{1-x}{1+x}\right]\right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{(-1) \cdot (1+x) - 1 \cdot (1-x)}{(1+x)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(1 + \left[\frac{1-x}{1+x}\right]\right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{(1+x) + (1-x)}{(1+x)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(1 + \left[\frac{1-x}{1+x}\right]\right)} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \left(\frac{2}{(1+x)^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{1+x}{1+x} + \frac{1-x}{1+x}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$= -\frac{1}{\left(\frac{2}{1+x}\right)} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{(1+x)}{2} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{2\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{1+x}}$$

$$= -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{(1-x)(1+x)}} = -\frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}}$$

Problema 7.

Tenemos la función:

$$y = x^x$$

Reemplazamos con $y = y(x)$

$$y(x) = x^x$$

Aplicamos logaritmo a ambos lados:

$$ln[y(x)] = ln(x^x) = x \cdot ln(x)$$

Ahora derivamos a ambos lados:

$$(ln[y(x)])' = [x \cdot ln(x)]' \ (*)$$

Notemos que:

$$(ln[y(x)])' = \frac{1}{y(x)} \cdot y'(x) = \frac{y'(x)}{y(x)} \quad (1)$$

Además tenemos que:

$$(x \cdot ln(x))' = (x)' \cdot ln(x) + x \cdot (ln(x))' = ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = ln(x) + 1 \quad (2)$$

Reemplazando (1) y (2) en $(*)$ y obtenemos que:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = ln(x) + 1$$

De este modo:

$$y'(x) = y(x) \cdot [ln(x) + 1]$$

Como $y(x) = x^x$, entonces tenemos que:

$$y'(x) = y(x) \cdot [ln(x) + 1] = x^x \cdot [ln(x) + 1]$$

Así finalmente tenemos que:

$$\boxed{y'(x) = x^x \cdot [ln(x) + 1]}$$

Tenemos la siguiente función:

$$y = sin(x)^{cos(x)}$$

Reemplazamos con $y = y(x)$ y obtenemos que:

$$y(x) = sin(x)^{cos(x)}$$

Ahora aplicamos logaritmo a ambos lados:

$$ln([y(x)]) = ln[sin(x)^{cos(x)}] = cos(x) \cdot ln[sin(x)]$$

Ahora derivamos a ambos lados y obtenemos que:

$$(ln[y(x)])' = (cos(x) \cdot ln[sin(x)])'$$

Del ejercicio anterior sabemos que $(ln[y(x)])' = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$

De este modo, tenemos que:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = (cos(x) \cdot ln[sin(x)])' = [cos(x)]' \cdot ln[sin(x)] + cos(x) \cdot (ln[sin(x)])'$$

$$= -sin(x) \cdot ln[sin(x)] + cos(x) \cdot \frac{1}{sin(x)} \cdot [sin(x)]' = -sin(x) \cdot ln[sin(x)] + cos(x) \cdot \frac{1}{sin(x)} \cdot cos(x)$$

$$= -sin(x) \cdot ln[sin(x)] + \frac{cos^2(x)}{sin(x)}$$

De esta forma, obtenemos que:

$$\frac{y'(x)}{y(x)} = -sin(x) \cdot ln[sin(x)] + \frac{cos^2(x)}{sin(x)}$$

De este modo:

$$y'(x) = y(x) \cdot \left(-sin(x) \cdot ln[sin(x)] + \frac{cos^2(x)}{sin(x)} \right)$$

Y como $y(x) = sin(x)^{cos(x)}$, finalmente se obtiene que:

$$\boxed{y'(x) = sin(x)^{cos(x)} \cdot \left(-sin(x) \cdot ln[sin(x)] + \frac{cos^2(x)}{sin(x)} \right)}$$

Tenemos la ecuación:

$$x^y = y^x$$

Reemplazamos con $y = y(x)$

$$x^{y(x)} = [y(x)]^x$$

Ahora aplicamos logaritmo a ambos lados obteniendo:

$$ln(x^{y(x)}) = ln([y(x)]^x)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos obtenemos que:

$$y(x) \cdot ln(x) = x \cdot ln([y(x)])$$

Derivamos ambos lados de la ecuación, obteniendo:

$$[y(x) \cdot ln(x)]' = [x \cdot ln([y(x)])]'$$

$$y(x) \cdot [ln(x)]' + y'(x) \cdot ln(x) = (x)' \cdot ln([y(x)]) + x \cdot [ln([y(x)])]'$$

$$y(x) \cdot \frac{1}{x} + y'(x) \cdot ln(x) = ln([y(x)]) + x \cdot [ln([y(x)])]'$$

Ahora recordando que del ejercicio anterior teníamos que $[ln([y(x)])]' = \dfrac{y'(x)}{y(x)}$ y reemplazando obtenemos que:

$$y(x) \cdot \frac{1}{x} + y'(x) \cdot ln(x) = ln([y(x)]) + x \cdot \frac{y'(x)}{y(x)}$$

Ahora despejaremos $y'(x)$

$$y'(x) \cdot ln(x) - \frac{x \cdot y'(x)}{y(x)} = ln([y(x)]) - \frac{y(x)}{x}$$

$$\frac{y'(x) \cdot ln(x) \cdot y(x)}{y(x)} - \frac{x \cdot y'(x)}{y(x)} = \frac{x \cdot ln([y(x)])}{x} - \frac{y(x)}{x}$$

$$\frac{y'(x) \cdot ln(x) \cdot y(x) - x \cdot y'(x)}{y(x)} = \frac{x \cdot ln([y(x)]) - y(x)}{x}$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)} \cdot [ln(x) \cdot y(x) - x] = \frac{[x \cdot ln([y(x)]) - y(x)]}{x}$$

$$y'(x) = \frac{[x \cdot ln([y(x)]) - y(x)] \cdot y(x)}{x \cdot [ln(x) \cdot y(x) - x]}$$

Finalmente volveremos a reemplazar con $y(x) = y$

$$\boxed{y'(x) = \frac{[x \cdot ln(y) - y] \cdot y}{x \cdot [ln(x) \cdot y - x]}}$$

Problema 8.

Notemos que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{ln(1+h)}{h}$

Y como $ln(1) = 0$, entonces:

$$\lim_{h \to 0} \frac{ln(1+h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ln(1+h) - ln(1)}{h}$$

Ahora definiremos $f(x) = ln(x)$, de este modo:

$$\lim_{h \to 0} \frac{ln(1+h) - ln(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1)$$

Ahora como $f(x) = ln(x) \ \Rightarrow \ f'(x) = \dfrac{1}{x} \ \Rightarrow \ f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$

Así tenemos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = f'(1) = 1$$

Y finalmente se demostró que:

$$\boxed{\lim_{x \to 0} \frac{ln(1+x)}{x} = 1}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 5

Razones de cambio, relaciones afines, funciones hiperbólicas

1. Contenidos

Razones de cambio aplicadas a la física

Sea $f(t)$ la posición de una partícula en el tiempo t, entonces la velocidad $v(t)$ se define como la razón de cambio de la posición con respecto al tiempo, es decir:

$$v(t) = \frac{df}{dt}$$

Mientras que la aceleración $a(t)$ se define como la razon de cambio de la velocidad con respecto al tiempo, es decir:

$$a(t) = \frac{dv}{dt}$$

Crecimiento y decaimiento exponencial

Sea $y(t)$ el valor de una cantidad y en el tiempo t y si la razón de cambio de y con respecto a t es proporcional a su tamaño $y(t)$ en cualquier tiempo, entonces:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

La única solución de esta ecuación diferencial es:

$$y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$$

Si $k > 0$ se denomina **crecimiento exponencial** y si $k < 0$ se denomina **decrecimiento exponencial**

Definición de las funciones hiperbólicas

·	$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	$csch(x) = \frac{1}{sinh(x)}$
·	$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	$sech(x) = \frac{1}{cosh(x)}$
·	$tanh(x) = \frac{sinh(x)}{cosh(x)}$	$coth(x) = \frac{cosh(x)}{sinh(x)}$

Identidades hiperbólicas

·	$sinh(-x) = -sinh(x)$	$csch(-x) = cosh(x)$
·	$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$	$1 - tanh^2(x) = sech^2(x)$
·	$sinh(x+y) = sinh(x) \cdot cosh(y) + sinh(y) \cdot cosh(x)$	
·	$cosh(x+y) = cosh(x) \cdot cosh(y) + sinh(x) \cdot sinh(y)$	

Derivadas de las funciones hiperbólicas

·	$\frac{d}{dx}(sinh(x)) = cosh(x)$	$\frac{d}{dx}(csch(x)) = -csch(x) \cdot coth(x)$
·	$\frac{d}{dx}(cosh(x)) = sinh(x)$	$\frac{d}{dx}(sech(x)) = -sech(x) \cdot tanh(x)$
·	$\frac{d}{dx}(tanh(x)) = sech^2(x)$	$\frac{d}{dx}(coth(x)) = -csch^2(x)$

Linealización de una función

Se llama **linealización** de una función en a, cuando esta es aproximada por su recta tangente al punto $(a, f(a))$. Es decir:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

De este modo la linealización de una función f esta dada por:

$$L(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x - a)$$

Polinomio de Taylor

Se denomina polinomio de Taylor de grado n centrado en a al polinomio de grado n que aproxima a la función f en el punto $(a, f(a))$, y este esta dado por:

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^i(a) \cdot (x-a)^i}{i!}$$

2. Problemas

Problema 1. Una partícula se mueve según la ley del movimiento $s = f(t) = t^3 - 12 \cdot t^2 + 36 \cdot t,\ t \geq 0$ en donde t se mide en segundos y s en metros. Encuentre la velocidad y aceleración en función del tiempo. ¿Cuando aumenta su rapidez? ¿Cuando disminuye su rapidez?

Problema 2. La cantidad de carga Q en coulumbs(C) que ha pasado por un punto de un alambre hasta el tiempo t (medido en segundos) se expresa con $Q(t) = t^3 - 2 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 2$. Encuentre la corriente cuando (a) $t = 0{,}5s$ (b) $t = 1s$ **Hint:** $I = \dfrac{dQ}{dt}$

Problema 3. Los experimentos muestran que si la reacción química:

$$N_2O_5 \rightarrow 2 \cdot NO_2 + \tfrac{1}{2} \cdot O_2$$

se realiza a 45^oC, la velocidad de reacción del pentóxido de nitrógeno es proporcional a su concentración como sigue:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0{,}0005[N_2O_5]$$

(a) Hallar una expresión para la concentración $[N_2O_5]$ después de t segundos si la concentración inicial es C.

(b) ¿Cuánto tiempo ha de transcurrir para reducir la concentración de N_2O_5 a 90 % de su valor original?

Problema 4. Un deposito de agua tiene la forma de un cono circular invertido; el radio de la base es de 2 m y la altura es de 4 m. Si el agua se bombea hacia el deposito a una razon de 3 $\frac{m^3}{min}$, determine la rapidez a la cual el nivel del agua sube cuando el agua tiene 3 m de profundidad.

Problema 5. Un carabinero está parado a 30 metros de distancia de una carretera recta. Con su radar portátil determina que un auto se está desplazando por la carretera, acercándose al carabinero, en el momento en que esta a 50 metros de él, la distancia disminuye a una tasa de variación instantánea de $70\frac{km}{h}$. ¿Cual es la velocidad del auto (en $\frac{km}{h}$)?

Problema 6. Encuentre la derivada de:

$$G(x) = \frac{1 - cosh(x)}{1 + cosh(x)} \qquad\qquad y = e^{cosh(3x)}$$

Problema 7. Encuentre la aproximación lineal de la función $g(x) = \sqrt[3]{1+x}$ en $a = 0$ y aplíquela para hacer una aproximación a los números $\sqrt[3]{0{,}95}$ y $\sqrt[3]{1{,}1}$

Problema 8. Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 de la función $cosh(x)$

3. Soluciones

Problema 1.

La rapidez se define de la siguiente manera:

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{df(t)}{dt} = f'(t) = (t^3 - 12 \cdot t^2 + 36 \cdot t)' = 3 \cdot t^2 - 12 \cdot 2 \cdot t + 36 = 3 \cdot t^2 - 24 \cdot t + 36$$

De este modo:

$$\boxed{v(t) = 3 \cdot t^2 - 24 \cdot t + 36}$$

Y la aceleración se define de la siguiente manera:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = [v(t)]' = (3 \cdot t^2 - 24 \cdot t + 36)' = 3 \cdot 2 \cdot t - 24 = 6t - 4$$

De este modo:

$$\boxed{a(t) = 6t - 4}$$

Su rapidez aumenta cuando la derivada de la rapidez es mayor que 0 o dicho de otra forma, la aceleración es mayor que 0.

$$a(t) > 0 \ \Rightarrow \ 6t - 4 > 0 \ \Rightarrow \ 6t > 4 \ \Rightarrow \ t > \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto en el intervalo $\left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$ la rapidez aumenta.

Su rapidez disminuye cuando la derivada de la rapidez es menor que 0 o dicho de otra forma, la aceleración es menor que 0.

$$a(t) < 0 \ \Rightarrow \ 6t - 4 < 0 \ \Rightarrow \ 6t < 4 \ \Rightarrow \ t < \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Por lo tanto en el intervalo $\left(-\infty, \frac{2}{3}\right)$ la rapidez disminuye.

Problema 2.

Lo primero que debemos hacer es calcular la corriente en función del tiempo:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = (Q)' = (t^3 - 2 \cdot t^2 + 6 \cdot t + 2)' = 3 \cdot t^2 - 2 \cdot 2 \cdot t + 6 = 3 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 6$$

De este modo:

$$\boxed{I(t) = 3 \cdot t^2 - 4 \cdot t + 6}$$

a) $I\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} + 6 = \frac{3}{4} - 2 + 6 = \frac{3}{4} + 4 = \frac{3}{4} + \frac{16}{4} = \frac{19}{4}$

b) $I(1) = 3 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 6 = 3 - 4 + 6 = 9 - 4 = 5$

Problema 3.

La ecuación que tenemos es:

$$-\frac{d[N_2O_5]}{dt} = 0{,}0005[N_2O_5] \;\Rightarrow\; \frac{d[N_2O_5]}{dt} = -0{,}0005[N_2O_5]$$

Sea $y = [N_2O_5]$ y $k = -0{,}0005$, de este modo:

$$\frac{dy}{dt} = k \cdot y$$

Recordemos que la solución de esta ecuación diferencial es $y(t) = y_0 \cdot e^{kt}$

(a) Si la concentración inicial es C, entonces:

$$y(t) = C \cdot e^{kt} = C \cdot e^{-0{,}0005t}$$

Y como $y = [N_2O_5]$, entonces:

$$[N_2O_5](t) = C \cdot e^{-0{,}0005t}$$

(b) Buscamos en primer lugar un t' tal que:

$$[N_2O_5](t') = C \cdot 0{,}9$$

Y como $[N_2O_5](t) = C \cdot e^{-0{,}0005t'}$

De este modo:

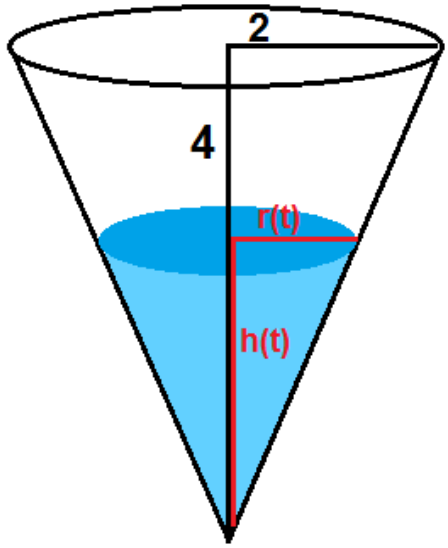
$$C \cdot e^{-0{,}0005t'} = C \cdot 0{,}9 \;\Rightarrow\; e^{-0{,}0005t'} = 0{,}9 \;\Rightarrow\; ln[e^{-0{,}0005t'}] = ln(0{,}9)$$

$$\Rightarrow\; -0{,}0005t' = ln(0{,}9) \;\Rightarrow\; t' = -\frac{ln(0{,}9)}{0{,}0005}$$

Por lo tanto, deben transcurrir $-\frac{ln(0,9)}{0,0005}$ para que la concentración de $[N_2O_5]$ se reduzca al 90 % de su original.

Problema 4.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



Notemos que:

$$V(t) = \frac{1}{3} \cdot [r(t)]^2 \cdot \pi \cdot h(t)$$

Por semejanza de triángulos tenemos que:

$$\frac{2}{4} = \frac{r(t)}{h(t)} \Rightarrow r(t) = \frac{h(t)}{2}$$

Por lo tanto:

$$V(t) = \frac{\pi}{3} \cdot \left(\frac{h(t)}{2}\right)^2 \cdot h(t) = \frac{\pi}{12} \cdot [h(t)]^3$$

$$V(t) = \frac{\pi}{12} \cdot [h(t)]^3$$

Derivaremos ambos lados por el tiempo y obtenemos que:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot [h(t)]^2 \cdot \frac{dh(t)}{dt} = \frac{3 \cdot \pi}{12} \cdot [h(t)]^2 \cdot \frac{dh(t)}{dt} = \frac{\pi}{4} \cdot [h(t)]^2 \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dV(t)}{dt} = \frac{\pi}{4} \cdot [h(t)]^2 \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

Nos dicen que $\dfrac{dV(t)}{dt} = 3 \cdot \left[\frac{m^3}{min}\right]$ y que $h(t) = 3[m]$

Por lo tanto:

$$\Rightarrow \ 3 \cdot \left[\frac{m^3}{min}\right] = \frac{\pi}{4} \cdot 9[m^2] \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

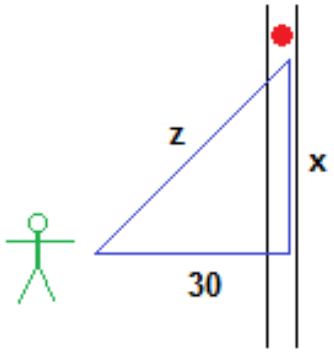
Así despejando, obtenemos que:

$$\boxed{\frac{dh(t)}{dt} = \frac{4}{3 \cdot \pi} \ \left[\frac{m}{min}\right]}$$

De esta manera, el agua sube a una tasa de $\frac{4}{3 \cdot \pi} \ \left[\frac{m}{min}\right]$

Problema 5.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



La persona de verde es el carabinero y el punto rojo es el auto.

Por teorema de pitagoras tenemos que:

$$30^2 + [x(t)]^2 = [z(t)]^2$$

Derivaremos ambos lados respecto a t quedandonos que:

$$2 \cdot x(t) \cdot \frac{dx}{dt} = 2 \cdot z(t) \cdot \frac{dz}{dt} \ \Rightarrow \ x(t) \cdot \frac{dx}{dt} = z(t) \cdot \frac{dz}{dt}$$

De los datos del problema obtenemos que: $\frac{dz}{dt} = -70 \left[\frac{km}{h}\right]$ y que $z(t) = 50[m]$

Utilizando el teorema de pitagoras $(30^2 + [x(t)]^2 = [z(t)]^2)$, tenemos que $x(t) = 40[m]$

De este modo, nos queda que:

$$40[m] \cdot \frac{dx}{dt} = 50[m] \cdot \left(-70 \left[\frac{km}{h}\right]\right)$$

Despejando $\frac{dx}{dt}$ obtenemos que:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{175}{2}\left[\frac{km}{h}\right]$$

Y justamente la velocidad del auto por el grafico se ve que será $-\frac{dx}{dt}$

Así se obtiene finalmente que la velocidad del automovil sería de $\frac{175}{2}\left[\frac{km}{h}\right]$.

Problema 6.

$$G'(x) = \left(\frac{1-cosh(x)}{1+cosh(x)}\right)' = \frac{[1-cosh(x)]'[1+cosh(x)] - [1-cosh(x)][1+cosh(x)]'}{[1+cosh(x)]^2}$$

$$= \frac{[-sinh(x)][1+cosh(x)] - [1-cosh(x)]sinh(x)}{[1+cosh(x)]^2} = \frac{-sinh(x)[1+cosh(x)] + [cosh(x)-1]sinh(x)}{[1+cosh(x)]^2}$$

$$= \frac{-sinh(x) - sinh(x)\cdot cosh(x) + cosh(x)\cdot sinh(x) - sinh(x)}{[1+cosh(x)]^2} = -\frac{2\cdot sinh(x)}{[1+cosh(x)]^2}$$

$$y'(x) = [e^{cosh(3x)}]' = e^{cosh(3x)} \cdot [cosh(3x)]' = e^{cosh(3x)} \cdot [sinh(3x)] \cdot (3x)' = e^{cosh(3x)} \cdot sinh(3x) \cdot 3$$

$$= 3 \cdot sinh(3x) \cdot e^{cosh(3x)}$$

Problema 7.

Sea $g(x) = \sqrt[3]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{3}} \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{1}{3}\cdot(1+x)^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}\cdot(1+x)^{-\frac{2}{3}}$

Ahora la aproximación lineal centrada en 0 de $g(x)$ vendría dada por $g(0) + g'(0)\cdot x$

Notemos que $g'(0) = \frac{1}{3}\cdot(1+0)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}$ y que $g(0) = (1+0)^{\frac{1}{3}} = 1$

De este modo, la aproximación lineal viene dada por:

$$y = 1 + \frac{1}{3}\cdot x = \frac{3}{3} + \frac{x}{3} = \frac{x+3}{3}$$

Así decimos que:

$$\sqrt[3]{x+1} \approx \frac{x+3}{3}$$

De esta forma:

$$\sqrt[3]{0{,}95} = \sqrt[3]{1-0{,}05} \approx \frac{3-0{,}05}{3} = \frac{2{,}95}{3}$$

$$\sqrt[3]{1{,}1} = \sqrt[3]{1+0{,}1} \approx \frac{3+0{,}1}{3} = \frac{3{,}1}{3}$$

Problema 8.

Sea $f(x)$ una función. El polinomio de grado 3 centrado en 0 viene dado por:

$$f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2} + \frac{f'''(0) \cdot x^3}{6}$$

Si $f(x) = cosh(x) \;\Rightarrow\; f'(x) = sinh(x) \;\Rightarrow\; f''(x) = cosh(x) \;\Rightarrow\; f'''(x) = sinh(x)$

De este modo:

$f(0) = cosh(0) = 1$

$f'(0) = sinh(0) = 0$

$f''(0) = cosh(0) = 1$

$f'''(0) = sinh(0) = 0$

Así tenemos que el polinomio de grado 3 centrado en 0 viene dado por:

$$1 + 0 \cdot x + \frac{1 \cdot x^2}{2} + \frac{0 \cdot x^3}{6} = 1 + \frac{x^2}{2}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 6

Valores máximos y mínimos, Teorema del valor medio

1. Contenidos

Definición

Una función f tiene un **máximo absoluto** (o **máximo global**) en c si $f(c) \geq f(x)$ para todo x en D, donde D es el dominio de f. El número $f(c)$ se llama **valor máximo** de f en D. De manera análoga, f tiene un **mínimo absoluto** en c si $f(c) \leq f(x)$ para todo x en D. El número $f(c)$ se denomina **valor mínimo** de f en D. Los valores máximo y mínimo de f se conocen como **valores extremos** de f.

Definición

Una función f posee un **máximo local** (o **máximo relativo**) en c si $f(c) \geq f(x)$ cuando x está cercano a c. [Esto significa que $f(c) \geq f(x)$ para todo x en algún intervalo abierto que contiene a c]. De manera análoga, f tiene un **mínimo local** en c si $f(c) \leq f(x)$ cuando x está cerca de c.

Teorema del Valor Extremo

Si f es continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f alcanza un valor máximo absoluto $f(c)$ y un valor mínimo absoluto $f(d)$ en algunos números c y d en $[a, b]$.

Teorema de Fermat

Si f tiene un máximo o mínimo local en c, y si $f'(c)$ existe, entonces $f'(c) = 0$.

Definición

Un **número critico** de una función f es un número c en el dominio de f tal que $f'(c) = 0$ o $f'(c)$ no existe.

Definición

Si f tiene un máximo o mínimo local en c, entonces c es un número crítico de f.

Método del intervalo cerrado

Para hallar los valores máximo y mínimo absoluto de una función f continua sobre un intervalo cerrado $[a, b]$:

1. Encuentre los valores de f en los números críticos de f en (a, b).
2. Halle los valores de f en los puntos extremos del intervalo.
3. El más grande de los valores de los pasos 1 y 2 es el máximo absoluto, mientras que el más pequeño es el mínimo absoluto.

Teorema de Rolle

Sea f una función que satisface las siguientes 3 hipótesis:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).
3. $f(a) = f(b)$.

Entonces hay un número c en (a, b) tal que: $f'(c) = 0$

Teorema del valor medio

Sea f una función que cumple con las hipótesis siguientes:

1. f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$.
2. f es derivable en el intervalo abierto (a, b).

Entonces hay un número c en (a, b) tal que:

. $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Prueba Creciente/Decreciente

(a) Si $f'(x) > 0$ sobre un intervalo, entonces f es creciente en ese intervalo.
(b) Si $f'(x) < 0$ sobre un intervalo, entonces f es decreciente en ese intervalo.

Prueba de la primera derivada

Suponga que c es un número crítico de una función continua f.

(a) Si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c.
(b) Si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c.
(c) Si f' no cambia de signo en c (es decir, f' en ambos lados de c, o negativa en ambos lados), entonces f no tiene máximo ni mínimos locales en c.

Prueba de la concavidad

(a) Si $f''(x) > 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre I.
(b) Si $f''(x) < 0$ para todo x en I, entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo sobre I.

Definición

Un punto P en una curva $y = f(x)$ recibe el nombre de **punto de inflexión** si f es continua ahí y la curva cambia de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo o de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba en P.

Prueba de la segunda derivada

Suponga que f'' es continua cerca de c.

(a) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo relativo en c.
(b) Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo relativo en c.

2. Problemas

Problema 1. Halle los valores máximo y mínimo absolutos de f sobre el intervalo dado.

$f(x) = 2 \cdot x^3 - 3 \cdot x^2 - 12 \cdot x + 1, \quad [-2, 3]$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}, \quad [-4, 4]$

$f(x) = 2 \cdot cos(x) + sin(2x) \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

$f(x) = x \cdot e^{-x}, \quad [-1, 4]$

$f(x) = e^{-x} - e^{-2x}, \quad [0, 1]$

Problema 2. Demuestre que la ecuación $2x - 1 + sin(x) = 0$ tiene exactamente una raíz real.

Problema 3. Un número a se denomina **punto fijo** de una función f si $f(a) = a$. Demuestre que si $f'(x) \neq 1$ para todos los números reales x, después f tiene cuando mucho un punto fijo.

Problema 4. Demuestre que:

$$1 - \frac{a}{b} < \ ln(b) - ln(a) < \ \frac{b}{a} - 1$$

con $0 < \ a < \ b$

Problema 5. Demuestre que para $0 < \ a < \ b < \ \frac{\pi}{2}$ se cumple que:

$$sin(b) \cdot (a - b) < \ cos(b) - cos(a) < \ sin(a) \cdot (a - b)$$

Problema 6. Dada la función:

$$f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$$

a) Determine intervalos de crecimiento y decrecimiento.
b) Encuentre los valores máximos y mínimos locales.
c) Determine intervalos de concavidad, convexidad y puntos de inflexión.

3. Soluciones

Problema 1.

Lo primero que debemos hacer es encontrar los puntos críticos que estén en el intervalo $[-2, 3]$

Como $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 \Rightarrow f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 3 \cdot 2x - 12 = 6x^2 - 6x - 12 = 6 \cdot (x^2 - x - 2)$

Y como sabemos, los puntos críticos son aquellos tales que $f'(x) = 0$, de este modo:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 6 \cdot (x^2 - x - 2) = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0$

Como se ve, nos queda una ecuación cuadrática y para resolverla, usamos la formula cuadrática.

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

De este modo:

$$x_1 = \frac{1 + 3}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{1 - 3}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Como se observa, los puntos críticos $x_1 = 2$ y $x_2 = -1$ se encuentran dentro del intervalo $[-2, 3]$

Para encontrar los máximos y mínimos absolutos, lo que debemos hacer es un ranking entre los puntos críticos y los extremos del intervalo, es decir, $x = -2$ y $x = 3$

De esta forma:

$f(2) = 2 \cdot (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 - 12 \cdot (2) + 1 = 16 - 12 - 24 + 1 = -19$

$f(-1) = 2 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 - 12 \cdot (-1) + 1 = -2 - 3 + 12 + 1 = -5 + 12 + 1 = 8$

$f(-2) = 2 \cdot (-2)^3 - 3 \cdot (-2)^2 - 12 \cdot (-2) + 1 = 2 \cdot (-8) - 3 \cdot 4 + 24 + 1 = -16 - 12 + 24 + 1 = -3$

$f(3) = 2 \cdot (3)^3 - 3 \cdot (3)^2 - 12 \cdot (3) + 1 = 54 - 27 - 36 + 1 = -8$

Como se observa el mayor valor del ranking es 8

Por lo tanto, el máximo absoluto es 8 y se da en $x = -1$

También, como se ve el mínimo valor del ranking es $x = -19$

Por lo tanto, el mínimo absoluto es -19 y se da en $x = 2$

Lo primero que debemos hacer es encontrar los puntos críticos. Como sabemos, los puntos críticos son aquellos en los que la función se indetermina o en los cuales la derivada es 0

Como el denominador de la función es $x^2 + 4$ y como este valor es siempre distinto de 0 entonces la función nunca se indetermina, por ende, los únicos puntos críticos son aquellos en los cuales la derivada es igual a 0.

Como $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{(x^2-4)'(x^2+4) - (x^2-4)(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} = \frac{2x(x^2+4) - (x^2-4)2x}{(x^2+4)^2} = \frac{2x[(x^2+4) - (x^2-4)]}{(x^2+4)^2}$$

$$= \frac{2x[8]}{(x^2+4)^2} = 16 \cdot \frac{x}{(x^2+4)^2}$$

De este modo para que $f'(x) = 0$, debe ocurrir que $x = 0$. Por lo tanto, el único punto critico es $x = 0$ y se encuentra en el intervalo $[-4, 4]$

De este modo, para encontrar el máximo y mínimo absoluto se debe hacer un ranking considerando a los puntos críticos y a los extremos del intervalo, es decir $x = -4$ y $x = 4$

$$f(0) = \frac{0^2 - 4}{0^2 + 4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$f(-4) = \frac{(-4)^2 - 4}{(-4)^2 + 4} = \frac{16 - 4}{16 + 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

$$f(4) = \frac{(4)^2 - 4}{(4)^2 + 4} = \frac{16 - 4}{16 + 4} = \frac{12}{20} = \frac{3}{5}$$

De este modo, el máximo absoluto es $\frac{3}{5}$ y se da en $x = -4$ y $x = 4$

Por otro lado, el mínimo absoluto es -1 y se da en $x = 0$

Para este caso, notemos que la función nunca se indetermina, por ende, lo únicos puntos críticos son aquellos en los que $f'(x) = 0$

Ahora como $f(x) = 2cos(x) + sin(2x)$, entonces:

$$f'(x) = -2sin(x) + cos(2x) \cdot 2 = 2 \cdot [-sin(x) + cos(2x)]$$

Usando que $cos(2x) = cos^2(x) - sin^2(x)$ y que $cos^2(x) + sin^2(x) = 1 \Rightarrow cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$

De esta forma:

$cos(2x) = [cos^2(x)] - sin^2(x) = [1 - sin^2(x)] - sin^2(x) = 1 - 2sin^2(x)$

Así tenemos que:

$$f'(x) = 2 \cdot [-sin(x) + cos(2x)] = 2 \cdot [-sin(x) + 1 - 2sin^2(x)]$$

Por lo tanto, los puntos en los que $f'(x) = 0$ son aquellos en los que:

$$2 \cdot [-sin(x) + 1 - 2sin^2(x] = 0 \Rightarrow -2sin^2(x) - sin(x) + 1 = 0$$

Si usamos la variable auxiliar $u = sin(x)$, la ecuación nos queda como:

$$-2u^2 - u + 1 = 0$$

Como vemos, esta es una ecuación cuadrática, por ende, para resolverla usaremos la ecuación cuadrática:

$$u_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot (1)}}{2 \cdot (-2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4}$$

De este modo:

$u_1 = \dfrac{1+3}{-4} = \dfrac{4}{-4} = -1$

$u_2 = \dfrac{1-3}{-4} = \dfrac{-2}{-4} = \dfrac{1}{2}$

Como $u = sin(x)$ y además como estamos analizando el intervalo en el que $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, entonces, utilizando u_1 y u_2 obtenemos que:

$u_1 = -1 \Rightarrow sin(x) = -1 \Rightarrow$ No hay $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ que cumpla esto

$u_2 = \frac{1}{2} \Rightarrow sin(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow x = sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Como se observa, el único punto crítico es $x = \frac{\pi}{6}$

Ahora haremos el ranking entre el punto critico y los extremos del intervalo, es decir $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

$f(0) = 2cos(0) + sin(2 \cdot 0) = 2cos(0) + sin(0) = 2$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 0 + sin(\pi) = 0 + 0 = 0$

$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$

Notemos que el máximo absoluto es $\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}$ y se da en $x = \frac{\pi}{6}$

Por otro lado, el mínimo absoluto es 0 y se da en $x = \frac{\pi}{2}$

Notemos que en este caso, no hay puntos en los cuales $f(x)$ se indetermine, por ende, los únicos puntos críticos son aquellos en los que $f'(x) = 0$

Como $f(x) = x \cdot e^{-x} \;\Rightarrow\; f'(x) = (x)' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})' = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$

De este modo, para que $f'(x) = 0$ debe ocurrir que:

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x} = x \cdot e^{-x}$$

Como $e^{-x} \neq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto:

$$e^{-x} = x \cdot e^{-x} \;\Rightarrow\; x = 1$$

Y como se esta analizando el intervalo $[-1, 4]$, entonces podemos considerar al punto critico $x = 1$

Ahora haremos el ranking entre los puntos críticos y los extremos del intervalo

$f(-1) = -1 \cdot e^{-(-1)} = -e$

$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$

$f(4) = 4 \cdot e^{-4}$

Notemos que de esta forma el máximo absoluto es $\frac{1}{e}$ y se da en $x = 1$

Mientras que el mínimo absoluto es $-e$ y se da en $x = -1$

Finalmente tenemos al caso de $f(x) = e^{-x} - e^{-2x}$

Como se observa $f(x)$ no se indetermina en ningún punto, por ende, los unicos puntos criticos son aquellos en los que $f'(x) = 0$

$$f'(x) = (e^{-x})' - (e^{-2x})' = -e^{-x} + 2e^{-2x}$$

Para que $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2e^{-2x} - e^{-x} = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x}[2e^{-x} - 1] = 0$

Como $e^{-x} \neq 0 \;\forall x \in \mathbb{R}$, entonces debe ocurrir que $2e^{-x} - 1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{-x} = \frac{1}{2}$

Aplicamos logaritmo a ambos lados y obtenemos:

$$ln(e^{-x}) = ln\left(\frac{1}{2}\right) = ln(2^{-1}) = -ln(2) \;\Rightarrow\; -x = -ln(2) \;\Rightarrow\; x = ln(2)$$

Como $ln(2)$ esta en el intervalo $[0,1]$ entonces se considera punto critico

Ahora haremos el ranking entre los puntos criticos y los extremos del intervalo

$f(0) = e^{-0} - e^{-2 \cdot 0} = e^0 - e^0 = 1 - 1 = 0$

$f(1) = e^{-1} - e^{-2 \cdot 1} = \frac{1}{e} - \frac{1}{e^2} = \frac{e}{e^2} - \frac{1}{e^2} = \frac{e-1}{e^2}$

$f(ln(2)) = e^{-ln(2)} - e^{-2 \cdot ln(2)} = e^{ln(2^{-1})} - e^{ln(2^{-2})} = e^{ln\left(\frac{1}{2}\right)} - e^{ln\left(\frac{1}{4}\right)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

De este modo, notemos que:

El máximo absoluto es $\frac{1}{4}$ y se da en $x = ln(2)$

Mientras tanto que el mínimo absoluto es 0 y se da en $x = 0$

Problema 2.

Definiremos la función $f(x) = 2x - 1 + sin(x)$

Notemos que $f(0) = -1 < 0$ y que $f(1) = 1 + sin(1) > 0$

Como la función $f(x)$es continua en todos los reales y en particular en el intervalo $[0,1]$, entonces por el TVI tenemos que existe un $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, que la ecuación $2x - 1 + sin(x) = 0$ tiene al menos 1 solución. (*)

Ahora supondremos que $f(x)$ tiene 2 o más soluciones

Por Teorema de Roll tenemos que esto implica que $f'(x)$ tiene 1 o más soluciones

Notemos que $f'(x) = 2 + cos(x)$

Para que $f'(x) = 0$ tiene que ocurrir que $2 + cos(x) = 0 \ \Rightarrow \ cos(x) = -2$

Y como sabemos que $cos(x) \geq -1$, entonces $cos(x) = -2$ no tiene solución

Por ende $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

De este modo, llegamos a una contradicción, por ende nuestra hipótesis de que $f(x)$ tiene 2 o más soluciones es falsa

Así, llegamos a que $f(x)$ tiene como máximo 1 solución (**)

Uniendo (*) y (**) obtenemos a que $f(x)$ tiene exactamente 1 solución

Problema 3.

Definiremos la función $h(x) = f(x) - x$

Supondremos que $h(x)$ tiene 2 o más soluciones

Por Teorema de Roll esto implica que $h'(x)$ debe tener 1 o más soluciones

Notemos que $h'(x) = f'(x) - 1$

Como $f'(x) \neq 1$, entonces $f'(x) - 1 \neq 0$

Por lo tanto, $h'(x) \neq 0$

Así, llegamos a una contradicción, por ende, nuestra hipótesis es falsa

Es decir, $h(x)$ tiene como máximo una solución

Como $h(x) = f(x) - x$, entonces el que $h(x)$ tenga una solución implica que $f(x) - x = 0 \Rightarrow f(x) = x$ que es lo mismo a que $f(x)$ tenga un punto fijo

Finalmente concluimos que como máximo $f(x)$ tiene un punto fijo.

Problema 4.

Sea $f(x) = ln(x)$

Notemos que $f(x)$ es continua en todos los reales, por ende, lo es en el intervalo $[a, b]$

Y además $f(x)$ es derivable en $(0, +\infty)$, entonces es derivable en (a, b)

De esta forma, por TVM decimos que existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{ln(b) - ln(a)}{b - a}$$

Notemos que $f'(x) = \frac{1}{x}$ es una función decreciente y como $c \in (a, b)$, entonces:

$$f'(b) < f'(c) < f'(a)$$

Y como $f'(c) = \frac{ln(b) - ln(a)}{b - a}$, entonces:

$$\frac{1}{b} < \frac{ln(b) - ln(a)}{b - a} < \frac{1}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(b - a)}{b} < ln(b) - ln(a) < \frac{(b - a)}{a}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{1 - \frac{a}{b} < ln(b) - ln(a) < \frac{b}{a} - 1}$$

Problema 5.

Sea $f(x) = cos(x)$

Notemos que $f(x)$ es continua en todos los reales, por ende, lo es en el intervalo $[a, b]$

Y además $f(x)$ es derivable en todos los reales, entonces es derivable en (a, b)

De esta forma, por TVM decimos que existe $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{cos(b) - cos(a)}{b - a}$$

Notemos que $f'(x) = -sin(x)$ y como $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$, entonces $f'(x)$ es una función decreciente en ese intervalo, y como $c \in (a, b)$, entonces:

$$f'(b) < f'(c) < f'(a)$$

Y como $f'(c) = \frac{cos(b)-cos(a)}{b-a}$, entonces:

$$-sin(b) < \frac{cos(b) - cos(a)}{b - a} < -sin(a)$$

$$\Rightarrow \quad -(b - a) \cdot sin(b) < cos(b) - cos(a) < -(b - a) \cdot sin(a)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{(a - b) \cdot sin(b) < cos(b) - cos(a) < (a - b) \cdot sin(a)}$$

Problema 6.

a) Lo primero que debemos hacer es calcular la primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (1 + x^2) - x \cdot (1 + x^2)'}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2}$$

Los intervalos de crecimiento son aquellos en los que $f'(x) > 0$, por lo tanto:

$$f'(x) > 0 \ \Rightarrow \ \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} > 0 \ \Rightarrow \ (1 - x^2) > 0 \ \Rightarrow \ 1 > x^2$$

Los puntos para los que $1 > x^2$ son los del intervalo $(-1, 1)$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Intervalo de crecimiento } = (-1, 1)}$$

Los intervalos de decrecimiento son aquellos en los que $f'(x) < 0$, por lo tanto:

$$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \;\Rightarrow\; (1-x^2) < 0 \;\Rightarrow\; 1 < x^2$$

Los puntos para los que $1 < x^2$ son los que pertenecen a $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Por lo tanto:

$$\boxed{\text{Intervalo de decrecimiento } = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}$$

---

b) Notemos que los puntos criticos son aquellos en los que la función se indetermina o la derivada es 0

Como $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, entonces no hay puntos en lo que $f(x)$ se indetermina, pues su denominador es $1 + x^2$ el cual es siempre distinto de 0

Ahora, pasaremos a calcular los puntos en los que la derivada se hace 0

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; 1 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 1 \;\Rightarrow\; x = \pm 1$$

De este modo, los puntos críticos son $x = -1$ y $x = 1$

Para determinar si son máximos locales o mínimos locales o puntos sillas, debemos utilizar la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{(1-x^2)' \cdot [(1+x^2)^2] - (1-x^2) \cdot [(1+x^2)^2]'}{[(1+x^2)^2]^2} = \frac{-2x \cdot [(1+x^2)^2] - (1-x^2) \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{[(1+x^2)^2]^2}$$

$$= 2x(1+x^2)\frac{[-(1+x^2) - 2 \cdot (1-x^2)]}{(1+x^2)^4} = -2x \cdot (1+x^2) \cdot \frac{[1+x^2+2-2x^2]}{(1+x^2)^4} = -2x \cdot (1+x^2) \cdot \frac{(3-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

Finalmente:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x \cdot (1+x^2) \cdot (3-x^2)}{(1+x^2)^4}$$

Notemos que:

$$f''(1) = -2 \cdot \frac{1 \cdot (1 + (1)^2) \cdot (3 - (1)^2)}{(1 + (1)^2)^4} = -2 \cdot \frac{(1+1) \cdot (3-1)}{(1+1)^4} = -\frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = -\frac{1}{2} < 0$$

$$f''(-1) = -2 \cdot \frac{(-1) \cdot (1 + (-1)^2) \cdot (3 - (-1)^2)}{(1 + (-1)^2)^4} = 2 \cdot \frac{(1+1) \cdot (3-1)}{(1+1)^4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2} > 0$$

Con esta información tenemos que:

En el punto critico $x = 1$ se da el máximo local $f(1)$, pues $f''(1) < 0$

Y por otro lado, en el punto critico $x = -1$ se da el mínimo local $f(-1)$, pues $f''(-1) > 0$

Ahora, calcularemos el valor de $f(1)$ y $f(-1)$

$$f(1) = \frac{1}{1 + (1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$f(-1) = \frac{-1}{1 + (-1)^2} = -\frac{1}{2}$$

---

c) Consideremos en primer lugar que:

$$f''(x) = -2 \cdot \frac{x \cdot (1 + x^2) \cdot (3 - x^2)}{(1 + x^2)^4} = 2 \cdot \frac{x \cdot (1 + x^2) \cdot (x^2 - 3)}{(1 + x^2)^4}$$

Los puntos de inflexión son aquellos en los que $f''(x) = 0$, por lo tanto:

$$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot \frac{x \cdot (1 + x^2) \cdot (x^2 - 3)}{(1 + x^2)^4} = 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (1 + x^2) \cdot (x^2 - 3) \;\Rightarrow\; x \cdot (x^2 - 3) = 0$$

Así tenemos que:

$$\boxed{\text{Puntos de inflexión: } x_1 = 0,\ x_2 = \sqrt{3},\ x_3 = -\sqrt{3}}$$

Ahora calcularemos los intervalos de convexidad que son aquellos puntos en los que $f''(x) > 0$

$$f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot \frac{x \cdot (1 + x^2) \cdot (x^2 - 3)}{(1 + x^2)^4} > 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (x^2 - 3) > 0$$

Así, haciendo una tabla de signos podemos resolver $x \cdot (x^2 - 3) > 0$ y llegamos a que:

$$\boxed{\text{Intervalo de convexidad } = (-\sqrt{3}, 0) \cup (\sqrt{3}, +\infty)}$$

Ahora calcularemos los intervalos de concavidad que son aquellos puntos en los que $f''(x) < 0$

$$f''(x) < 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot \frac{x \cdot (1 + x^2) \cdot (x^2 - 3)}{(1 + x^2)^4} < 0 \;\Rightarrow\; x \cdot (x^2 - 3) < 0$$

Así, haciendo una tabla de signos podemos resolver $x \cdot (x^2 - 3) < 0$ y llegamos a que:

$$\boxed{\text{Intervalo de concavidad } = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (0, \sqrt{3})}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 7

Regla de L'hospital y Grafico de funciones

1. Contenidos

Regla de L'Hospital

Suponga que f y g son funciones derivables y que $g'(x) \neq 0$ en un intervalo abierto I que contiene a, (excepto quizás en a). Suponga que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = 0$$

o que:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty \qquad \text{y} \qquad \lim_{x\to a} g(x) = \pm\infty$$

En otras palabras tiene una forma indeterminada del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$. Entonces:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Igualdad importante

Sea f un función positiva, es decir que: $f(x) > 0$ para toda x en D, entonces es valida la siguiente igualdad:

$$f(x) = e^{ln(f(x))}$$

Igualdad importante

Sea f un función positiva, es decir que: $f(x) > 0$ para toda x en D, entonces es valida la siguiente igualdad:

$$f(x) = e^{ln(f(x))}$$

Normas para trazar una curva

1. Determinar el dominio.

2. Intersecciones con el eje x y el eje y.

3. Simetria: i) Determinar si es par
· ii) Determinar si es impar
· iii) Determinar si es periódica

4. Determinar asintotas: i) Horizontales
· ii) Verticales
· iii) Inclinadas

5. Intervalos de crecimiento y de decrecimiento

6. Valores de los máximos y mínimos locales

7. Concavidad y puntos de inflexión

Asintotas

Asintotas horizontales: Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ o $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$ entonces la recta $y = L$ es una asintota horizontal de la curva $y = f(x)$

Asintotas verticales: La recta $x = a$ es una asintota vertical si se cumple alguna de la siguientes proposiciones:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \qquad \lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$$

Asintotas inclinadas: Sean $m, b \in \mathbb{R}$, si: $\lim_{x\to\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$, entonces la recta $y = mx + b$ es una asintota oblicua de la curva $y = f(x)$. Lo mismo sucede para el caso en que $x \to -\infty$, es decir, que si: $\lim_{x\to-\infty}[f(x) - (mx + b)] = 0$, entonces la recta $y = mx + b$ es una asintota oblicua de la curva $y = f(x)$.

Valores de m y b $(x \to \infty)$:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to\infty}[f(x) - mx]$$

Valores de m y b $(x \to -\infty)$:

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} \qquad b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - mx]$$

2. Problemas

Problema 1. Determine los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^a-1}{x^b-1} \qquad \lim_{t\to 0}\frac{5^t-3^t}{t} \qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-cos(x)}{x^2}$$

Problema 2. Determine los siguientes límites.

$$\lim_{x\to\infty} x^3\cdot e^{-x^2} \qquad \lim_{x\to\infty} x\cdot tan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Problema 3. Determine los siguientes límites.

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x^2+x}-x] \qquad \lim_{x\to 0}(csc(x)-cot(x))$$

Problema 4. Determine los siguientes límites.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x \qquad \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} \qquad \lim_{x\to 0^+}[cos(x)]^{\frac{1}{x^2}} \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1}$$

Problema 5. Grafique la siguiente curva.

$$f(x)=\frac{x^2+x+4}{x}$$

Problema 6. Grafique la siguiente curva.

$$f(x)=\frac{x^2+12}{x-2}$$

3. Soluciones

Problema 1.

Notemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - x - 1}{x^2}$ es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$, por ende, podemos usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x}$$

Ahora $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x}$ también es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$ por ende, podemos usar la regla de L'hopital nuevamente:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} e^x = \frac{1}{2} \cdot e^0 = \frac{1}{2}$$

Notemos que $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^a - 1}{x^b - 1}$ es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$, de este modo, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{a \cdot x^{a-1}}{b \cdot x^{b-1}} = \frac{a}{b} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{x^{a-1}}{x^{b-1}} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$$

Notemos que $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{5^t - 3^t}{t}$ es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$, por ende, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{t\to 0} \frac{5^t - 3^t}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{5^t \cdot ln(5) - 3^t \cdot ln(3)}{1} = ln(5) \cdot \lim_{t\to 0} 5^t - ln(3) \cdot \lim_{t\to 0} 3^t = ln(5) \cdot 5^0 - ln(3) \cdot 3^0$$

$$= ln(5) \cdot 1 - ln(3) \cdot 1 = ln(5) - ln(3) = ln\left(\frac{5}{3}\right)$$

Notemos que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - cos(x)}{x^2}$ es un límite del tipo $\dfrac{0}{0}$ por ende:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{2x} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Problema 2.

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \cdot e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}$$

Notemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}}$ es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por ende, podemos usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{e^{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3\cdot x^2}{e^{x^2}\cdot 2x} = \frac{3}{2}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$$

Ahora notemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}}$ es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por ende, se puede usar nuevamente la regla de L'hopital:

$$\frac{3}{2}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = \frac{3}{2}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x} = \frac{3}{4}\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^{x^2}\cdot x} = \frac{3}{4}\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Sea $u = \frac{1}{x}$, entonces $u \to 0^+$ cuando $x \to \infty$

De esta forma:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{tan\left(\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim_{u\to 0^+} \frac{tan\,(u)}{u}$$

Notemos que $\lim_{u\to 0^+} \frac{tan\,(u)}{u}$ es un límite del tipo $\frac{0}{0}$, por ende, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{tan\,(u)}{u} = \lim_{u\to 0^+} \frac{sec^2(u)}{1} = \lim_{u\to 0^+} sec^2(u) = \left[\lim_{u\to 0^+} sec(u)\right]^2 = [1]^2 = 1$$

Problema 3.

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x^2+x}-x] = \lim_{x\to\infty}\left([\sqrt{x^2+x}-x]\cdot\frac{[\sqrt{x^2+x}+x]}{[\sqrt{x^2+x}+x]}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{[\sqrt{x^2+x}-x][\sqrt{x^2+x}+x]}{[\sqrt{x^2+x}+x]}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{[(x^2+x)-x^2]}{[\sqrt{x^2+x}+x]}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{[\sqrt{x^2+x}+x]}\right)$$

Notemos que $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{[\sqrt{x^2+x}+x]}\right)$ es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por ende, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{[\sqrt{x^2+x}+x]}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(x^2+x)'+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x^2+x}}\cdot(2x+1)+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}+1}\right) = \frac{1}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)+1}$$

Ahora calcularemos $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+1)\cdot\frac{1}{x}}{2\sqrt{x^2+1}\cdot\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2+\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}\right)$$

$$= \frac{2+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}}{2\sqrt{1+\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}}} = \frac{2+0}{2\sqrt{1+0}} = \frac{2}{2\cdot\sqrt{1}} = \frac{2}{2} = 1$$

De esta forma:

$$\lim_{x\to\infty}[\sqrt{x^2+x}-x] = \frac{1}{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+1}}\right)+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}(csc(x)-cot(x)) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{sin(x)}-\frac{cos(x)}{sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1-cos(x)}{sin(x)}\right)$$

Observemos que $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-cos(x)}{sin(x)}\right)$ es un límite del tipo $\frac{0}{0}$, por ende, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-cos(x)}{sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{sin(x)}{cos(x)}\right) = \lim_{x\to 0} tan(x) = 0$$

Problema 4.

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{ln(x^x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot ln(x)} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{ln(x)}{x^{-1}}} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(x)}{x^{-1}}\right)}$$

Ahora nos centraremos en $\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(x)}{x^{-1}}\right)$ el cual es un límite del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por lo tanto, se puede usar L'hopital:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(x)}{x^{-1}}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{1}{x}}{(-1)\cdot x^{-2}}\right) = -\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x^{-1}}{x^{-2}}\right) = -\lim_{x\to 0^+} x = 0$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = e^{\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{ln(x)}{x^{-1}}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{ln\left(x^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\cdot ln(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{ln(x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ln(x)}{x}\right)}$$

Ahora nos centraremos en calcular $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ln(x)}{x}\right)$ el cual es un límite de la forma $\frac{\infty}{\infty}$, por lo tanto, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ln(x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

De este modo:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ln(x)}{x}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{ln\left((e^x+x)^{\frac{1}{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{ln(e^x+x)}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ln(e^x+x)}{x}\right)}$$

Ahora nos centraremos en calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ln(e^x+x)}{x}\right)$, que como se ve es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por ende, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ln(e^x+x)}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(e^x+x)}\cdot(e^x+x)'}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{(e^x+x)}\cdot(e^x+1)}{1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right)$$

Ahora nos centraremos en calcular $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right)$, que también es del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, por ende, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)$$

Nuevamente se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^x}{e^x}\right) = \lim_{x\to\infty}(1) = 1$$

Finalmente, se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty}(e^x+x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{ln(e^x+x)}{x}\right)} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{e^x+1}{e^x+x}\right)} = e^1 = e$$

$$\lim_{x\to0^+}[cos(x)]^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to0^+} e^{ln\left([cos(x)]^{\frac{1}{x^2}}\right)} = \lim_{x\to0^+} e^{\frac{ln(cos(x))}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{ln(cos(x))}{x^2}\right)}$$

Ahora nos centraremos en calcular $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{ln(cos(x))}{x^2}\right)$ que es un límite del tipo $\frac{0}{0}$, por ende, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{ln(cos(x))}{x^2}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{cos(x)}\cdot[cos(x)]'}{2x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{\frac{1}{cos(x)}\cdot sin(x)}{2x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{sin(x)}{2x\cdot cos(x)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{sin(x)}{x} \right) \cdot \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{cos(x)} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0^+} [cos(x)]^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{ln(cos(x))}{x^2} \right)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{sin(x)}{2x \cdot cos(x)} \right)} = e^{\frac{1}{2} \cdot \lim\limits_{x \to 0^+} \left(\frac{sin(x)}{x} \right)} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right)^{2x+1} = \lim_{x \to \infty} e^{ln\left[\left(\frac{2x-3}{2x+5} \right)^{(2x+1)} \right]} = \lim_{x \to \infty} e^{\left[(2x+1) \cdot ln\left(\frac{2x-3}{2x+5} \right) \right]} = e^{\lim\limits_{x \to \infty} \left[(2x+1) \cdot ln \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right) \right]}$$

Ahora nos centraremos en calcular $\lim\limits_{x \to \infty} \left[(2x+1) \cdot ln \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right) \right]$

Lo primero que haremos será utilizar la variable auxiliar $u = \frac{1}{2x+1}$, por ende, si $x \to \infty \ \Rightarrow \ u \to 0^+$

De este modo:

$$\boxed{(2x+1) = \frac{1}{u}} \ \Rightarrow \ (2x-3) = (2x+1) - 4 = \frac{1}{u} - 4 = \frac{1}{u} - \frac{4u}{u} = \frac{1-4u}{u} \ \Rightarrow \ \boxed{(2x-3) = \frac{1-4u}{u}}$$

$$\text{Y} \quad (2x+5) = (2x+1) + 4 = \frac{1}{u} + 4 = \frac{1}{u} + \frac{4u}{u} = \frac{1+4u}{u} \ \Rightarrow \ \boxed{(2x+5) = \frac{1+4u}{u}}$$

De este modo:

$$\lim_{x \to \infty} \left[(2x+1) \cdot ln \left(\frac{2x-3}{2x+5} \right) \right] = \lim_{u \to 0^+} \left[\frac{1}{u} \cdot ln \left(\frac{\frac{1-4u}{u}}{\frac{1+4u}{u}} \right) \right] = \lim_{u \to 0^+} \left[\frac{1}{u} \cdot ln \left(\frac{1-4u}{1+4u} \right) \right] = \lim_{u \to 0^+} \left[\frac{ln\left(\frac{1-4u}{1+4u} \right)}{u} \right]$$

Notemos que $\lim\limits_{u \to 0^+} \left[\frac{ln\left(\frac{1-4u}{1+4u} \right)}{u} \right]$ es un límite del tipo $\frac{0}{0}$, por lo tanto, se puede usar la regla de L'hopital:

$$\lim_{u \to 0^+} \left[\frac{ln\left(\frac{1-4u}{1+4u} \right)}{u} \right] = \lim_{u \to 0^+} \left[\frac{\frac{1}{\left(\frac{1-4u}{1+4u} \right)} \cdot \left(\frac{1-4u}{1+4u} \right)'}{1} \right] = \lim_{u \to 0^+} \left[\frac{(1+4u)}{(1-4u)} \cdot \left(\frac{1-4u}{1+4u} \right)' \right]$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \left[\frac{(1+4u)}{(1-4u)} \cdot \left(\frac{(1-4u)' \cdot (1+4u) - (1-4u) \cdot (1+4u)'}{(1+4u)^2} \right) \right]$$

$$= \lim_{u\to 0^+}\left[\frac{(1+4u)}{(1-4u)}\cdot\left(\frac{-4\cdot(1+4u)-(1-4u)\cdot 4}{(1+4u)^2}\right)\right] = -4\cdot\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{(1+4u)}{(1-4u)}\cdot\left(\frac{(1+4u)+(1-4u)}{(1+4u)^2}\right)\right]$$

$$= -4\cdot\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{(1+4u)}{(1-4u)}\cdot\left(\frac{2}{(1+4u)^2}\right)\right] = -8\cdot\lim_{u\to 0^+}\left[\frac{1}{(1-4u)(1+4u)}\right] = -8\cdot 1 = -8$$

Finalmente llegamos a que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)^{2x+1} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left[(2x+1)\cdot ln\left(\frac{2x-3}{2x+5}\right)\right]} = e^{-8}$$

Problema 5.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x}$

Para graficar una curva lo que debemos hacer es:

i) Determinar el dominio: El dominio debe ser claramente $\mathbb{R} - \{0\}$

ii) Intersecciones con los ejes X e Y:

Para determinar la intersección con el eje X debemos hacer:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+x+4}{x} = 0 \;\Rightarrow\; x^2+x+4 = 0$$

Notemos que nos queda una ecuación cuadrática con $a = 1$, $b = 1$ y $c = 4$

Se observa que $b^2 - 4ac = 1 - 16 = -15 < 0$, por lo tanto, la ecuación cuadrática no tiene solución.

De este modo, esta curva no tiene intersección con el eje X.

Como el dominio de la función no considera al punto $x = 0$, entonces esta curva no tiene intersección con el eje Y.

iii) Determinar asintotas:

Primero determinaremos si la curva tiene asintotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+x+4}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{4}{x}\right] = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+x+4}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left[x+1+\frac{4}{x}\right] = -\infty$$

Como $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces la curva no tiene asintotas horizontales.

Ahora determinaremos si la curva tiene asintotas verticales.

Como $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x}$, entonces la función se indetermina para $x = 0$, por lo tanto, su asintota vertical es $x = 0$.

Finalmente determinaremos si la curva tiene asintotas oblicuas.

Primero analizaremos el caso cuando $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x+4}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right] = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+x+4}{x} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+x+4}{x} - \frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x+4}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left[1 + \frac{4}{x}\right] = 1$$

De este modo, cuando $x \to +\infty$ tenemos la asintota oblicua $y = x + 1$

Ahora analizaremos el caso cuando $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+x+4}{x^2} = \lim_{x\to-\infty} \left[1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2}\right] = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2+x+4}{x} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x^2+x+4}{x} - \frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty} \left[\frac{x+4}{x}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \left[1 + \frac{4}{x}\right] = 1$$

De este modo, cuando $x \to -\infty$ tenemos la asintota oblicua $y = x + 1$

v) Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Lo primero que debemos hacer es calcular $f'(x)$

Como $f(x) = \dfrac{x^2+x+4}{x}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{(x^2+x+4)' \cdot (x) - (x^2+x+4) \cdot (x)'}{x^2} = \frac{(2x+1) \cdot x - (x^2+x+4) \cdot 1}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2+x-x^2-x-4}{x^2} = \frac{x^2-4}{x^2}$$

Los intervalos de crecimiento son aquellos en los que $f'(x) > 0$

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-4}{x^2} > 0 \;\Rightarrow\; x^2-4 > 0 \;\Rightarrow\; x^2 > 4$$

Los puntos para los que $x^2 > 4$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$$\boxed{\text{Intervalo de crecimiento: } (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)}$$

Los intervalos de decrecimiento son aquellos en los que $f'(x) < 0$

$$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2-4}{x^2} < 0 \;\Rightarrow\; x^2-4 < 0 \;\Rightarrow\; x^2 < 4$$

Los puntos para los que $x^2 < 4$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(-2, 0) \cup (0, 2)$

$$\boxed{\text{Intervalo de decrecimiento: } (-2, 0) \cup (0, 2)}$$

vi) Valores máximos y mínimos locales:

Los máximos y mínimos locales cumplen con que son puntos tales que:

$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2-4}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2-4 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 2$
Denotaremos a estos puntos como $x_1 = 2$ y $x_2 = -2$

Para determinar la naturaleza de estos puntos, utilizaremos la segunda derivada

Como $f'(x) = \dfrac{x^2-4}{x^2}$, entonces:

$$f''(x) = \frac{[x^2-4]'[x^2]-[x^2-4][x^2]'}{[x^2]^2} = \frac{2x[x^2]-[x^2-4]2x}{x^4} = \frac{2x(x^2-[x^2-4])}{x^4}$$

$$= \frac{2x(x^2-x^2+4)}{x^4} = \frac{2x(4)}{x^4} = 8\cdot\frac{1}{x^3} = \frac{8}{x^3}$$

De este modo:

$f(2) = \dfrac{8}{2^3} = \dfrac{8}{8} = 1$

$f(-2) = \dfrac{8}{(-2)^3} = \dfrac{8}{-8} = -1$

Como $f(2) > 0$, entonces $f(2)$ es un mínimo local y como $f(-2) < 0$, entonces $f(-2)$ es un máximo local.

vii) Concavidad y puntos de inflexión:

Los puntos de inflexión son aquellos puntos en los que $f''(x) = 0$.

Como $f''(x) = \dfrac{8}{x^3}$, entonces no hay puntos tales que $f''(x) = 0$, por lo tanto, no hay puntos de inflexión.

Los intervalos de convexidad son aquellos en los que $f''(x) > 0$

$$f''(x) > 0 \;\Rightarrow\; \frac{8}{x^3} > 0 \;\Rightarrow\; \frac{8}{x} > 0$$

Los puntos para los que $\dfrac{8}{x} > 0$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(0, +\infty)$

$$\boxed{\text{Intervalo de convexidad } = (0, +\infty)}$$

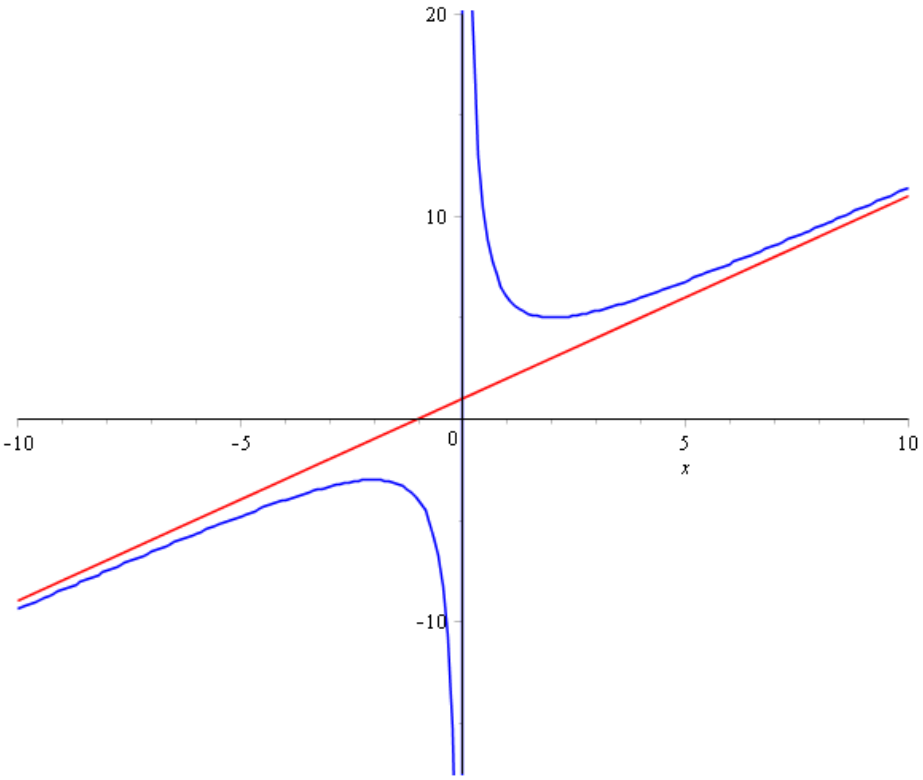
Los intervalos de concavidad son aquellos en los que $f''(x) < 0$

$$f''(x) < 0 \;\Rightarrow\; \frac{8}{x^3} < 0 \;\Rightarrow\; \frac{8}{x} < 0$$

Los puntos para los que $\dfrac{8}{x} < 0$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(-\infty, 0)$

$$\boxed{\text{Intervalo de concavidad } = (-\infty, 0)}$$

viii) Grafico:



Notemos que en azul esta el gráfico y en rojo las asintotas oblicuas

Problema 6.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2+12}{x-2}$

Para graficar una curva lo que debemos hacer es:

i) Determinar el dominio: El dominio debe ser claramente $\mathbb{R} - \{2\}$

ii) Intersecciones con los ejes X e Y:

Para determinar la intersección con el eje X debemos hacer:

$$f(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2+12}{x-2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 + 12 = 0$$

Notemos que esta ecuación cuadrática no tiene solución.

De este modo, esta curva no tiene intersección con el eje X.

La intersección con el eje Y se obtiene al evaluar la función en $x = 0$.

De este modo, como $f(0) = \dfrac{12}{-2} = -6$, entonces la intersección con el eje Y es $y = -6$.

iii) Determinar asintotas:

Primero determinaremos si la curva tiene asintotas horizontales.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+12}{x-2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2+12}{x-2} = -\infty$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, entonces la curva no tiene asintotas horizontales.

Ahora determinaremos si la curva tiene asintotas verticales.

Como $f(x) = \dfrac{x^2+12}{x-2}$, entonces la función se indetermina para $x = 2$, por lo tanto, su asintota vertical es $x = 2$.

Finalmente determinaremos si la curva tiene asintotas oblicuas.

Primero analizaremos el caso cuando $x \to +\infty$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+12}{(x-2)x} = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{x^2+12}{x^2-2x}\right] = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+12}{x-2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+12}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+12}{x-2} - \frac{x^2-2x}{x-2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+12-(x^2-2x)}{x-2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2+12-x^2+2x)}{x-2}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12+2x}{x-2}\right] = 2$$

De este modo, cuando $x \to +\infty$ tenemos la asintota oblicua $y = x + 2$

Ahora analizaremos el caso cuando $x \to -\infty$

$$m = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+12}{(x-2)x} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+12}{x^2-2x}\right] = 1$$

$$b = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - m\cdot x] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+12}{x-2} - 1\cdot x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+12}{x-2} - \frac{x(x-2)}{x-2}\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+12}{x-2} - \frac{x^2-2x}{x-2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+12-(x^2-2x)}{x-2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2+12-x^2+2x)}{x-2}\right]$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{12+2x}{x-2}\right] = 2$$

De este modo, cuando $x \to -\infty$ tenemos la asintota oblicua $y = x + 2$

v) Determinar intervalos de crecimiento y decrecimiento:

Lo primero que debemos hacer es calcular $f'(x)$

Como $f(x) = \dfrac{x^2+12}{x-2}$, entonces:

$$f'(x) = \frac{(x^2+12)'\cdot(x-2) - (x^2+12)\cdot(x-2)'}{(x-2)^2} = \frac{2x\cdot(x-2) - (x^2+12)\cdot 1}{(x-2)^2} = \frac{(2x^2-4x) - (x^2+12)}{(x-2)^2}$$

$$= \frac{2x^2-4x-x^2-12}{(x-2)^2} = \frac{x^2-4x-12}{(x-2)^2}$$

Los intervalos de crecimiento son aquellos en los que $f'(x) > 0$

$$f'(x) > 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} > 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x - 12 > 0$$

Notemos que $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$, por lo tanto, para que $f'(x) > 0$ debe ocurrir que:

$$(x-6)(x+2) > 0$$

Haciendo el estudio de signos, notamos que esto se da cuando $(-\infty, -2) \cup (6, +\infty)$

$$\boxed{\text{Intervalo de crecimiento } = (-\infty, -2) \cup (6, +\infty)}$$

Los intervalos de decrecimiento son aquellos en los que $f'(x) < 0$

$$f'(x) < 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} < 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x - 12 < 0$$

Notando que $x^2 - 4x - 12 = (x-6)(x+2)$, se obtiene que los puntos para los que $x^2 - 4x - 12 < 0$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(-2, 2) \cup (2, 6)$

$$\boxed{\text{Intervalo de decrecimiento: } (-2, 2) \cup (2, 6)}$$

vi) Valores máximos y mínimos locales:

Los máximos y mínimos locales cumplen con que son puntos tales que:

$$f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 4x - 12 = 0 \;\Rightarrow\; (x-6)(x+2) = 0$$

Así obtenemos que $x_1 = 6$ y $x_2 = -2$

Para determinar la naturaleza de estos puntos, utilizaremos la segunda derivada

Como $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x - 12}{(x-2)^2}$, entonces:

$$f''(x) = \frac{[x^2 - 4x - 12]'[(x-2)^2] - [x^2 - 4x - 12][(x-2)^2]'}{[(x-2)^2]^2} = \frac{[2x-4][(x-2)^2] - [x^2 - 4x - 12][2(x-2)]}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{[2x-4][x^2 - 4x + 4] - [x^2 - 4x - 12][2x-4]}{(x-2)^4} = \frac{[2x-4]([x^2 - 4x + 4] - [x^2 - 4x - 12])}{(x-2)^4}$$

$$= \frac{[2x-4](x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x + 12)}{(x-2)^4} = \frac{2(x-2)(16)}{(x-2)^4} = 32 \cdot \frac{(x-2)}{(x-2)^4} = 32 \cdot \frac{1}{(x-2)^3}$$

De este modo:

$$f(6) = 32 \cdot \frac{1}{(6-2)^3} = 32 \cdot \frac{1}{(4)^3} = 32 \cdot \frac{1}{64} = \frac{1}{2}$$
$$f(-2) = 32 \cdot \frac{1}{(-2-2)^3} = 32 \cdot \frac{1}{-1 \cdot (4)^3} = -\frac{32}{64} = -\frac{1}{2}$$

Como $f(6) > 0$, entonces $f(6)$ es un mínimo local y como $f(-2) < 0$, entonces $f(-2)$ es un máximo local.

vii) Concavidad y puntos de inflexión:

Los puntos de inflexión son aquellos puntos en los que $f''(x) = 0$.

Como $f''(x) = \dfrac{32}{(x-2)^3}$, entonces no hay puntos tales que $f''(x) = 0$, por lo tanto, no hay puntos de inflexión.

Los intervalos de convexidad son aquellos en los que $f''(x) > 0$

$$f''(x) > 0 \ \Rightarrow \ \frac{32}{(x-2)^3} > 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{(x-2)} > 0$$

Los puntos para los que $\dfrac{1}{(x-2)} > 0$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(2, +\infty)$

$$\boxed{\text{Intervalo de convexidad } = (2, +\infty)}$$

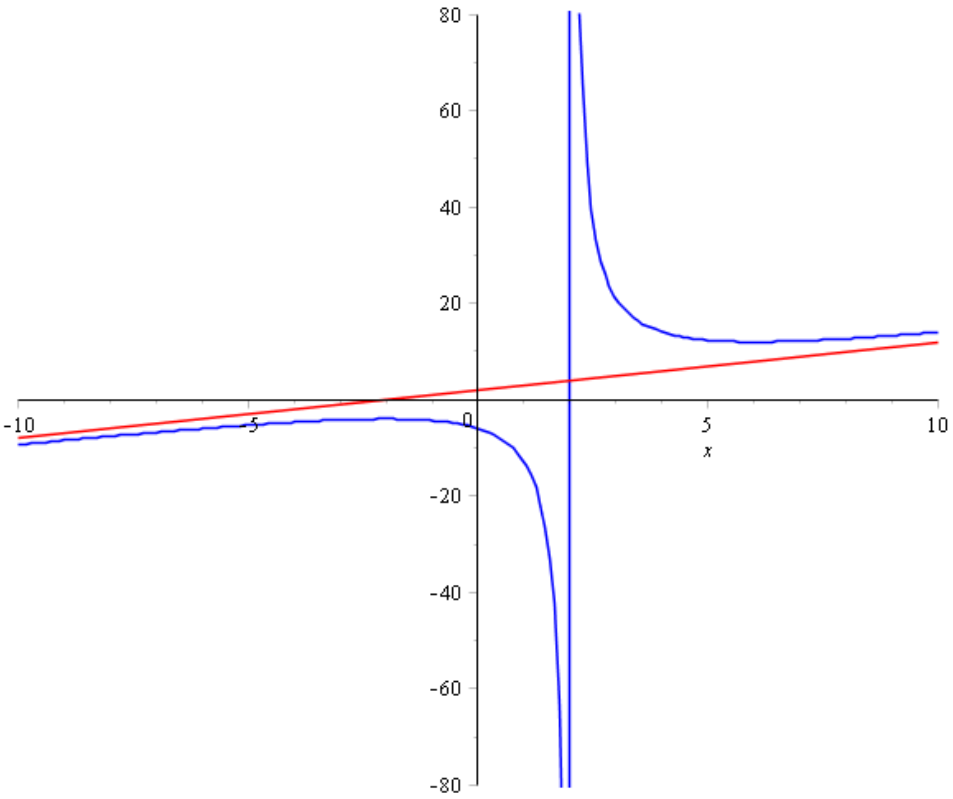
Los intervalos de concavidad son aquellos en los que $f''(x) < 0$

$$f''(x) < 0 \ \Rightarrow \ cfrac32(x-2)^3 < 0 \ \Rightarrow \ \frac{1}{(x-2)} < 0$$

Los puntos para los que $\dfrac{1}{(x-2)} < 0$ son aquellos que pertenecen al intervalo $(-\infty, 2)$

$$\boxed{\text{Intervalo de concavidad } = (-\infty, 2)}$$

viii) Grafico:



Notemos que en azul esta el gráfico y en rojo las asintotas oblicuas

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 8

Optimización

1. Contenidos

Pasos para la resolución de un problema de optimización

1. Comprenda el problema: El primer paso es leer el problema con cuidado, hasta que se entienda con claridad. Hágase las preguntas: ¿Cuál es la incógnita? ¿Cuáles son las cantidades dadas? ¿Cuáles son las condiciones dadas?.

2. Dibuje un diagrama: En la mayor parte de los problemas, resulta útil dibujar un diagrama e identificar en él las cantidades dadas y requeridas.

3. Introduzca una notación: Asigne un símbolo a la cantidad que se va a maximizar o minimizar (llamemosla Q). Asimismo, seleccione símbolos $(a, b, ..., x, y)$ para las otras cantidades desconocidas y marque el diagrama con estos símbolos sugerentes.

4. Exprese Q en termino de los simbolos del paso 3.

5. Si en el paso 4 Q se ha expresado como función de más de una variable, utilice la información dada para hallar correspondencias (en la forma de ecuaciones) entre estas variables. En seguida, use estas ecuaciones para eliminar todas las variables, excepto una, en la expresión para Q. De esta forma, Q se expresará como función de una variable x, por ejemplo, $Q = f(x)$. Escriba el dominio de esta función.

6. Hallar el valor máximo o mínimo usando los contenidos ya vistos.

Prueba de la primera derivada para valores extremos absolutos

Suponga que c es un número crítico de una función continua f definida sobre un intervalo.
a) Si $f'(x) > 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) < 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor máximo absoluto de f.

b) Si $f'(x) < 0$ para toda $x < c$ y $f'(x) > 0$ para toda $x > c$, entonces $f(c)$ es el valor mínimo absoluto de f.

2. Problemas

Problema 1. Encuentre dos números positivos cuyo producto sea 100 y cuya suma sea un mínimo.

Problema 2. La cantidad de carbón con la que se lleva a cabo la fotosíntesis de una especie de fitoplancton se diseña mediante la función:

$$P = \frac{100I}{I^2 + I + 4}$$

donde I es la intensidad de luz. ¿Para que intensidad de luz P es máxima?

Problema 3.

(a) Demuestre que de todos los rectángulos con un área dada, el que tiene el perímetro menor es el cuadrado.
(b) Demuestre que de todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene área máxima es el cuadrado.

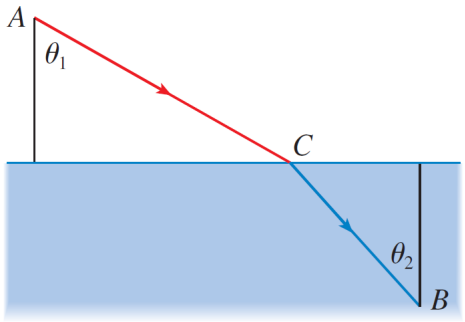
Problema 4. Encuentre el punto de la recta $y = 4x + 7$ que está más cerca al origen.

Problema 5. Encuentre el área del rectángulo más grande que puede inscribirse en la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Problema 6. Sea v_1 la velocidad de la luz en el aire y v_2 la velocidad de la luz en el agua. Según el principio de Fermat, un rayo de luz viaja de un punto A en el aire a un punto B en el agua por una trayectoria ACB que minimiza el tiempo para hacer el recorrido. Demuestre que:

$$\frac{sin(\theta_1)}{sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2}$$

donde θ_1 (el angulo de incidencia) y θ_2 (el angulo de refracción) son como se muestra en la siguiente figura. Esta ecuación se conoce como ley de Snell.



3. Soluciones

Problema 1.

Consideremos un número x y un número y tales que su producto sea 100. De este modo:

$$x \cdot y = 100 \;\Rightarrow\; y = \frac{100}{x}$$

Definiremos la función de la suma de ambos números $f(x)$ como:

$$f(x) = x + y = x + \frac{100}{x} = \frac{x^2}{x} + \frac{100}{x} = \frac{x^2 + 100}{x}$$

Ahora para encontrar el punto donde esta función, es decir, la suma de ambos números, sea un mínimo lo que haremos será en primer lugar encontrar los puntos para los que la derivada es 0.

Para esto, en primer lugar, calcularemos $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(x^2+100)' \cdot (x) - (x^2+100) \cdot (x)'}{(x)^2} = \frac{2x \cdot x - (x^2+100) \cdot 1}{x^2} = \frac{2x^2 - x^2 - 100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x^2}$$

Si $f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2-100}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - 100 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm 10$

Como nos piden que el número sea positivo, entonces solo tomamos a $x = 10 \;\Rightarrow\; y = \dfrac{100}{x} = \dfrac{100}{10} = 10$

De este modo, los números son $x = 10$ e $y = 10$.

Problema 2.

Lo que queremos hacer es maximizar la intensidad P, por lo tanto, lo primero que debemos hacer es derivar P respecto a I

$$P'(I) = \frac{[100I]' \cdot [I^2 + I + 4] - [100I] \cdot [I^2 + I + 4]'}{[I^2 + I + 4]^2} = \frac{100 \cdot [I^2 + I + 4] - [100I] \cdot [2I + 1]}{[I^2 + I + 4]^2}$$

$$= \frac{100I^2 + 100I + 400 - 200I^2 - 100I}{[I^2 + I + 4]^2} = \frac{-100I^2 + 400}{(I^2 + I + 4)^2} = \frac{100 \cdot (4 - I^2)}{(I^2 + I + 4)^2}$$

Ahora, buscaremos los puntos críticos, es decir, los puntos en los que $P'(I) = 0$.

$$P'(I) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{100 \cdot (4 - I^2)}{(I^2 + I + 4)^2} = 0 \;\Rightarrow\; (4 - I^2) = 0 \;\Rightarrow\; I = \pm 2$$

Como la intensidad es siempre positiva, entonces descartamos a $I = -2$.

Notemos que:

$$P(2) = \frac{100 \cdot 2}{(2)^2 + 2 + 4} = \frac{200}{10} = 20$$

Por lo tanto, la intensidad para la cual la potencia es máxima es $I = 2$.

Problema 3.

a) Sea un rectángulo con lados x e y. Si su área es A, entonces:

$$x \cdot y = A \;\Rightarrow\; y = \frac{A}{x}$$

De este modo, el perímetro del rectángulo será:

$$P(x) = 2[x + y(x)] = 2\left(x + \frac{A}{x}\right) = 2\left(\frac{x^2}{x} + \frac{A}{x}\right) = \frac{2[x^2 + A]}{x}$$

Como queremos minimizar el perímetro, entonces lo primero que haremos será encontrar los puntos para los cuales la derivada es 0. Y para esto en primer lugar se debe calcular la derivada:

$$P'(x) = 2 \cdot \frac{([x^2 + A]'[x] - [x^2 + A][x]')}{x^2} = 2 \cdot \frac{([2x][x] - [x^2 + A])}{x^2} = 2 \cdot \frac{(2x^2 - x^2 - A)}{x^2} = 2 \cdot \frac{(x^2 - A)}{x^2}$$

De esta forma, para que $P'(x) = 0$ debe ocurrir que:

$$2 \cdot \frac{(x^2 - A)}{x^2} = 0 \;\Rightarrow\; x^2 - A = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = A \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{A}$$

Como x debe ser mayor que 0 entonces solo tomamos a $x = \sqrt{A}$

De este modo:

$$y = \frac{A}{x} = \frac{A}{\sqrt{A}} = \sqrt{A}$$

De esta forma, el rectángulo de área A que minimiza el perímetro, es aquel de lados $x = \sqrt{A}$ e $y = \sqrt{A}$. Como $x = y$, entonces estamos hablando de un cuadrado.

Por lo tanto, de todos los rectángulos de un área dada, el que minimiza el perímetro es el cuadrado.

---

b) Consideremos a un rectángulo cualquiera con lados x e y. Si este rectángulo tiene un perímetro P, entonces:

$$2x + 2y = P \;\Rightarrow\; x + y = \frac{P}{2} \;\Rightarrow\; y = \frac{P}{2} - x = \frac{P}{2} - \frac{2x}{2} = \frac{P - 2x}{2}$$

De este modo, el área del rectángulo queda determinada por:

$$A(x) = x \cdot y(x) = x \cdot \frac{(P - 2x)}{2} = \frac{Px - 2x^2}{2}$$

Ahora, para encontrar el área máxima, derivaremos a $A(x)$.

$$A'(x) = \frac{P - 4x}{2}$$

En el punto para el cual el área es máxima debe ocurrir que $A'(x) = 0$ y ahora resolveremos esa ecuación:

$$A'(x) = 0 \;\Rightarrow\; \frac{P - 4x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; P - 4x = 0 \;\Rightarrow\; x = \frac{P}{4}$$

Ahora, a partir del valor de x podremos encontrar el valor de y

$$y = \frac{P - 2x}{2} = \frac{P - 2 \cdot \frac{P}{4}}{2} = \frac{P - \frac{P}{2}}{2} = \frac{\frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4}$$

De este modo, llegamos a que el rectángulo de un perímetro P dado que maximiza el área es aquel de lados $x = y = \frac{P}{4}$, el cual es un cuadrado.

Así llegamos a que el rectángulo que maximiza el área dado un perímetro, es el cuadrado.

Problema 4.

Nos piden calcular el punto de la recta $y = 4x + 7$ que esta más cerca del origen.

Notemos que todo punto (x, y) de la recta es de la forma:

$$(x, y) = (x, 4x + 7)$$

Y la distancia de un punto (x, y) al origen es:

$$d_1(x) = \sqrt{[x - 0]^2 + [y(x) - 0]^2} = \sqrt{x^2 + [y(x)]^2}$$

Y como el punto (x, y) pertenece a la recta, entonces:

$$d_1(x) = \sqrt{x^2 + [4x+7]^2} = \sqrt{x^2 + 16x^2 + 56x + 49} = \sqrt{17x^2 + 56x + 49}$$

Notemos que minimizar $d_1(x)$ es lo mismo que minimizar $d(x) = d_1 x$

De este modo:

$$d(x) = 17x^2 + 56x + 49$$

Sabemos que el mínimo se daría en un punto x tal que $d'(x) = 0$. Por lo tanto, calcularemos $d'(x)$:

$$d'(x) = 17 \cdot 2x + 56 = 34x + 56$$

Ahora:

$$d'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 34x + 56 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\frac{56}{34} = -\frac{28}{17}$$

A partir de este valor de x podemos calcular el valor de y

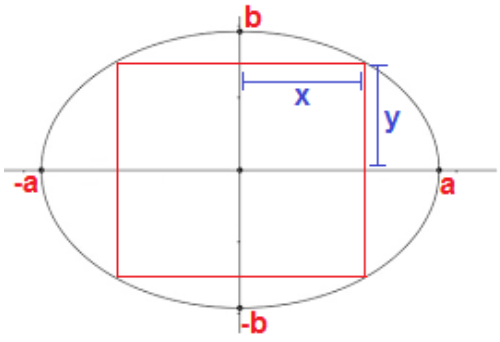
$$y = 4x + 7 = 4\left(-\frac{28}{17}\right) + 7 = -\frac{4 \cdot 28}{17} + \frac{7 \cdot 17}{17} = \frac{7 \cdot 17 - 4 \cdot 28}{17} = \frac{7}{17}$$

De este modo, el punto perteneciente a la recta $y = 4x + 7$ que esta más cerca del origen es aquel de coordinadas:

$$x = -\frac{28}{17} \quad y = \frac{7}{17}$$

Problema 5.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



Recordando la ecuación de la elipse despejaremos y en función de x

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \;\Rightarrow\; \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=\frac{a^2-x^2}{a^2} \;\Rightarrow\; y^2=\frac{b^2}{a^2}\cdot(a^2-x^2)$$

Consideraremos el caso en que $y>0$, pues por simetría la solución que nos de para $y>0$ será el mismo valor que nos dará para $y<0$

De este modo:

$$y=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}\cdot(a^2-x^2)}=\sqrt{\frac{b^2}{a^2}}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}$$

De este modo, la función de área queda determinada por:

$$A(x)=4\cdot x\cdot y(x)=4\cdot x\cdot\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2-x^2}=4\cdot\frac{b}{a}\cdot[x\cdot\sqrt{a^2-x^2}]$$

Para encontrar el punto donde se da el área máxima, debemos encontrar el punto x tal que $A'(x)=0$

$$A'(x)=4\cdot\frac{b}{a}\cdot[(x)'\cdot(\sqrt{a^2-x^2})+(x)\cdot(\sqrt{a^2-x^2})']=\frac{4b}{a}\cdot\left[1\cdot(\sqrt{a^2-x^2})+(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-x^2}}\cdot(-2x)\right]$$

$$=\frac{4b}{a}\cdot\left[\sqrt{a^2-x^2}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]=\frac{4b}{a}\cdot\left[\frac{a^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}-\frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]=\frac{4b}{a}\cdot\left[\frac{a^2-x^2-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]=\frac{4b}{a}\cdot\left[\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]$$

De este modo, si $A'(x)=0$, entonces:

$$\frac{4b}{a}\cdot\left[\frac{a^2-2x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\right]=0 \;\Rightarrow\; a^2-2x^2=0 \;\Rightarrow\; 2x^2=a^2 \;\Rightarrow\; x^2=\frac{a^2}{2}$$

Tomaremos el valor de $x>0$, pues por simetría de una elipse el valor de $x<0$ tendrá la misma magnitud que el valor de $x>0$ pero con signo distinto. De este modo:

$$x=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

Ahora despejaremos y a partir de este valor de x:

$$y=\frac{b}{a}\cdot\left(\sqrt{a^2-x^2}\right)=\frac{b}{a}\cdot\left(\sqrt{a^2-\left[\frac{a}{\sqrt{2}}\right]^2}\right)=\frac{b}{a}\cdot\left(\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}\right)=\frac{b}{a}\cdot\left(\sqrt{\frac{a^2}{2}}\right)=\frac{b}{a}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)=\frac{b}{\sqrt{2}}$$

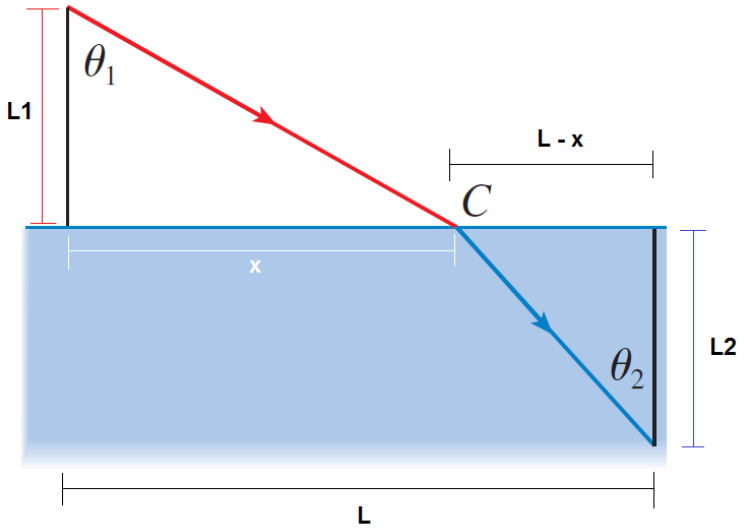
De este modo, el área máxima es:

$$A = 4 \cdot x \cdot y = 4 \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{b}{\sqrt{2}} = \frac{4ab}{2} = 2ab$$

$$\boxed{A = 2ab}$$

Problema 6.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



Notemos que $L1$, $L2$ y L son constantes y que x es la única variable.

La distancia desde A hasta C es $\sqrt{x^2 + (L1)^2}$

Como la velocidad de la luz en el aire es v_1, entonces el tiempo que se demora la luz en llegar desde A hasta C es:

$$t_1 = \frac{\sqrt{x^2 + (L1)^2}}{v_1}$$

La distancia desde C hasta B es $\sqrt{(L-x)^2 + (L2)^2}$

Como la velocidad de la luz en el aire es v_2, entonces el tiempo que se demora la luz en llegar desde C hasta B es:

$$t_2 = \frac{\sqrt{(L-x)^2 + (L2)^2}}{v_2}$$

De este modo, el tiempo que se demora la luz en recorrer desde A hasta B es:

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + (L1)^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(L-x)^2 + (L2)^2}}{v_2}$$

Ahora, para encontrar el tiempo mínimo que se demora la luz en recorrer esa distancia, debemos encontrar un x tal que $t'(x) = 0$

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 + (L1)^2}} \cdot (2x) + \frac{1}{v_2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{(L-x)^2 + (L2)^2}} \cdot 2(L-x) \cdot (-1)$$

$$= \frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + (L1)^2}} - \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + (L2)^2}}$$

De este modo, para que $t'(x) = 0$ (o para que haya optimalidad) debe ocurrir que:

$$\frac{1}{v_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + (L1)^2}} = \frac{1}{v_2} \cdot \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + (L2)^2}}$$

Notemos que como:

$$sin(\theta_1) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + (L1)^2}} \qquad sin(\theta_2) = \frac{(L-x)}{\sqrt{(L-x)^2 + (L2)^2}}$$

Entonces en las condiciones de optimalidad se tiene que:

$$\frac{sin(\theta_1)}{v_1} = \frac{sin(\theta_2)}{v_2}$$

Despejando se obtiene que:

$$\boxed{\frac{sin(\theta_1)}{sin(\theta_2)} = \frac{v_1}{v_2}}$$

Demostrando así la Ley de Snell.

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 9

Antiderivadas e integrales

1. Contenidos

Definición

Una función F recibe el nombre de **antiderivada** de f sobre un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para toda x en I

Teorema

Si F es una antiderivada de f sobre un intervalo I, entonces la antiderivada más general de f sobre I es:

· $$F(x) + C$$

Tabla de formulas de antiderivación

Sea $F' = f$ y $G' = g$

Función	Antiderivada particular
$c \cdot f(x)$	$c \cdot F(x)$
$f(x) + g(x)$	$F(x) + G(x)$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\frac{1}{x}$	$ln\|x\|$
e^x	e^x
$cos(x)$	$sin(x)$

Función	Antiderivada particular
$sin(x)$	$-cos(x)$
$sec^2(x)$	$tan(x)$
$sec(x) \cdot tan(x)$	$sec(x)$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$sin^{-1}(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$tan^{-1}(x)$

Definición

El **área** A de la región S que se encuentra debajo de la función continua f es el límite de la suma de las áreas de los rectángulos de aproximación:

· $$A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} [f(x_1) \cdot \Delta x + f(x_2) \cdot \Delta x + ... + f(x_n) \cdot \Delta x]$$

Definición de integral definida

Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, divida el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos de igual ancho $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. Haga que $x_0 = a$ y $x_n = b$ sean los puntos extremos de estos subintervalos y elija $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$ como los **puntos muestras** en estos subintervalos, de modo que x_i^* se encuentre en el $i-esimo$ subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Entonces la **integral definida de f, desde a hasta b es:**

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x$$

siempre que exista este límite, si existe, f es integrable en $[a, b]$.

Teorema

Si f es continua en $[a, b]$, o si f tiene únicamente un número finito de saltos discontinuos, entonces f es integrable en $[a, b]$; es decir, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Teorema

Si f es integrable en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $x_i = a + i \cdot \Delta x$

Propiedades de las sumatorias

- $\sum_{i=1}^{n} c = n \cdot c$
- $\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i$
- $\sum_{i=1}^{n} [a_i + b_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$
- $\sum_{i=1}^{n} [a_i - b_i] = \sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{n} b_i$

Sumatorias importantes

- $\sum_{i=1}^{n} i = \dfrac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
- $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Regla del punto medio

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_i}) \cdot \Delta x = \Delta x \cdot [f(\overline{x_1}) + f(\overline{x_2}) + ... + f(\overline{x_n})]$$

donde $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ y $\overline{x_i} = \frac{1}{2}(x_{i-1} + x_i)$ = punto medio de $[x_{i-1}, x_i]$

Propiedades de la integral

1. $\int_a^b c\ dx = c \cdot (b-a)$, donde c es cualquier constante

2. $\int_a^b [f(x) + g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx + \int_a^b g(x)\ dx$

3. $\int_a^b c \cdot f(x)\ dx = c \cdot \int_a^b f(x)\ dx$, donde c es cualquier constante

4. $\int_a^b [f(x) - g(x)]\ dx = \int_a^b f(x)\ dx - \int_a^b g(x)\ dx$

5. $\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx = \int_a^b f(x)\ dx$

6. $\int_a^b f(x)\ dx = -\int_b^a f(x)\ dx$

7. $\int_a^a f(x)\ dx = 0$

Propiedades de comparación de la integral

1. Si $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, entonces: $\int_a^b f(x) \geq 0$

2. Si $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, entonces: $\int_a^b f(x) \geq \int_a^b g(x)$

3. Si $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, entonces: $m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) \leq M \cdot (b-a)$

2. Problemas

Problema 1. Encuentre la antiderivada más general de las siguientes funciones.

$f(x) = \frac{1}{2} \cdot x^2 - 2 \cdot x + 6$

$f(x) = 3 \cdot e^x + 7 \cdot sec^2(x)$

$f(u) = \dfrac{u^4 + 3 \cdot \sqrt{u}}{u^2}$

$g(\theta) = cos(\theta) - 5 \cdot sin(\theta)$

$f(x) = \dfrac{2 + x^2}{1 + x^2}$

Problema 2. Encuentre f.

$f'(x) = 8x^3 + 12x + 3, \quad f(1) = 6$

$f'(t) = 2cos(t) + sec^2(t), \quad -\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} \quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$

$f''(x) = 24x^2 + 2x + 10, \quad f(1) = 5, \quad f'(1) = -3$

$f''(\theta) = sin(\theta) + cos(\theta), \quad f(0) = 3, \quad f'(0) = 4$

Problema 3. Estime el área debajo de la gráfica de $f(x) = 1 + x^2$ de $x = -1$ hasta $x = 2$ con tres rectángulos de aproximación, usando:

i) Puntos extremos de la derecha
ii) Puntos extremos de la izquierda
iii) Puntos medios

Problema 4. Exprese el límite como una integral definida sobre el intervalo dado.

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} x_i \cdot ln([x_i]^2 + 1) \cdot \Delta x \right], \quad [2, 6]$

$\lim\limits_{n\to\infty} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \sqrt{2x_i + [x_i]^2} \cdot \Delta x \right], \quad [1, 8]$

Problema 5. Use la forma de la definición de integral para evaluar la integral.

$\int_1^4 (x^2 + 2x - 5)dx$

Problema 6. Evalue la integral interpretandola en terminos de areas.

$\int_{-3}^{0}(1+\sqrt{9-x^2})\ dx$

Problema 7. Aplique las propiedades de las integrales para verificar la desigualdad sin evaluar las integrales.

$\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ dx \leq \int_0^1 \sqrt{1+x}\ dx$

$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\ dx \leq 2\sqrt{2}$

$\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{24}$

Problema 8. Exprese los siguientes limites como una integral definida:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}\right] \qquad\qquad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right]$$

3. Soluciones

Problema 1.

$$\int \left(\frac{1}{2}\cdot x^2 - 2\cdot x + 6\right) dx = \frac{1}{2}\cdot \int \left(x^2\right) dx - 2\cdot \int (x)\, dx + 6\cdot \int (1)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}\cdot \frac{x^3}{3} - 2\cdot \frac{x^2}{2} + 6\cdot x + C = \frac{x^3}{6} - x^2 + 6x + C$$

$$\int (3\cdot e^x + 7\cdot sec^2(x))dx = 3\cdot \int (e^x)dx + 7\cdot \int (sec^2(x))dx = 3\cdot e^x + 7\cdot tan(x) + C$$

$$\int \left(\frac{u^4 + 3\cdot \sqrt{u}}{u^2}\right) du = \int \left(\frac{u^4}{u^2}\right) du + 3\cdot \int \left(\frac{\sqrt{u}}{u^2}\right) du = \int \left(u^2\right) du + 3\cdot \int \left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{u^2}\right) du$$

$$= \int \left(u^2\right) du + 3\cdot \int \left(u^{-\frac{3}{2}}\right) du = \frac{u^3}{3} + 3\cdot \frac{u^{\left(-\frac{3}{2}+1\right)}}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)} + C = \frac{u^3}{3} + 3\cdot \frac{u^{\left(-\frac{3}{2}+1\right)}}{\left(-\frac{3}{2}+1\right)} + C$$

$$= \frac{u^3}{3} + 3\cdot \frac{u^{\left(-\frac{1}{2}\right)}}{\left(-\frac{1}{2}\right)} + C = \frac{u^3}{3} - 6u^{-\frac{1}{2}} = \frac{u^3}{3} - \frac{6}{\sqrt{u}} + C$$

$$\int (cos(\theta) - 5\cdot sin(\theta))d\theta = \int (cos(\theta))d\theta - 5\cdot \int (sin(\theta))d\theta = sin(\theta) - 5\cdot(-cos(\theta)) + C = sin(\theta) + 5\cdot cos(\theta) + C$$

$$\int \left(\frac{2+x^2}{1+x^2}\right) dx = \int \left(\frac{1+(1+x^2)}{1+x^2}\right) dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{1+x^2}{1+x^2}\right) dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + 1\right) dx$$

$$= \int \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx + \int (1)\, dx = arctan(x) + x + C$$

Problema 2. Encuentre f.

Notemos que:

$$f(x) = \int (8x^3 + 12x + 3)dx = 8 \cdot \int x^3 dx + 12 \cdot \int x \; dx + 3 \cdot \int 1 \; dx$$

$$= 8 \cdot \frac{x^4}{4} + 12 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x + C = 2x^4 + 6x^2 + 3x + C$$

Ahora calculamos $f(1)$ y obtenemos:

$$f(1) = 2 \cdot (1)^4 + 6 \cdot (1)^2 + 3 \cdot (1) + C = 2 + 6 + 3 + C = 11 + C$$

Como $f(1) = 6$, entonces $11 + C = 6 \;\Rightarrow\; \boxed{C = -5}$

De este modo:

$$f(x) = 2x^4 + 6x^2 + 3x - 5$$

$$f(t) = \int (2cos(t) + sec^2(t))dt = 2 \cdot \int cos(t)dt + \int sec^2(t)dt = 2sin(t) + tan(t) + C$$

Ahora, calcularemos $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$:

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + tan\left(\frac{\pi}{3}\right) + C = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} + C = \sqrt{3} + \sqrt{3} + C = 2\sqrt{3} + C$$

Y como $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4$, entonces $C + 2\sqrt{3} = 4 \;\Rightarrow\; \boxed{C = 4 - 2\sqrt{3}}$

De este modo:

$$f(t) = 2sin(t) + tan(t) + 4 - 2\sqrt{3}$$

$$f'(x) = \int (24x^2 + 2x + 10)dx = 24 \cdot \int x^2 \; dx + 2 \cdot \int x \; dx + 10 \cdot \int 1 \; dx$$

$$= 24 \cdot \frac{x^3}{3} + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 10 \cdot x + C = 8x^3 + x^2 + 10x + C$$

Ahora calcularemos $f'(1)$:

$$f'(1) = 8 \cdot (1)^3 + (1)^2 + 10 \cdot (1) + C = 8 + 1 + 10 + C = 19 + C$$

Y como $f'(1) = -3$ entonces $C + 19 = -3 \ \Rightarrow \ \boxed{C = -22}$

De este modo:

$$f'(x) = 8x^3 + x^2 + 10x - 22$$

Ahora:

$$f(x) = \int f'(x)dx = \int (8x^3 + x^2 + 10x - 22)dx = 8 \cdot \int x^3 \ dx + \int x^2 \ dx + 10 \cdot \int x \ dx - 22 \cdot \int 1 \ dx$$

$$= 8 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 10 \cdot \frac{x^2}{2} - 22 \cdot x + C = 2x^4 + \frac{x^3}{3} + 5x^2 - 22x + C$$

Ahora calcularemos $f(1)$:

$$f(1) = 2 \cdot (1)^4 + \frac{(1)^3}{3} + 5 \cdot (1)^2 - 22 \cdot 1 + C = 2 + \frac{1}{3} + 5 - 22 + C = -\frac{44}{3} + C$$

Y como $f(1) = 5$, entonces $-\frac{44}{3} + C = 5 \ \Rightarrow \ C = 5 + \frac{44}{3} = \frac{59}{3}$

Finalmente llegamos a que:

$$f(x) = 2x^4 + \frac{x^3}{3} + 5x^2 - 22x + \frac{59}{3}$$

$$f'(\theta) = \int f''(\theta) \ d\theta = \int (sin(\theta) + cos(\theta))d\theta = \int sin(\theta)d\theta + \int cos(\theta)d\theta = -cos(\theta) + sin(\theta) + C_1$$

Ahora calcularemos $f'(0)$:

$$f'(0) = -cos(0) + sin(0) + C_1 = -1 + C_1$$

Como $f'(0) = 4$, entonces $C_1 - 1 = 4 \ \Rightarrow \ C_1 = 5$

De este modo:

$$f'(\theta) = -cos(\theta) + sin(\theta) + 5$$

Ahora notemos que:

$$f(\theta) = \int f'(\theta)\ d\theta = \int (-cos(\theta) + sin(\theta) + 5)\ d\theta = -sin(\theta) - cos(\theta) + 5\theta + C_2$$

Ahora calcularemos $f(0)$:

$$f(0) = -sin(0) - cos(0) + 5 \cdot 0 + C_2 = -1 + C_2$$

Y como $f(0) = 3$, entonces $C_2 - 1 = 3 \ \Rightarrow \ \boxed{C_2 = 4}$

De este modo:

$$f(\theta) = -sin(\theta) - cos(\theta) + 5\theta + 4$$

Problema 3.

En primer lugar como estamos usando 3 rectángulos de aproximación, entonces veremos a que intervalos de x corresponden estos rectángulos.

Primero el Δx es $\frac{2-(-1)}{3} = \frac{3}{3} = 1$.

Por lo tanto:

El primer rectángulo corresponde al intervalo $[-1, 0]$

El segundo rectángulo corresponde al intervalo $[0, 1]$

El tercer rectángulo corresponde al intervalo $[1, 2]$

Ahora analizaremos caso por caso:

i) Los puntos extremos de la derecha corresponden a $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$.

De este modo, la aproximación es:

$$f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 = f(0) + f(1) + f(2) = (1 + 0^2) + (1 + 1^2) + (1 + 2^2) = 1 + 2 + 5 = 8$$

---

ii) Los puntos extremos de la izquierda corresponden a $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$

De este modo, la aproximación es:

$$f(-1)\cdot 1 + f(0)\cdot 1 + f(1)\cdot 1 = f(-1) + f(0) + f(1) = (1+(-1)^2) + (1+0^2) + (1+1^2) = 2+1+2 = 5$$

---

iii) Los puntos medios corresponden a $x = -\frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{2}$ y $x = \frac{3}{2}$

De este modo, la aproximación es:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 1 = f\left(-\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right] + \left[1+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right] = 1+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4} = 3+\frac{11}{4} = \frac{23}{4}$$

Problema 4.

Recordando que:

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\Delta x}$$

De este modo:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot ln([x_i]^2+1)\cdot\Delta x\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\cdot\Delta x\right]$$

con $h(x_i) = x_i \cdot ln([x_i]^2+1)$

Ahora como estamos trabajando en el intervalo $[2,6]$, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} h(x_i)\cdot\Delta x\right] = \int_2^6 h(x)dx = \int_2^6 x\cdot ln(x^2+1)\ dx$$

Así finalmente tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot ln([x_i]^2+1)\cdot\Delta x\right] = \int_2^6 x\cdot ln(x^2+1)\ dx$$

Como estamos trabajando en el intervalo $[1, 8]$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\sqrt{2x_i+[x_i]^2}\cdot\Delta x\right]=\int_1^8\sqrt{2x+x^2}dx$$

Problema 5.

Recordemos que por definición:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\cdot\Delta x$$

Ahora notemos que:

$$\Delta x=\frac{(b-a)}{n}$$

y que elegiremos a x_i^* extremos por la izquierda de cada intervalo.

De este modo:

$$x_i^*=a+(i-1)\cdot\frac{(b-a)}{n}$$

Así tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(x_i^*)\cdot\Delta x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(i-1)\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\cdot\frac{(b-a)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(i-1)\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

Finalmente:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+(i-1)\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

Así tenemos que:

$$\int_1^4(x^2+2x-5)dx=\int_1^4 x^2\ dx+2\cdot\int_1^4 x\ dx-5\cdot\int_1^4 1\ dx$$

Ahora nos centraremos en resolver cada integral por separado por definición:

$$\int_1^4 x^2\,dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(4-1)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(1+(i-1)\cdot\frac{(4-1)}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right)\right]$$

Notemos que:

$$f\left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right) = \left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right)^2 = 1^2+2\cdot 1\cdot\left[(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right]+\left[(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right]^2$$

$$= 1+i\cdot\frac{6}{n}-\frac{6}{n}+(i-1)^2\cdot\frac{9}{n^2} = 1+i\cdot\frac{6}{n}-\frac{6}{n}+(i^2-2i+1)\cdot\frac{9}{n^2}$$

$$= 1+i\cdot\frac{6}{n}-\frac{6}{n}+i^2\cdot\frac{9}{n^2}-2i\cdot\frac{9}{n^2}+1\cdot\frac{9}{n^2} = \left[\frac{9}{n^2}\right]\cdot i^2+\left[\frac{6}{n}-\frac{18}{n^2}\right]\cdot i+\left[1-\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}\right]$$

$$= \left[\frac{9}{n^2}\right]\cdot i^2+\left[\frac{6n-18}{n^2}\right]\cdot i+\left[\frac{n^2-6n+9}{n^2}\right]$$

Así, se llego a que:

$$f\left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right) = \left[\frac{9}{n^2}\right]\cdot i^2+\left[\frac{6n-18}{n^2}\right]\cdot i+\left[\frac{n^2-6n+9}{n^2}\right]$$

Reemplazando, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\left[\frac{9}{n^2}\right]\cdot i^2+\left[\frac{6n-18}{n^2}\right]\cdot i+\left[\frac{n^2-6n+9}{n^2}\right]\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i^2+\frac{(18n-54)}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} i+\frac{(3n^2-18n+27)}{n^3}\cdot\sum_{i=1}^{n} 1\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(18n-54)}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(3n^2-18n+27)}{n^3}\cdot n\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{54n^3+81n^2+27n}{6n^3}+\frac{18n^3-36n^2-54n}{2n^3}+\frac{3n^3-18n^2+27n}{n^3}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{126n^3-135n^2+27n}{6n^3}\right] = \frac{126}{6} = 21$$

De este modo:

$$\boxed{\int_1^4 x^2\ dx = 21}$$

Ahora calcularemos $\int_1^4 x\ dx$:

$$\int_1^4 x\ dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(4-1)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(1+(i-1)\cdot\frac{(4-1)}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(1+i\cdot\frac{3}{n}-\frac{3}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{(n-3)}{n}+i\cdot\frac{3}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3(n-3)}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}1+\frac{9}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}i\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3(n-3)}{n^2}\cdot n+\frac{9}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3n^2-9n}{n^2}+\frac{9n^2+9n}{2n^2}\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{15n^2-9n}{2n^2}\right] = \frac{15}{2}$$

De este modo:

$$\boxed{\int_1^4 x\ dx = \frac{15}{2}}$$

Finalmente calcularemos $\int_1^4 1\ dx$:

$$\int_1^4 1\ dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(4-1)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(1+(i-1)\cdot\frac{(4-1)}{n}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(1+(i-1)\cdot\frac{3}{n}\right)\right]$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}1\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{3}{n}\cdot n\right] = \lim_{n\to\infty}[3] = 3$$

De este modo:

$$\boxed{\int_1^4 1\ dx = 3}$$

Ahora volvemos al calculo de $\int_1^4 (x^2+2x-5)dx$:

$$\int_1^4 (x^2+2x-5)dx = \int_1^4 x^2\ dx + 2\cdot\int_1^4 x\ dx - 5\cdot\int_1^4 1\ dx = 21 + 2\cdot\frac{15}{2} - 5\cdot 3 = 21+15-15 = 21$$

Problema 6.

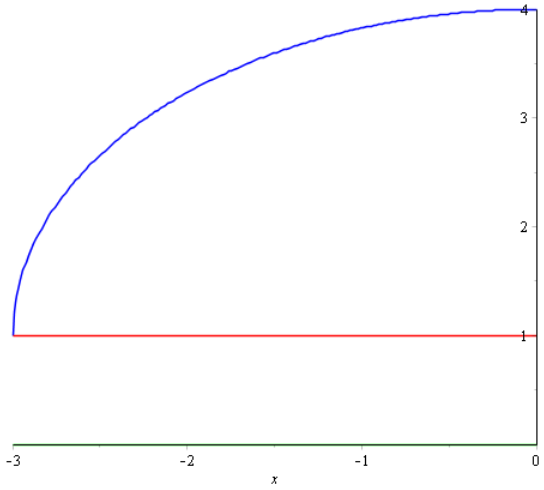
Lo que nos piden es calcular:

$$\int_{-3}^{0} (1 + \sqrt{9 - x^2})\, dx$$

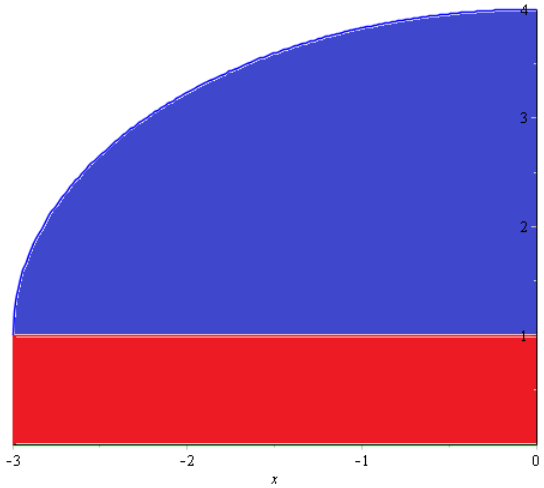
Utilizando la interpretación de la integral como área

Lo primero que haremos es graficar a $f(x) = 1 + \sqrt{9 - x^2}$ y mostrar a que área equivale la integral

Primero mostraremos al gráfico:



Ahora mostraremos a que área equivale la integral pedida:



La integral corresponde a la suma del área en azul más el área en rojo

El área en rojo es un rectángulo de altura 1 y de ancho 3, por lo tanto, el área en rojo es 3

El área en azul corresponde a un cuarto de circunferencia de radio 3, por lo tanto, esta area es de: $\frac{1}{4} \cdot 3^2 \cdot \pi = \frac{9\pi}{4}$

Por lo tanto:

$$\int_{-3}^{0} (1 + \sqrt{9 - x^2})\ dx = 3 + \frac{9\pi}{4} = \frac{12}{4} + \frac{9\pi}{4} = \frac{12 + 9\pi}{4}$$

De esta forma:

$$\boxed{\int_{-3}^{0} (1 + \sqrt{9 - x^2})\ dx = \frac{12 + 9\pi}{4}}$$

Problema 7.

Notemos que:

$$x^2 \leq x \qquad \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \qquad 1 + x^2 \leq 1 + x \qquad \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \qquad \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{1 + x} \qquad \forall x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx \leq \int_0^1 \sqrt{1 + x} dx$$

Notemos que $f(x) = 1 + x^2$ toma su menor valor en $x = 0$ y su mayor valor en $x = 1$ y $x = -1$ para el intervalo $[-1, 1]$

Ahora como $f(0) = 1 + 0^2 = 1$ y $f(1) = 1 + 1^2 = 2$, entonces:

$$f(0) \leq 1 + x^2 \leq f(1) \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq 1 + x^2 \leq 2 \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{1} \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \sqrt{1 + x^2} \leq \sqrt{2} \qquad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} 1dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{2}dx$$

$$\Rightarrow \quad \int_{-1}^{1} 1dx \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \leq \sqrt{2} \cdot \int_{-1}^{1} 1dx$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \leq \sqrt{2} \cdot 2$$

$$\Rightarrow \quad 2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}dx \leq 2\sqrt{2}$$

Notemos que $cos(x)$ es decreciente para el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ y por ende también lo es para el intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$, de este modo:

$$cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq cos(x) \leq cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \qquad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \leq cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\Rightarrow \qquad \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2}dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{3}}{2}dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1dx \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} 1dx$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right) \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{3\pi}{12} - \frac{2\pi}{12}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{12} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{\sqrt{2}\pi}{24} \leq \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} cos(x)dx \leq \frac{\sqrt{3}\pi}{24}}$$

Problema 8.

Recordando que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

Por lo tanto, la idea es a partir de una expresión encontrar el valor de a y b, además de encontrar $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^5}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^4}\cdot\frac{1}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i^4}{n^4}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4\right]$$

Para determinar a, b y $f(x)$, lo haremos al igualar ambas expresiones:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

De esta forma, hacemos $\boxed{(b-a)=1}$ y reemplazando en la igualdad anterior nos queda que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\cdot\frac{1}{n}\right)\right]$$

Ahora fijamos $a=0$, por lo tanto $\boxed{f(x)=x^4}$

Como $\boxed{a=0}$ y $(b-a)=1 \;\Rightarrow\; \boxed{b=1}$

De esta forma:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4\right] = \int_0^1 x^4dx = \frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5} = \frac{1}{5}$$

Así se concluye finalmente que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^4\right] = \frac{1}{5}}$$

Lo primero que haremos será establecer la igualdad planteada en el caso anterior y a partir de esta determinar a y b, además de definir $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

Establecemos que $\boxed{(b-a)=1}$ y reemplazamos en la igualdad anterior para luego determinar a y $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{1}{n}\right)\right]$$

Ahora fijamos $a=0$ y definimos $\boxed{f(x)=\frac{1}{1+x^2}}$

Como $\boxed{a=0}$ y $(b-a)=1\ \Rightarrow\ \boxed{b=1}$

De esta manera:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right]=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=arctan(1)-arctan(0)=\frac{\pi}{4}-0=\frac{\pi}{4}$$

Finalmente llegamos a que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{i}{n}\right)^2}\right]=\frac{\pi}{4}}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 10

Teorema fundamental del Calculo e Integrales

1. Contenidos

Teorema Fundamental del Cálculo, Parte I

Si f es continua en $[a, b]$, entonces la función g definida por:

$$g(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt \qquad a \leq x \leq b$$

es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), y $g'(x) = f(x)$.

Igualdad importante

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t) \cdot dt\right] = f(x)$$

Teorema Fundamental del Cálculo, Parte II

Si f es continua en $[a, b]$, entonces:

$$\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$$

donde F es una antiderivada de f, es decir, una función tal que $F' = f$.

Teorema Fundamental del Cálculo (I y II)

Si f es continua en $[a, b]$, entonces:

1. Si $g(x) = \int_a^x f(t) \cdot dt$, entonces $g'(x) = f(x)$.

2. $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$, donde F es cualquier antiderivada de f, es decir, $F' = f$

Tabla de integrales indefinidas

$\int cf(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$	$\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$
$\int kdx = k \cdot x + C$	$\int \frac{dx}{x} = ln\|x\| + C$
$\int x^n dx \quad (n \neq -1) = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)} + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int cos(x)dx = sin(x) + C$
$\int sin(x)dx = -cos(x) + C$	$\int csc^2(x) = -cot(x) + C$
$\int sec^2(x)dx = tan(x) + C$	$\int csc(x) \cdot cot(x) = -csc(x) + C$
$\int sec(x) \cdot tan(x)dx = sec(x) + C$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}(x) + C$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = tan^{-1}(x) + C$	$\int cosh(x)dx = sinh(x) + C$
$\int sinh(x)dx = cosh(x) + C$	

Teorema del cambio total

La integral de una relación de cambio es el cambio total:

$\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$

2. Problemas

Problema 1. Encuentre la derivada de las siguientes funciones:

$g(y) = \int_2^y t^2 sin(t)dt$

$F(x) = \int_x^\pi \sqrt{1 + sec(t)}dt$

$h(x) = \int_2^{\frac{1}{x}} arctan(t)dt$

$h(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}dr$

Problema 2. Evalue las siguientes integrales.

$\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2)dt \qquad \int_0^1 x^{\frac{4}{5}}dx \qquad \int_\pi^{2\pi} cos(\theta)d\theta \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2(t)dt \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(\theta) \cdot tan(\theta)d\theta$

$\int_1^9 \frac{1}{2x}dx \qquad \int_0^1 10^x dx \qquad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}dt \qquad \int_0^1 \frac{4}{t^2+1}dt \qquad \int_0^1 cosh(t)dt$

$\int_0^\pi f(x)dx$

$$f(x) = \begin{cases} sin(x) & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ cos(x) & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \end{cases}$$

Problema 3. Determine la derivada de las siguientes funciones:

$g(x) = \int_{tan(x)}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt$

$y = \int_{cos(x)}^{5x} cos(u^2)du$

Problema 4. Encuentre el intervalo sobre el cual la siguiente curva es cóncava hacia arriba.

$$\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt$$

Problema 5. Evalue el limite reconociendo la suma de Riemann y su integral asociada.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}} + \sqrt{\frac{n+2}{n}} + ... + \sqrt{\frac{n+n}{n}}\right)\right] \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \frac{i^3}{n^4} \qquad \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}} + \sqrt{\frac{2}{n}} + ... + \sqrt{\frac{n}{n}}\right)\right]$$

Problema 6. Encontrar una función f tal que:

$$\int_a^{x^2} f(t) \cdot ln(t)\ dt = x^3 \left[ln(x) - \tfrac{1}{3}\right], a > 1$$

3. Soluciones

Problema 1.

Lo primero que haremos es encontrar un resultado importante

Por TFC tenemos que:

$$\frac{d}{du}\left(\int_a^u f(t)dt\right) = f(u)$$

De este modo:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = \frac{d}{dg(x)}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)\cdot\frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dg(x)}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)\cdot g'(x)$$

Sea $u = g(x)$, entonces:

$$\frac{d}{dg(x)}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right)\cdot g'(x) = \frac{d}{du}\left(\int_a^{u} f(t)dt\right)\cdot g'(x) = f(u)\cdot g'(x)$$

Volviendo a reemplazar con $u = g(x)$ llegamos a que:

$$f(u)\cdot g'(x) = f(g(x))\cdot g'(x)$$

Finalmente llegamos a que:

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = f(g(x))\cdot g'(x)}$$

Ahora partiremos resolviendo los ejercicios propiamente tal.

$$g'(y) = \frac{dg(y)}{dy} = \frac{d}{dy}\left(\int_2^{y} t^2 sin(t)dt\right) = y^2 sin(y)$$

$$F'(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_x^{\pi} \sqrt{1 + sec(t)}dt\right) = \sqrt{1 + sec(x)}$$

$$h'(x) = \frac{dh(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_2^{\frac{1}{x}} arctan(t)dt\right) = \left[arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \cdot \left(\frac{1}{x}\right)' = \left[arctan\left(\frac{1}{x}\right)\right] \cdot -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \cdot arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$h'(x) = \frac{dh(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^{x^2} \sqrt{1 + r^3}dr\right) = \sqrt{1 + [x^2]^3} \cdot (x^2)' = 2x\sqrt{1 + x^6}$$

Problema 2.

$$\int_1^4 (5 - 2t + 3t^2)dt = \left(5t - t^2 + t^3\right)\Big]_1^4 = \left(5 \cdot 4 - (4)^2 + (4)^3\right) - (5 - 1 + 1)$$

$$= (20 - 16 + 64) - (5) = 63$$

$$\int_0^1 x^{\frac{4}{5}}dx = \left(\frac{x^{\frac{4}{5}+1}}{\left(\frac{4}{5}+1\right)}\right)\Big]_0^1 = \left(\frac{x^{\frac{9}{5}}}{\left(\frac{9}{5}\right)}\right)\Big]_0^1 = \frac{5}{9} \cdot x^{\frac{9}{5}}\Big]_0^1 = \frac{5}{9} \cdot 1^{\frac{9}{5}} - \frac{5}{9} \cdot 0^{\frac{9}{5}} = \frac{5}{9}$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} cos(\theta)d\theta = sin(\theta)\Big]_{\pi}^{2\pi} = sin(2\pi) - sin(\pi) = 0$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2(t)dt = tan(t)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - tan(0) = 1 - 0 = 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sec(\theta)\cdot tan(\theta)d\theta = sec(\theta)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = sec\left(\frac{\pi}{4}\right) - sec(0) = \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{1}{cos(0)} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} - \frac{1}{1} = \frac{2}{\sqrt{2}} - 1 = \sqrt{2} - 1$$

$$\int_1^9 \frac{1}{2x}dx = \frac{1}{2}\cdot\int_1^9 \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}\cdot\left(ln(x)\Big]_1^9\right) = \frac{1}{2}\cdot(ln(9) - ln(1)) = \frac{1}{2}\cdot ln(9) = ln\left(9^{\frac{1}{2}}\right) = ln(\sqrt{9}) = ln(3)$$

$$\int_0^1 10^x dx = \frac{10^x}{ln(10)}\Big]_0^1 = \frac{10^1}{ln(10)} - \frac{10^0}{ln(10)} = \frac{10}{ln(10)} - \frac{1}{ln(10)} = \frac{9}{ln(10)}$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{6}{\sqrt{1-t^2}}dt = 6\cdot\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = 6\cdot\left(sin^{-1}(t)\Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = 6\cdot\left(sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 6\cdot\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 6\cdot\left(\frac{2\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 6\cdot\frac{\pi}{6} = \pi$$

$$\int_0^1 \frac{4}{t^2+1}dt = 4\cdot\int_0^1 \frac{1}{t^2+1}dt = 4\cdot\left(tan(t)\Big]_0^1\right) = 4\cdot[tan(1) - tan(0)] = 4\cdot tan(1)$$

$$\int_0^1 cosh(t)dt = sinh(t)\Big]_0^1 = sinh(1) - sinh(0) = sinh(1)$$

$$\int_0^\pi f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi f(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin(x)dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi cos(x)dx$$

$$= \left([-cos(x)]\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\right) + \left(sin(x)\Big]_{\frac{\pi}{2}}^\pi\right) = -cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-cos(0)) + sin(\pi) - sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

$$= -0 - (-1) + 0 - 1 = 0$$

Problema 3.

$$g'(x) = \frac{dg(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{tan(x)}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_{tan(x)}^{0} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt + \int_{0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(-\int_{0}^{tan(x)} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt + \int_{0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt\right) = -\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{tan(x)} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt\right)$$

$$= -\left[\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{tan(x)} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt\right)\right] + \left[\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{x^2} \frac{1}{\sqrt{2+t^4}}dt\right)\right] = -\frac{1}{\sqrt{2+[tan(x)]^4}} \cdot [tan(x)]' + \frac{1}{\sqrt{2+[x^2]^4}} \cdot (x^2)'$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2+tan^4(x)}} \cdot sec^2(x) + \frac{1}{\sqrt{2+x^8}} \cdot 2x = -\frac{sec^2(x)}{\sqrt{2+tan^4(x)}} + \frac{2x}{\sqrt{2+x^8}}$$

Así se concluye finalmente que:

$$\boxed{g'(x) = -\frac{sec^2(x)}{\sqrt{2+tan^4(x)}} + \frac{2x}{\sqrt{2+x^8}}}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_{cos(x)}^{5x} cos(u^2)du\right) = \frac{d}{dx}\left(\int_{cos(x)}^{0} cos(u^2)du + \int_{0}^{5x} cos(u^2)du\right)$$

$$= -\frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{cos(x)} cos(u^2)du\right) + \frac{d}{dx}\left(\int_{0}^{5x} cos(u^2)du\right) = -cos([cos(x)]^2) \cdot [cos(x)]' + cos([5x]^2) \cdot [5x]'$$

$$= -cos(cos^2(x)) \cdot [-sin(x)] + cos(25x^2) \cdot 5 = cos(cos^2(x)) \cdot sin(x) + 5 \cdot cos(25x^2)$$

Finalmente tenemos que:

$$\boxed{y' = cos(cos^2(x)) \cdot sin(x) + 5 \cdot cos(25x^2)}$$

Problema 4.

Sea:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt$$

$$\Rightarrow \ f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2}dt\right) = \frac{1}{1+x+x^2}$$

$$\Rightarrow \ f''(x) = \frac{(1)' \cdot [1+x+x^2] - (1) \cdot [1+x+x^2]'}{[1+x+x^2]^2} = -\frac{[1+2x]}{[1+x+x^2]^2}$$

Para que la función $f(x)$ sea cóncava hacía arriba debe ocurrir que $f''(x) > 0$

$$-\frac{[1+2x]}{[1+x+x^2]^2} > 0$$

Notemos que $1+x+x^2$ y que nunca valdrá 0

$$\Rightarrow \ -[1+2x] > 0$$

$$\Rightarrow \ [1+2x] < 0$$

$$\Rightarrow \ x < -\frac{1}{2}$$

De este modo:

$$\boxed{\text{Concava hacia arriba } = \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)}$$

Problema 5.

Recordando que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\right]$$

Donde $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ con:

$$x_i = a + (i-1)\cdot\frac{(b-a)}{n}$$

Ahora comenzaremos a resolver los ejercicios:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}+...+\sqrt{\frac{n+n}{n}}\right)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{n+i}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\right]$$

Ahora debemos igualar esta expresión a la inicial para obtener los valores de a, b y $f(x)$

Lo primero que haremos será definir que el $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ que utilizaremos será:

$$c_i = x_{i+1} = a + i\cdot\frac{(b-a)}{n}$$

De este modo:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

Así al igualar ambas expresiones tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

De acá decimos que $(b-a)=1$ y reemplazando en la ecuación anterior tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+\frac{i}{n}\right)\right]$$

Ahora fijaremos $\boxed{a=0}$ y $\boxed{f(x)=\sqrt{1+x}}$

Como $a=0$ y $(b-a)=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

Así de este modo, tenemos que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}+...+\sqrt{\frac{n+n}{n}}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1+\frac{i}{n}}\right]=\int_0^1\sqrt{1+x}\;dx}$$

Para esta caso nuevamente utilizaremos $c_i = x_{i+1}$, de este modo:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

Ahora nuevamente igualamos la expresión que queremos calcular a el resultado recién calculado y obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^3}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\right]$$

De este modo decimos que $(b-a)=1$ y esto lo reemplazamos en la igualdad anterior obteniendo que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^3\right]$$

Ahora fijamos $\boxed{a=0}$ y $\boxed{f(x)=x^3}$

Como $a=0$ y $(b-a)=1 \;\Rightarrow\; \boxed{b=1}$

Así llegamos finalmente a que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{i^3}{n^4}\right]=\int_0^1 x^3\;dx}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+...+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\right]$$

Nuevamente elegiremos $c_i = x_{i+1}$ y estableceremos la igualdad de modo de poder obtener a, b y $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{(b-a)}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{(b-a)}{n}\right)\right]$$

Lo primero que haremos será definir $(b-a)=1$ y volvemos a reemplazar en la igualdad anterior con $(b-a)=1$

De este modo, nos queda que:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{i}{n}}\right]=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f\left(a+i\cdot\frac{1}{n}\right)\right]$$

Ahora fijamos $\boxed{a=0}$ y $\boxed{f(x)=\sqrt{x}}$

Y como $(b-a)=1 \Rightarrow \boxed{b=1}$

De esta forma, concluimos que:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{2}{n}}+...+\sqrt{\frac{n}{n}}\right)\right]=\int_0^1\sqrt{x}\,dx}$$

Problema 6.

Lo que haremos será derivar ambos lados de la siguiente ecuación respecto a x

$$\int_a^{x^2} f(t) \cdot ln(t)\ dt = x^3 \left[ln(x) - \frac{1}{3} \right]$$

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{x^2} f(t) \cdot ln(t)\ dt \right) = \frac{d}{dx}\left(x^3 \left[ln(x) - \frac{1}{3} \right] \right)$$

Ahora:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{x^2} f(t) \cdot ln(t)\ dt \right) = f(x^2) \cdot ln(x^2) \cdot (2x)' = f(x^2) \cdot 2 \cdot ln(x) \cdot 2 = 4 \cdot ln(x) \cdot f(x^2)$$

Por otro lado:

$$\frac{d}{dx}\left(x^3 \left[ln(x) - \frac{1}{3} \right] \right) = \frac{d}{dx}\left(x^3 \cdot ln(x) - \frac{x^3}{3} \right) = (x^3)' \cdot ln(x) + (x^3) \cdot [ln(x)]' - x^2$$

$$= 3x^2 \cdot ln(x) + \frac{x^3}{x} - x^2 = 3x^2 \cdot ln(x) + x^2 - x^2 = 3x^2 \cdot ln(x)$$

Ahora volvemos a igualar ambas ecuaciones reemplazando con el desarrollos de ambos lados de la desigualdad:

$$4 \cdot ln(x) \cdot f(x^2) = 3x^2 \cdot ln(x)$$

Ahora comenzamos a despejar $f(x^2)$

$$\Rightarrow\ 4 \cdot f(x^2) = 3x^2$$

$$\Rightarrow\ f(x^2) = \frac{3}{4} \cdot x^2$$

De esta manera reemplazando con $u = x^2$ se llega a:

$$\Rightarrow\ f(u) = \frac{3}{4} \cdot u$$

Por lo tanto:

$$\boxed{f(x) = \frac{3x}{4}}$$

Pero esto no queda solo ahí. Si bien es cierto, nosotros encontramos el valor de $f(x)$, pero la ecuación:

$$\int_a^{x^2} f(t) \cdot ln(t)\ dt = x^3 \left[ln(x) - \frac{1}{3}\right]$$

no se cumple para todo 'a', por lo tanto hay que encontrar ese 'a'

Reemplazamos en la ecuación con $x = \sqrt{a}$ y obtenemos que:

$$\int_a^{a} f(t) \cdot ln(t)\ dt = [\sqrt{a}]^3 \left[ln(\sqrt{a}) - \frac{1}{3}\right]$$

Por un lado, es claro que $\int_a^a f(t) \cdot ln(t)\ dt = 0$ porque el intervalo de integración va desde a hasta a

De este modo, nos queda que:

$$[\sqrt{a}]^3 \left[ln(\sqrt{a}) - \frac{1}{3}\right] = 0$$

Al resolver la ecuación, por un lado llegamos a que:

$$[\sqrt{a}]^3 = 0$$

Por lo tanto: $a = 0$ y como $a > 1$, entonces descartamos esta solución

Por otro lado, al resolver la ecuación llegamos a que:

$$ln(\sqrt{a}) - \frac{1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow ln(a^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot ln(a) = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow ln(a) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow a = e^{\frac{2}{3}}$$

Y como $e^{\frac{2}{3}} > 1$, entonces consideraremos a $\boxed{a = e^{\frac{2}{3}}}$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 11

Regla se sustitución, Área entre curvas y Volumenes

1. Contenidos

Regla de sustitución

Si $u = g(x)$ es una función derivable cuyo alcance es un intervalo I, y f es continua sobre I, entonces:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(u)du$$

Integral importante

$$\int tan(x)dx = ln|sec(x)| + C$$

Regla de sustitución para integrales definidas

Si $u = g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y f es continua sobre el rango de $u = g(x)$, entonces:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$$

Integrales de funciones simétricas

Suponga que f es continua sobre $[-a, a]$, entonces:

(a) Si f es par $[f(-x) = f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$

(b) Si f es par $[f(-x) = -f(x)]$, entonces $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Área entre curvas

El área A de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$, donde f y g son continuas y $f(x) \geq g(x)$ para toda x en $[a, b]$ es:

$$A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

Área entre curvas (forma general)

El área entre las curvas $y = f(x)$ e $y = g(x)$ y entre $x = a$ y $x = b$ es:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Definición de volumen

Sea S un sólido que está entre $x = a$ y $x = b$. Si el área de la sección transversal de S en el plano P_x, a través de x y perpendicular al eje x, es $A(x)$, donde A es una función continua, entonces el **volumen** de S es:

$$V = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} A(x_i)\Delta x = \int_a^b A(x)dx$$

2. Problemas

Problema 1. Evalué las siguientes integrales indefinidas:

$$\int x \cdot sin(x^2)dx \qquad \int x^2(x^3+5)^9dx \qquad \int \frac{1}{5-3x}dx \qquad \int e^x \cdot sin(e^x)dx \qquad \int \frac{x}{x^2+1}dx$$

$$\int \frac{[ln(x)]^2}{x}dx \qquad \int e^x\sqrt{1+e^x}dx \qquad \int \sqrt{cot(x)}csc^2(x)dx$$

Problema 2. Evalue las siguientes integrales definidas.

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx \quad \int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{ln(x)}} \quad \int_0^{\pi} sec^2\left(\frac{t}{4}\right)dt \quad \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan^3(\theta)d\theta \quad \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \quad \int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx$$

Problema 3. Determine el area entre las siguientes curvas, para esto primero determine si se integra sobre x o y.

$y = sin(x)$, $y = e^x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$

$y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 2$

$y = 12 - x^2$, $y = x^2 - 6$

$4x + y^2 = 12$, $x = y$

$y = cos(x)$, $y = 2 - cos(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$

Problema 4. Calcule los valores de c tal que el área de la región delimitada por las parábolas $y = x^2 - c^2$, y $y = c^2 - x^2$ es 576

Problema 5. Encuentre el volumen del solido obtenido al hacer girar la región delimitada por las curvas dadas alrededor de la recta especificada. Grafique la región, el sólido y un disco o arandela representativos.

$y = 2 - \frac{x}{2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. Alrededor del eje x

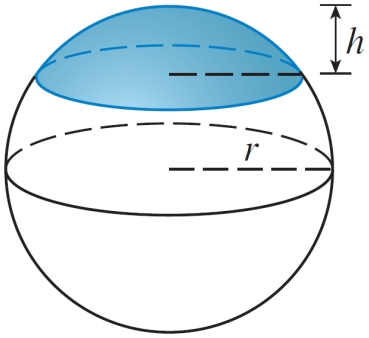
$y = e^{-x}$, $y = 1$, $x = 2$. Alrededor de $y = 2$

Problema 6. Calcular

$$\int \sqrt{e^x - 1}dx$$

Hint: Considere la sustitución $e^x - 1 = u^2$

Problema 7. Calcule el volumen de la tapa de una esfera con radio r y altura h, como la que se muestra a continuación:



3. Soluciones

Problema 1.

$$\int x \cdot sin(x^2)dx$$

Sea $u = x^2 \ \Rightarrow \ du = 2xdx \ \Rightarrow \ x \cdot dx = \dfrac{du}{2}$

De este modo:

$$\int x \cdot sin(x^2)dx = \int sin(x^2) \cdot x \cdot dx = \int sin(u) \cdot \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int sin(u)du = \frac{1}{2} \cdot [-cos(u)] + C = -\frac{cos(u)}{2} + C$$

Nuevamente reemplazamos con $u = x^2$, de este modo:

$$-\frac{cos(u)}{2} + C = -\frac{cos(x^2)}{2} + C$$

Así finalmente llegamos a que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\int x \cdot sin(x^2) \ dx = -\frac{cos(x^2)}{2} + C}$$

$$\int x^2(x^3 + 5)^9 dx$$

Sea $u = x^3 + 5 \ \Rightarrow \ du = 3x^2 \cdot dx \ \Rightarrow \ x^2 \cdot dx = \dfrac{du}{3}$

De este modo:

$$\int x^2(x^3 + 5)^9 dx = \int (x^3 + 5)^9 x^2 \cdot dx = intu^9 \cdot \frac{du}{3} = \frac{1}{3} \cdot \int u^9 du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{10}}{10} + C = \frac{u^{10}}{30} + C$$

Ahora volviendo a reemplazar con $u = x^3 + 5$, tenemos que:

$$\frac{u^{10}}{30} + C = \frac{[x^3 + 5]^{10}}{30} + C$$

Así finalmente se tiene que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\int x^2(x^3 + 5)^9 dx = \frac{[x^3 + 5]^{10}}{30} + C}$$

$$\int \frac{1}{5-3x}dx$$

Sea $u = 5 - 3x \;\Rightarrow\; du = -3dx \;\Rightarrow dx = -\frac{du}{3}$

De este modo:

$$\int \frac{1}{5-3x}dx = \int \frac{1}{u} \cdot \left(-\frac{du}{3}\right) = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{du}{u} = -\frac{1}{3} \cdot ln|u| + C = ln\left(|u|^{-\frac{1}{3}}\right) + C$$

Volviendo a reemplazar con $u = 5 - 3x$, obtenemos que:

$$ln\left(|u|^{-\frac{1}{3}}\right) + C = ln\left(|5-3x|^{-\frac{1}{3}}\right) + C$$

Finalmente llegamos a que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{5-3x}dx = ln\left(|5-3x|^{-\frac{1}{3}}\right) + C}$$

$$\int e^x \cdot sin(e^x)dx$$

Sea $u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x \cdot dx$

De este modo:

$$\int e^x \cdot sin(e^x)dx = \int sin(e^x) \cdot e^x \cdot dx = \int sin(u) \cdot du = -cos(u) + C = -cos(e^x) + C$$

Así finalmente se concluye que:

$$\Rightarrow \boxed{\int e^x \cdot sin(e^x)dx = -cos(e^x) + C}$$

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx$$

Sea $u = x^2 + 1 \;\Rightarrow\; du = 2xdx \;\Rightarrow\; x \cdot dx = \frac{du}{2}$

De este modo:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \int \frac{1}{x^2+1}\cdot x \cdot dx = \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\cdot ln|u| + C$$

Reemplazando nuevamente con $u = x^2+1$, obtenemos que:

$$\frac{1}{2}\cdot ln|u| + C = \frac{1}{2}\cdot ln|x^2+1| + C = \frac{1}{2}\cdot ln(x^2+1) + C = ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + C$$

Así finalmente tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{x}{x^2+1}dx = ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) + C}$$

$$\int \frac{[ln(x)]^2}{x}dx$$

Sea $u = ln(x) \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}\cdot dx$

De este modo:

$$\int \frac{[ln(x)]^2}{x}dx = \int [ln(x)]^2\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = \int u^2\cdot du = \frac{u^3}{3} + C$$

Sustituyendo nuevamente con $u = ln(x)$ obtenemos que:

$$\frac{u^3}{3} + C = \frac{[ln(x)]^3}{3} + C$$

Así finalmente tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{[ln(x)]^2}{x}dx = \frac{[ln(x)]^3}{3} + C}$$

$$\int e^x \sqrt{1+e^x} dx$$

Sea $u = 1 + e^x \;\Rightarrow\; du = e^x \cdot dx$

De este modo:

$$\int e^x \sqrt{1+e^x} dx = \int \sqrt{1+e^x} \cdot e^x \cdot dx = \int \sqrt{u} \cdot du = \int u^{\frac{1}{2}} du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \cdot u\sqrt{u} + C$$

Nuevamente reemplazando con $u = 1 + e^x$ obtenemos que:

$$\frac{2}{3} \cdot u\sqrt{u} + C = \frac{2}{3} \cdot (1+e^x)\sqrt{1+e^x} + C$$

Finalmente se obtiene que:

$$\Rightarrow \boxed{\int e^x \sqrt{1+e^x} dx = \frac{2}{3} \cdot (1+e^x)\sqrt{1+e^x} + C}$$

$$\int \sqrt{cot(x)} csc^2(x) dx$$

Sea $u = cot(x) \;\Rightarrow\; du = -csc^2(x)dx \;\Rightarrow\; cos^2(x)dx = -du$

$$\int \sqrt{cot(x)} csc^2(x) dx = \int \sqrt{u} \cdot [-du] = -\int \sqrt{u} du = -\int u^{\frac{1}{2}} du = -\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

$$= -\frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} + C = -\frac{2}{3} \cdot u \cdot \sqrt{u} + C = -\frac{2}{3} \cdot cot(x) \cdot \sqrt{cot(x)} + C$$

Finalmente llegamos a que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \sqrt{cot(x)} csc^2(x) dx = -\frac{2}{3} \cdot cot(x) \cdot \sqrt{cot(x)} + C}$$

Problema 2.

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx$$

Sea $u = \frac{1}{x} \;\Rightarrow\; du = -\frac{1}{x^2}\cdot dx \;\Rightarrow\; -du = \frac{1}{x^2}\cdot dx$

Si $x = 1 \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{1} = 1$

Si $x = 2 \;\Rightarrow\; u = \frac{1}{2}$

De esta forma:

$$\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = \int_1^2 e^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \int_1^{\frac{1}{2}} e^u \cdot (-du) = -\int_1^{\frac{1}{2}} e^u \cdot du = \int_{\frac{1}{2}}^1 e^u\, du$$

$$= e^u \Big]_{\frac{1}{2}}^1 = e^1 - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}$$

De esta forma:

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}\, dx = e - \sqrt{e}}$$

$$\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{ln(x)}}$$

Sea $u = ln(x) \;\Rightarrow\; du = \frac{1}{x}\cdot dx$

Si $x = e \;\Rightarrow\; u = ln(e) = 1$

Si $x = e^4 \;\Rightarrow\; u = ln(e^4) = 4 \cdot ln(e) = 4 \cdot 1 = 4$

De este modo:

$$\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{ln(x)}} = \int_e^{e^4} \frac{1}{\sqrt{ln(x)}} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \int_1^4 \frac{1}{\sqrt{u}} \cdot du = \int_1^4 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)} \Big]_1^4$$

$$= \frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \Big]_1^4 = 2 \cdot u^{\frac{1}{2}} \Big]_1^4 = 2\sqrt{u} \Big]_1^4 = 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1} = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4 - 2 = 2$$

Así, finalmente tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{ln(x)}} = 2}$$

$$\int_0^{\pi} sec^2\left(\frac{t}{4}\right) dt$$

Sea $u = \frac{t}{4} \Rightarrow du = \frac{dt}{4} \Rightarrow 4du = dt$

Si $t = 0 \Rightarrow t = \frac{0}{4} = 0$

Si $t = \pi \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$

De este modo:

$$\int_0^{\pi} sec^2\left(\frac{t}{4}\right) dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2(u)\, 4du = 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{4}} sec^2(u)\, du = 4 \cdot \left(tan(u)\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right)$$
$$= 4 \cdot \left(tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - tan(0)\right) = 4 \cdot (1 - 0) = 4$$

Así finalmente tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\pi} sec^2\left(\frac{t}{4}\right) dt = 4}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan^3(\theta) d\theta$$

Usando que $tan^2(\theta) = 1 + sec^2(\theta)$, entonces:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan^3(\theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan(\theta) \cdot tan^2(\theta) d\theta = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan(\theta) \cdot [1 + sec^2(\theta)] d\theta$$
$$= \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan(\theta) d\theta + \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan(\theta) \cdot sec^2(\theta) d\theta$$

Ahora notemos que:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan(\theta) d\theta = \left(-ln|cos(\theta)|\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}\right) = -ln|cos\left(\frac{\pi}{6}\right)| + ln|cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)| = -ln|cos\left(\frac{\pi}{6}\right)| + ln|cos\left(\frac{\pi}{6}\right)| = 0$$

Y por otro lado, resolveremos a:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan(\theta) \cdot sec^2(\theta) d\theta$$

Sea $u = tan(\theta) \ \Rightarrow \ du = sec^2(\theta) d\theta$

Si $\theta = \frac{\pi}{6} \ \Rightarrow \ u = tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Si $\theta = -\frac{\pi}{6} \ \Rightarrow \ u = tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \dfrac{sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -\dfrac{sin\left(\frac{\pi}{6}\right)}{cos\left(\frac{\pi}{6}\right)} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

De esta forma:

$$\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan(\theta) \cdot sec^2(\theta) d\theta = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} u du = \frac{u^2}{2}\Big]_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{9}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{9}\right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

Así finalmente, tenemos que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} tan^3(\theta) d\theta = 0}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

Sea $u = sin^{-1}(x) \ \Rightarrow \ du = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$

Si $x = \dfrac{1}{2} \ \Rightarrow \ u = sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$

Si $x = 0 \ \Rightarrow \ u = sin^{-1}(0) = 0$

De este modo:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} u \ du = \frac{u^2}{2}\Big]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{1}{2} \cdot (0)^2 = \frac{\pi^2}{72}$$

Así finalmente tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{sin^{-1}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi^2}{72}}$$

$$\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx$$

Sea $u = a^2 - x^2 \;\Rightarrow\; du = -2x \cdot dx \;\Rightarrow\; -2du = x \cdot dx$

Si $x = a \;\Rightarrow\; u = a^2 - a^2 = 0$

Si $x = 0 \;\Rightarrow\; u = a^2 - 0^2 = a^2$

De esta forma:

$$\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx = \int_0^a \sqrt{a^2-x^2} \cdot x \cdot dx = \int_{a^2}^0 \sqrt{u} \cdot (-2du) = 2 \cdot \int_0^{a^2} u^{\frac{1}{2}}\, du = 2 \cdot \left(\frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\left(\frac{1}{2}+1\right)} \right]_0^{a^2} \right)$$

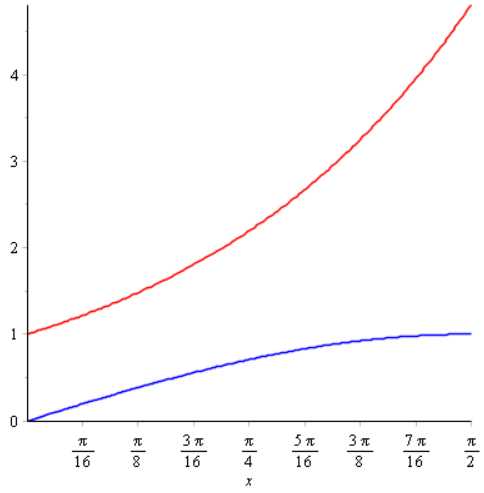
$$= 2 \cdot \left(\frac{u\sqrt{u}}{\left(\frac{3}{2}\right)} \right]_0^{a^2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot u\sqrt{u} \right]_0^{a^2} \right) = 2 \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot (a^2)\sqrt{a^2} - \frac{2}{3} \cdot (0^2)\sqrt{0^2} \right) = \frac{4}{3} \cdot a^3$$

Finalmente, tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}dx = \frac{4}{3} \cdot a^3}$$

Problema 3.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



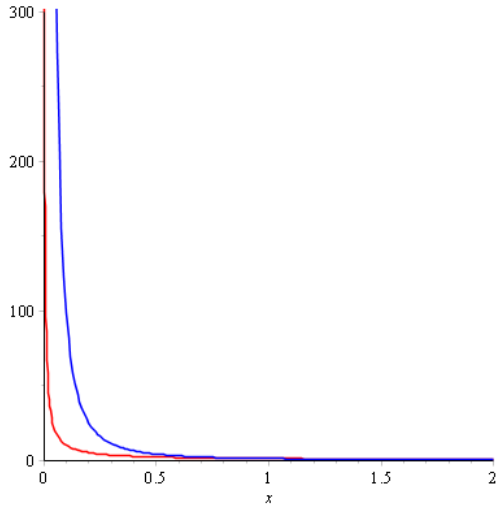
Notemos que el grafico en rojo es el de e^x y en azul es el de $sin(x)$

Lo que notamos es que se debe integrar sobre el eje X, de este modo el área corresponde a:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^x - sin(x))dx = (e^x + cos(x))\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\frac{\pi}{2}} + cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (e^0 + cos(0)) = e^{\frac{\pi}{2}} + 0 - (1+1) = e^{\frac{\pi}{2}} - 2$$

De esta forma el área pedida vale $e^{\frac{\pi}{2}} - 2$

Grafiquemos la situación:



El gráfico en rojo corresponde a el de $\frac{1}{x}$ y el gráfico en azul corresponde a el de $\frac{1}{x^2}$

Notemos que la intersección entre las dos graficas se da cuando $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = x$

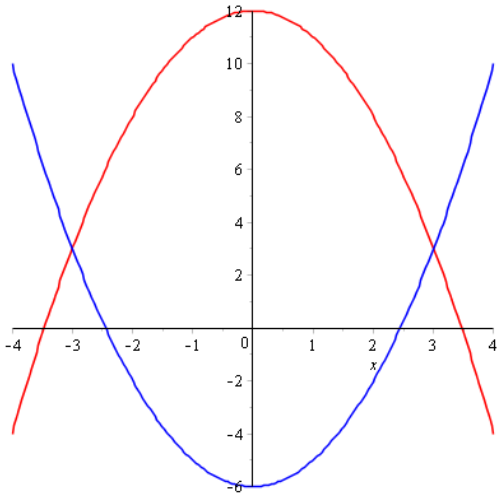
Como $x \neq 0$ entonces la unica solución de la ecuación $x^2 = x$ es $x = 1$

Y se deberá integrar sobre el eje X

De este modo, el área entre ambas curvas es:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) dx = \left(ln(x) + \frac{1}{x}\right)\Big]_1^2 = \left(ln(2) + \frac{1}{2}\right) - \left(ln(1) + \frac{1}{1}\right)$$
$$= ln(2) + \frac{1}{2} - 1 = ln(2) - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot ln(2)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2 \cdot ln(2) - 1}{2}$$

Grafiquemos la situación:



La curva roja corresponde a $12 - x^2$ y la curva azul a $x^2 - 6$

Ahora veremos en que puntos se intersectan las curvas:

$$12 - x^2 = x^2 - 6 \Rightarrow 12 + 6 = x^2 + x^2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

Y además como se debe integrar sobre el eje X, entonces:

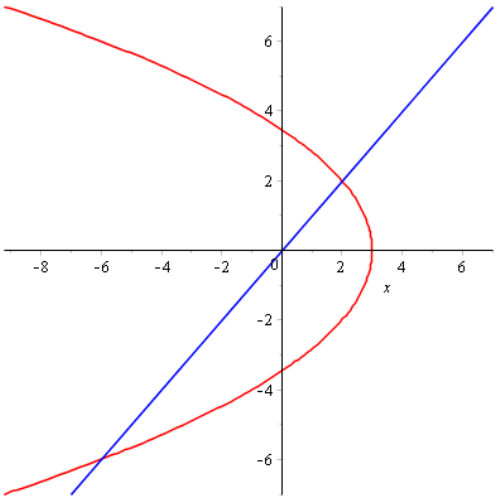
$$\int_{-3}^{3}([12-x^2]-[x^2-6])dx = \int_{-3}^{3}(12-x^2-x^2+6)dx = \int_{-3}^{3}(18-2x^2)dx$$

$$= 18\cdot\int_{-3}^{3}1\,\mathrm{d}x - 2\cdot\int_{-3}^{3}x^2\,dx = 18\cdot\left(x\right]_{-3}^{3}\Big) - 2\cdot\left(\frac{x^3}{3}\right]_{-3}^{3}\Big)$$

$$= 18\cdot(3-[-3]) - 2\cdot\left(\frac{(3)^3}{3}-\frac{(-3)^3}{3}\right) = 18\cdot 6 - 2\cdot(9-[-9]) = 108-2\cdot 18 = 72$$

De este modo, el área pedida es 72.

Grafiquemos la situación:



Notemos que el gráfico en rojo corresponde a $4x+y^2=12$ y el gráfico en azul corresponde a $x=y$.

Ahora buscaremos en que puntos coinciden ambas curvas.

Si $4x+y^2=12 \;\Rightarrow\; x=\dfrac{12-y^2}{4}$ y como $x=y$, entonces resolvemos:

$$\frac{12-y^2}{4}=y \;\Rightarrow\; 12-y^2=4y \;\Rightarrow\; 0=y^2+4y-12=(y+6)(y-2)$$

De este modo, las intersecciones se da en $y=-6$ y en $y=2$.

Y por otro lado, se debe integrar sobre el eje Y

De este modo, el área corresponde a:

$$\int_{-6}^{2}\left(\frac{12-y^2}{4}-y\right)dy=\int_{-6}^{2}\left(\frac{12-y^2}{4}-\frac{4y}{4}\right)dy=\int_{-6}^{2}\left(\frac{12-y^2-4y}{4}\right)dy$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\int_{-6}^{2}\left(12-y^2-4y\right)dy=\frac{1}{4}\cdot\left(12y-\frac{y^3}{3}-2y^2\right)\Big]_{-6}^{2}$$

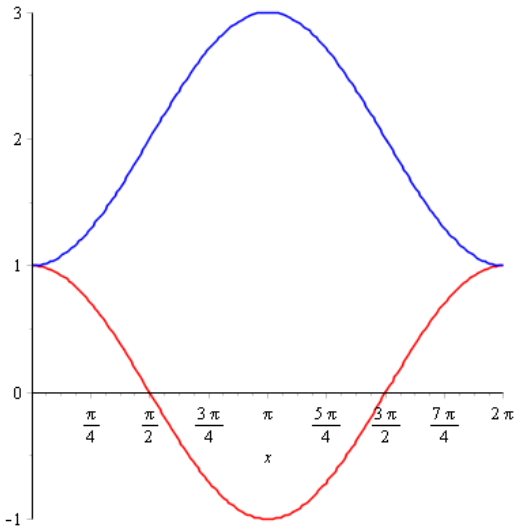
$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\left(12\cdot 2-\frac{2^3}{3}-2\cdot 2^2\right)-\left(12\cdot(-6)-\frac{(-6)^3}{3}-2\cdot(-6)^2\right)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left[\left(24-\frac{8}{3}-8\right)-(-72+72-72)\right]=\frac{1}{4}\cdot\left[\left(16-\frac{8}{3}\right)-(-72)\right]$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(16-\frac{8}{3}+72\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(88-\frac{8}{3}\right)=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{264}{3}-\frac{8}{3}\right)=\frac{256}{4\cdot 3}=\frac{64}{3}$$

De esta forma, el área pedida es $\frac{64}{3}$

Graficaremos la situación:



Notemos que la curva en rojo corresponde a $cos(x)$ y la curva en azul a $2-cos(x)$

Lo primero que haremos será encontrar los puntos de intersección:

$$cos(x)=2-cos(x)\ \Rightarrow\ 2cos(x)=2\ \Rightarrow\ cos(x)=1\ \Rightarrow\ x=2\pi\cdot k$$

con $k\in\mathbb{Z}$

Así para este caso en particular la intersección es en $x = 0$ y $x = 2\pi$

Además, se debe integrar sobre el eje X

De este modo, el área pedida es:

$$\int_0^{2\pi} ([2 - cos(x)] - cos(x))\ dx = \int_0^{2\pi} (2 - 2cos(x))\ dx = \int_0^{2\pi} 2 \cdot [1 - cos(x)]\ dx$$

$$= 2 \cdot \int_0^{2\pi})1 - cos(x))\ dx = 2 \cdot (x - sin(x)) \Big]_0^{2\pi} = 2 \cdot [(2\pi - sin(2\pi)) - (0 - sin(0))]$$

$$= 2 \cdot (2\pi) = 4\pi$$

De este modo, el área pedida es 4π.

Problema 4.

Lo primero que debemos hacer es determinar los puntos en los que se intersectan las curvas $x^2 - c^2$ y $c^2 - x^2$

$$x^2 - c^2 = c^2 - x^2 \ \Rightarrow\ 2x^2 = 2c^2 \ \Rightarrow\ x^2 = c^2 \ \Rightarrow\ x = \pm c$$

De este modo, el área comprendida entre ambas curvas es:

$$\int_{-c}^{c} [(c^2 - x^2] - [x^2 - c^2])\ dx = \int_{-c}^{c} [c^2 - x^2 - x^2 + c^2)\ dx = \int_{-c}^{c} [2c^2 - 2x^2]\ dx$$

$$= \int_{-c}^{c} 2 \cdot (c^2 - x^2)\ dx = 2 \cdot \int_{-c}^{c} (c^2 - x^2)\ dx = 2 \cdot \left(c^2 \cdot x - \frac{x^3}{3} \right) \Big]_{-c}^{c}$$

$$= 2 \cdot \left[\left(c^2 \cdot c - \frac{c^3}{3} \right) - \left(c^2 \cdot (-c) - \frac{(-c)^3}{3} \right) \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\left(c^3 - \frac{c^3}{3} \right) - \left(-c^3 + \frac{c^3}{3} \right) \right] = 2 \cdot \left(c^3 - \frac{c^3}{3} + c^3 - \frac{c^3}{3} \right)$$

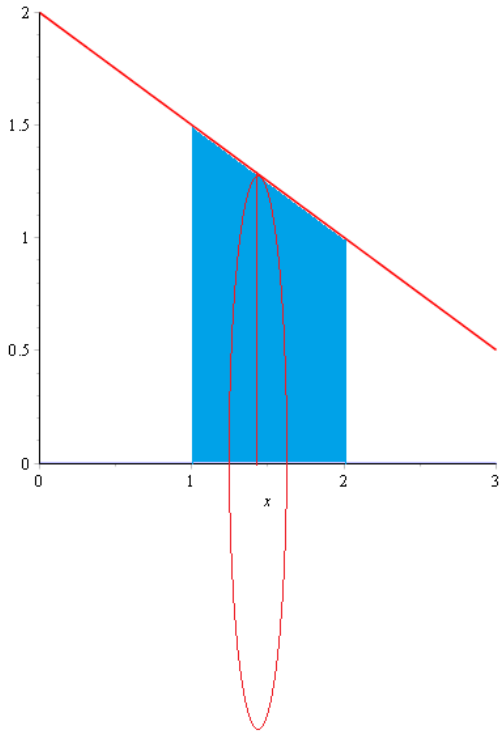
$$= 2 \cdot \left(2c^3 - \frac{2c^3}{3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{6c^3}{3} - \frac{2c^3}{3} \right) = 2 \cdot \left(\frac{4c^3}{3} \right) = \frac{8c^3}{3}$$

Y como queriamos que el área fuera 576, entonces:

$$\frac{8c^3}{3} = 576 \;\Rightarrow\; c^3 = \frac{576 \cdot 3}{8} = 216 \;\Rightarrow\; c = 6$$

Problema 5.

Lo primero que haremos será graficar la situación y el disco correspondiente:



Notemos que el área de este disco es $[y(x)]^2\pi$ y como $y = 2 - \frac{x}{2}$, entonces:

$$dV = [y(x)]^2\pi \; dx = \left[2 - \frac{x}{2}\right]^2 \pi \; dx = \left[4 - 2x + \frac{x^2}{4}\right] \pi \; dx$$

De este modo:

$$V = \int dV = \int_1^2 \left[4 - 2x + \frac{x^2}{4}\right] \pi \; dx = \pi \cdot \int_1^2 \left[4 - 2x + \frac{x^2}{4}\right] \; dx$$

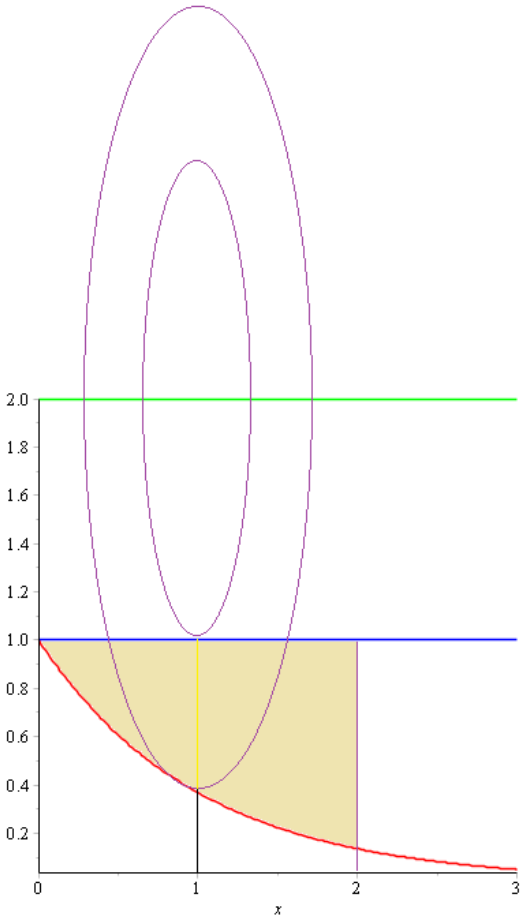
$$= \pi \cdot \left(4x - x^2 + \frac{x^3}{12}\right) \Big]_1^2 = \pi \cdot \left[\left(4 \cdot 2 - 2^2 + \frac{2^3}{12}\right) - \left(4 \cdot 1 - 1^2 + \frac{1^3}{12}\right)\right]$$

$$= \pi \cdot \left[\left(8 - 4 + \frac{8}{12} \right) - \left(4 - 1 + \frac{1}{12} \right) \right] = \pi \cdot \left[\left(4 + \frac{8}{12} \right) - \left(3 + \frac{1}{12} \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[4 + \frac{8}{12} - 3 - \frac{1}{12} \right] = \pi \cdot \left[1 + \frac{7}{12} \right] = \pi \cdot \left[\frac{7}{7} + \frac{1}{7} \right] = \frac{8\pi}{7}$$

De esta manera, el volumen pedido es $\frac{8\pi}{7}$.

Lo primero que debemos hacer, es graficar la situación:



Lo que haremos será determinar el área de la arandela morada que se gráfico.

Es claro que esta área se puede representar como la resta entre el área de dos circunferencias.

Notemos que la linea negra del gráfico más la linea amarilla siempre da como resultado 1 y utilizando que el valor de la linea negra es e^{-x}, entonces el largo de la linea amarilla es $1 - e^{-x}$

De esta manera, observando el gráfico nos damos cuenta que el radio de la circunferencia más grande es: $1 + (1 - e^{-x}) = 2 - e^{-x}$

De esta manera, el área de la circunferencia más grande es: $\pi \cdot [2 - e^{-x}]^2$

Por otro lado, notemos que el área de la circunferencia más chica se puede calcular con su radio, que por gráfico nos damos cuenta que vale 1

De esta forma el área de la circunferencia más chica es: $\pi \cdot 1^2 = \pi$

De esta manera, el diferencial de volumen queda definido por:

$$dV = (\pi \cdot [2 - e^{-x}]^2 - \pi)\ dx = \pi \cdot ([2 - e^{-x}]^2 - 1)$$

$$= \pi \cdot (2^2 - 2 \cdot 2 \cdot e^{-x} + [e^{-x}]^2 - 1) = \pi \cdot (4 - 4 \cdot e^{-x} + e^{-2x} - 1) = \pi \cdot (3 - 4 \cdot e^{-x} + e^{-2x})$$

De esta manera, el volumen pedido es:

$$V = \int dV = \int_1^2 \pi \cdot (3 - 4 \cdot e^{-x} + e^{-2x})\ dx = \pi \cdot \int_1^2 (3 - 4 \cdot e^{-x} + e^{-2x})\ dx$$

$$\pi \cdot \left(3x + 4e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2}\right)\Big]_1^2 = \pi \cdot \left[\left(3 \cdot 2 + 4e^{-2} - \frac{e^{-2 \cdot 2}}{2}\right) - \left(3 \cdot 1 + 4e^{-1} - \frac{e^{-2 \cdot 1}}{2}\right)\right]$$

$$= \pi \cdot \left[\left(6 + 4e^{-2} - \frac{e^{-4}}{2}\right) - \left(3 + 4e^{-1} - \frac{e^{-2}}{2}\right)\right] = \pi \cdot \left(6 + 4e^{-2} - \frac{e^{-4}}{2} - 3 - 4e^{-1} + \frac{e^{-2}}{2}\right)$$

$$= \pi \cdot \left(3 - 4e^{-1} + \frac{9 \cdot e^{-2}}{2} - \frac{e^{-4}}{2}\right)$$

Finalmente el volumen pedido es $\pi \cdot \left(3 - 4e^{-1} + \frac{9 \cdot e^{-2}}{2} - \frac{e^{-4}}{2}\right)$

Problema 6.

Tenemos que calcular:

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx$$

Lo primero que haremos es usar la sustitución $e^x - 1 = u^2$

Si $u^2 = e^x - 1 \ \Rightarrow \ 2 \cdot u \ du = e^x \ dx \ \Rightarrow \ dx = \dfrac{2 \cdot u \ du}{e^x}$

Notemos que como $e^x - 1 = u^2 \ \Rightarrow \ e^x = u^2 + 1$

De esta forma:

$$dx = \frac{2 \cdot u \ du}{e^x} = 2 \cdot \frac{u}{u^2 + 1} \ du$$

Ahora, desarrollamos:

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx = \int \sqrt{u^2} \cdot 2 \cdot \frac{u}{u^2 + 1} \ du = 2 \cdot \int u \cdot \frac{u}{u^2 + 1} \ du = 2 \cdot \int \frac{u^2}{u^2 + 1} \ du$$

$$= 2 \cdot \left[\int \frac{u^2}{u^2 + 1} \ du \right] = 2 \cdot \left[\int \left(\frac{(u^2 + 1) - 1}{u^2 + 1} \right) \ du \right] = 2 \cdot \left[\int \left(1 - \frac{1}{u^2 + 1} \right) \ du \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\int 1 \ du - \int \frac{du}{u^2 + 1} \right] = 2 \cdot [u - arctan(u)] + C$$

Notemos que como $u^2 = e^x - 1 \ \Rightarrow \ u = \sqrt{e^x - 1}$

De esta forma:

$$\int \sqrt{e^x - 1} dx = 2 \cdot [u - arctan(u)] + C = 2 \cdot \left[\sqrt{e^x - 1} - arctan(\sqrt{e^x - 1}) \right] + C$$

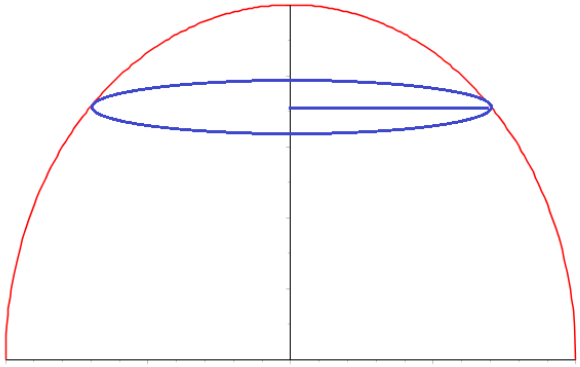
Así, finalmente se concluye que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\int \sqrt{e^x - 1} dx = 2 \cdot \left[\sqrt{e^x - 1} - arctan(\sqrt{e^x - 1}) \right] + C}$$

Problema 7.

Lo primero que haremos será graficar la situación para el hemisferio superior, junto a un disco representativo.

Notemos que el gráfico que haremos será en 2D.



Notemos que el área de este disco lo llamaremos x.

Por otro lado, tenemos que:

$$x^2 + y^2 = r^2 \;\Rightarrow\; x^2 = r^2 - y^2 \;\Rightarrow\; x = \sqrt{r^2 - y^2}$$

De esta forma, el diferencial de volumen esta dado por:

$$dV = x^2 \cdot \pi \; dy = [\sqrt{r^2 - y^2}]^2 \cdot \pi \; dy = [r^2 - y^2] \cdot \pi \; dy$$

Así, llegamos a que:

$$V = \int dV = \int_{r-h}^{r} [r^2 - y^2] \cdot \pi \; dy = \pi \cdot \int_{r-h}^{r} [r^2 - y^2] \; dy$$

$$= \pi \cdot \left(r^2 \cdot y - \frac{y^3}{3} \right) \Big]_{r-h}^{r} = \pi \cdot \left[\left(r^2 \cdot r - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^2 \cdot (r-h) - \frac{(r-h)^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\left(r^3 - \frac{r^3}{3} \right) - \left(r^3 - r^2 \cdot h - \frac{r^3 - 3r^2h + 3rh^2 - h^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\left(\frac{3r^3}{3} - \frac{r^3}{3} \right) - \left(\frac{3r^3}{3} - \frac{3r^2 \cdot h}{3} + \frac{-r^3 + 3r^2h - 3rh^2 + h^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{2r^3}{3} - \left(\frac{3r^3 - 3r^2 \cdot h - r^3 + 3r^2h - 3rh^2 + h^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{2r^3}{3} - \left(\frac{2r^3 - 3r^2 \cdot h + 3r^2h - 3rh^2 + h^3}{3} \right) \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{2r^3}{3} + \frac{-2r^3 + 3r^2 \cdot h - 3r^2h + 3rh^2 - h^3}{3} \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{2r^3 - 2r^3 + 3r^2 \cdot h - 3r^2h + 3rh^2 - h^3}{3} \right]$$

$$= \pi \cdot \left[\frac{3rh^2 - h^3}{3} \right] = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3r - h)$$

De esta forma, el volumen en función de la cantidad h es:

$$\Rightarrow \boxed{V(h) = \frac{\pi h^2}{3} \cdot (3r - h)}$$

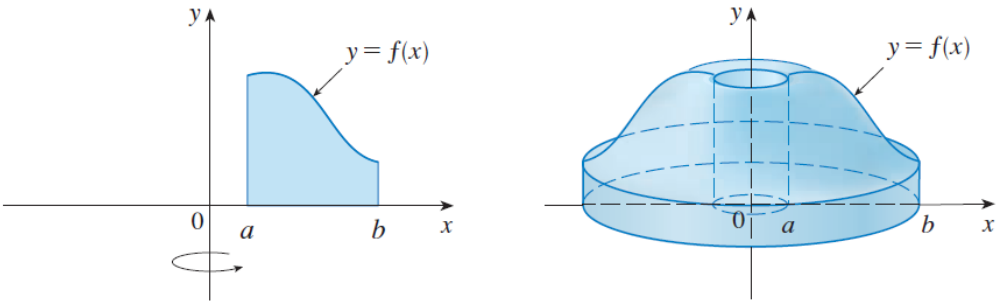
PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 12

Volumenes, valor promedio e integración por partes

1. Contenidos

Volumen mediante cascarones cilíndricos



El volumen del solido de la figura anterior, que se obtiene al hacer girar alrededor del eje y la región bajo la curva $y = f(x)$ desde a hasta b, es:

$$V = \int_a^b 2\pi x f(x) dx$$

donde $0 \leq a < b$

Valor promedio de una función

$$f_{promedio} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un número c en $[a, b]$ tal que:

$$f(c) = f_{promedio} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx$$

Integración por partes

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

$$\int udv = uv - \int vdu$$

2. Problemas

Problema 1. Mediante el método de los cascarones cilíndricos, determine el volumen que se genera al hacer girar alrededor del eje y la región definida por las curvas dadas. Dibuje la región y un cascarón representativo.

$y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$

Problema 2. Mediante el método de los cascarones cilíndricos, determine el volumen que se genera al hacer girar alrededor del eje x la región definida por las curvas dadas. Dibuje la región y un cascarón representativo.

$x = 1 + (y-2)^2$, $x = 2$

Problema 3. Mediante el método de los cascarones cilíndricos, determine el volumen que se genera al hacer girar la región definida por las curvas dadas alrededor del eje especificado . Dibuje la región y un cascarón representativo.

$y = 4x - x^2$, $y = 3$, alrededor de $x = 1$

Problema 4. Determine el valor promedio de la función en el intervalo dado.

$f(t) = t \cdot e^{-t^2}, \quad [0, 5]$

$h(x) = cos^4(x) \cdot sin(x), \quad [0, \pi]$

Problema 5. Encuentre c tal que $f_{promedio} = f(c)$, para $f(x) = (x-3)^2 \quad [2, 5]$.

Problema 6. Si $f_{prom}[a, b]$ denota el valor promedio de f en el intervalo $[a, b]$ y $a < c < b$, demuestre que:

$$f_{prom}[a, b] = \left(\frac{c-a}{b-a}\right) f_{prom}[a, c] + \left(\frac{b-c}{b-a}\right) f_{prom}[c, b]$$

Problema 7. Calcule las siguientes integrales indefinidas:

$$\int e^x sin(x)dx \qquad \int ln(x)dx \qquad \int arctan(4t)dt \qquad \int p^5 ln(p)dp$$

Problema 8. Calcule las siguientes integrales definidas:

$$\int_4^9 \frac{ln(y)}{\sqrt{y}}dy \qquad \int_1^2 \frac{ln(x)}{x^2}dx \qquad \int_0^\pi e^{cos(t)} sin(2t)dt$$

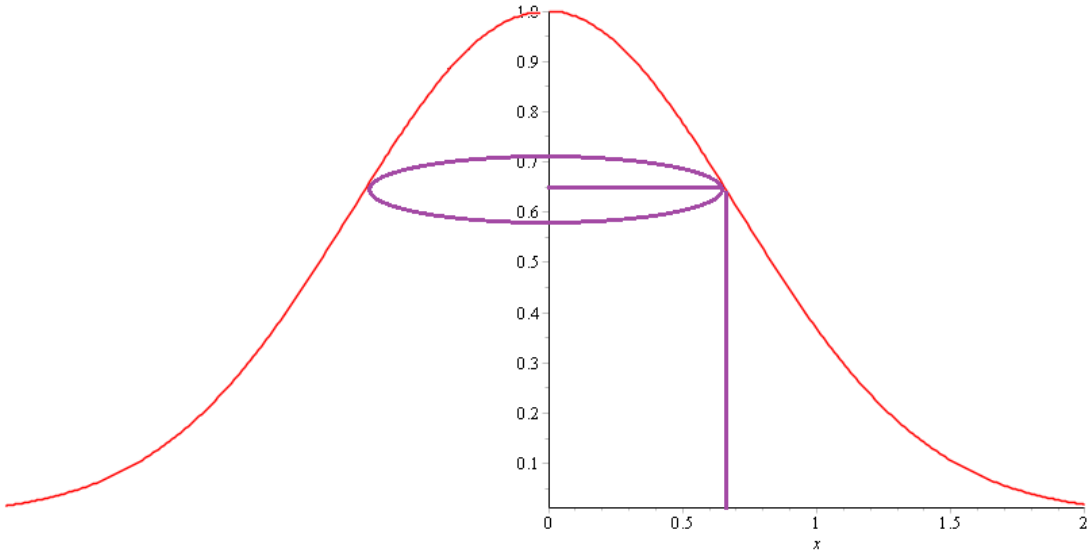
Problema 9. Demuestre la siguiente formula:

$$\int [ln(x)]^n dx = x[ln(x)]^n - n \int [ln(x)]^{n-1} dx$$

3. Soluciones

Problema 1.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



Notemos que el área del cascaron cilíndrico es:

$$2\pi \cdot x \cdot f(x) = 2\pi \cdot x \cdot e^{-x^2}$$

De este modo, el diferencial de volumen es:

$$dV = 2\pi x e^{-x^2}\ dx$$

Así, llegamos a que:

$$V = \int dV = \int_0^1 2\pi x e^{-x^2}\ dx = \pi \cdot \int_0^1 2x e^{-x^2}\ dx$$

Sea $u = -x^2 \ \Rightarrow\ du = -2x\ dx \ \Rightarrow\ -du = 2x\ dx$

Si $x = 0$, entonces $u = -0^2 = 0$

Si $x = 1$, entonces $u = -1^2 = -1$

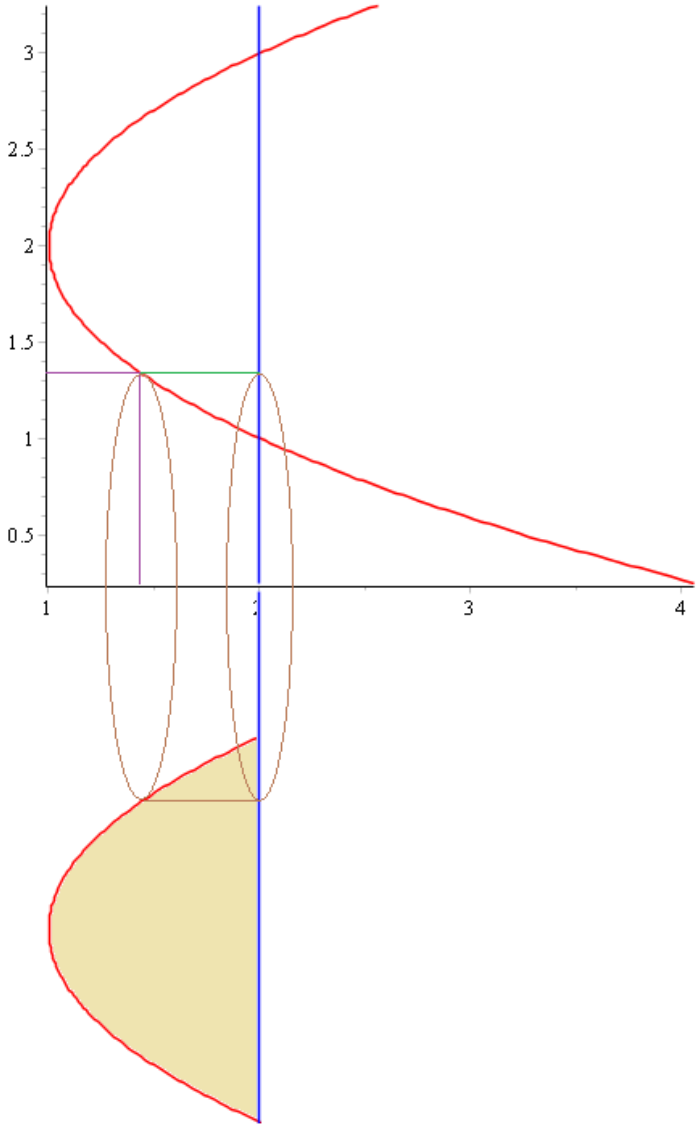
De esta forma:

$$\pi \cdot \int_0^1 2x e^{-x^2}\ dx = \pi \cdot \int_0^1 e^{-x^2} 2x\ dx = \pi \cdot \int_0^{-1} e^u(-du) = \pi \cdot \int_{-1}^0 e^u\ du$$

$$= \pi \cdot (e^u)\Big]_{-1}^0 = \pi \cdot (e^0 - e^{-1}) = \pi \cdot \left(1 - \frac{1}{e}\right) = \pi \cdot \frac{(e-1)}{e}$$

Problema 2.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



Notemos que el radio del cascaron cilindrico es y, mientras que la altura es la linea horizontal verde.

La linea horizontal morada vale x

Como la linea morada y la linea verde suman 2 siempre entonces la linea verde vale $2 - x$

De este modo, el diferencial de volumen es:

$$dV = 2 \cdot \pi \cdot y \cdot (2 - x)\ dy$$

Ahora debemos encontrar el intervalo de integración y para esto debemos encontrar las intersecciones

Para esto planteamos la ecuación:

$$1 + (y-2)^2 = 2 \;\Rightarrow\; (y-2)^2 = 1 \;\Rightarrow\; y - 2 = \pm 1 \;\Rightarrow\; y = 2 \pm 1$$

De este modo, las intersecciones son $y = 2 - 1 = 1$ junto con $y = 2 + 1 = 3$

Así tenemos que el volumen es:

$$V = \int dV = \int_1^3 2 \cdot \pi \cdot y \cdot (2 - x)\ dy = 2\pi \cdot \int_1^3 y \cdot (2 - [1 + (y-2)^2])\ dy$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^3 y \cdot (1 - [(y-2)^2])\ dy = 2\pi \cdot \int_1^3 y \cdot (1 - [y^2 - 4y + 4])\ dy$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^3 y \cdot (1 - y^2 + 4y - 4)\ dy = 2\pi \cdot \int_1^3 y \cdot (-y^2 + 4y - 3)\ dy$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^3 (-y^3 + 4y^2 - 3y)\ dy = 2\pi \cdot \left(-\frac{y^4}{4} + 4 \cdot \frac{y^3}{3} - 3 \cdot \frac{y^2}{2} \right) \Big]_1^3$$

$$= 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{3^4}{4} + 4 \cdot \frac{3^3}{3} - 3 \cdot \frac{3^2}{2} \right) - \left(-\frac{1^4}{4} + 4 \cdot \frac{1^3}{3} - 3 \cdot \frac{1^2}{2} \right) \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{81}{4} + 4 \cdot \frac{27}{3} - 3 \cdot \frac{9}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{3} - 3 \cdot \frac{1}{2} \right) \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{81}{4} + \frac{108}{3} - \frac{27}{2} \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} \right) \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{81}{4} + \frac{108}{3} - \frac{27}{2} + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} + \frac{3}{2} \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{108}{3} - \frac{4}{3} - \frac{81}{4} - \frac{27 \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{1}{4} + \frac{3 \cdot 2}{2 \cdot 2} \right]$$

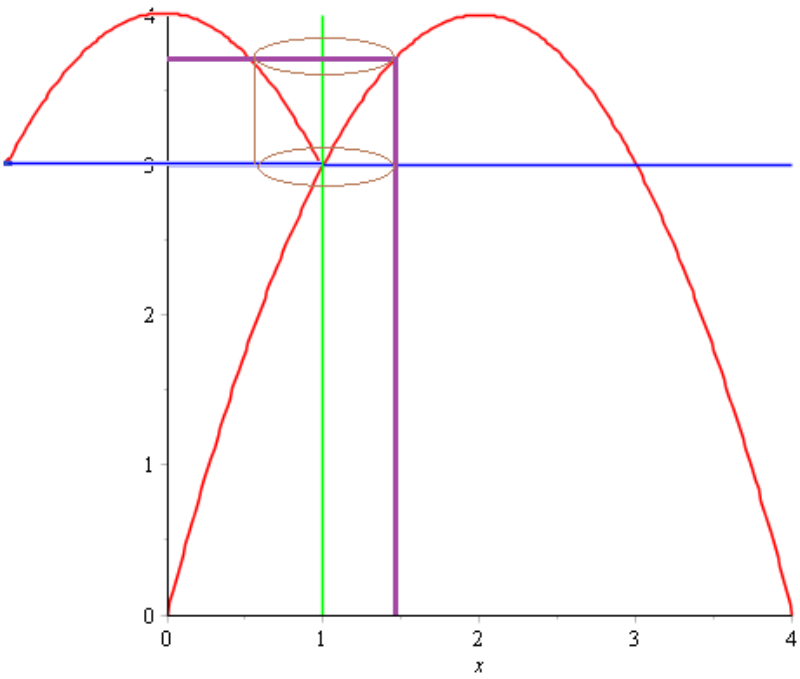
$$= 2\pi \cdot \left[\frac{104}{3} - \frac{81}{4} - \frac{54}{4} + \frac{1}{4} + \frac{6}{4} \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{104}{3} - \frac{128}{4} \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{104}{3} - 32 \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{104}{3} - \frac{32 \cdot 3}{3} \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{104}{3} - \frac{96}{3} \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{8}{3} \right] = \frac{16\pi}{3}$$

Así finalmente tenemos que el volumen pedido es $\dfrac{16\pi}{3}$.

Problema 3.

Lo primero que haremos será graficar la situación:



Ahora notemos que el radio del cascaron cilindrico corresponde a la linea horizontal morada menos 1, es decir $x-1$

Y por otro lado, tenemos que la altura del cascaron cilindrico corresponde a la linea vertical morada menos 3, es decir $y-3$

De esta forma, el diferencial de volumen corresponde a:

$$dV = 2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot(y-3)\ dx = 2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot([4x-x^2]-3)\ dx$$

$$= 2\cdot\pi\cdot(x-1)\cdot(4x-x^2-3)\ dx = 2\cdot\pi\cdot[(4x^2-x^3-3x)-(4x-x^2-3)]\ dx$$

$$= 2\cdot\pi\cdot[4x^2-x^3-3x-4x+x^2+3]\ dx = 2\cdot\pi\cdot[-x^3+5x^2-7x+3]\ dx$$

Ahora lo que haremos será determinar el intervalo de integración y para esto tenemos que ver en que puntos coinciden $f(x)=4x-x^2$ y $y=3$:

$$3 = 4x-x^2 \ \Rightarrow\ x^2-4x+3=0 \ \Rightarrow\ (x-1)(x-3)=0$$

De este modo, las intersecciones son $x = 1$ junto con $x = 3$

Así finalmente tenemos que el volumen pedido es:

$$V = \int dV = \int_1^3 2 \cdot \pi \cdot [-x^3 + 5x^2 - 7x + 3]\, dx$$

$$= 2\pi \cdot \int_1^3 [-x^3 + 5x^2 - 7x + 3]\, dx = 2\pi \cdot \left(-\frac{x^4}{4} + 5 \cdot \frac{x^3}{3} - 7 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot x \right) \Big]_1^3$$

$$= 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{3^4}{4} + 5 \cdot \frac{3^3}{3} - 7 \cdot \frac{3^2}{2} + 3 \cdot 3 \right) - \left(-\frac{1^4}{4} + 5 \cdot \frac{1^3}{3} - 7 \cdot \frac{1^2}{2} + 3 \cdot 1 \right) \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[\left(-\frac{81}{4} + \frac{135}{3} - \frac{63}{2} + 9 \right) - \left(-\frac{1}{4} + \frac{5}{3} - \frac{7}{2} + 3 \right) \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{81}{4} + \frac{135}{3} - \frac{63}{2} + 9 + \frac{1}{4} - \frac{5}{3} + \frac{7}{2} - 3 \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{80}{4} + \frac{130}{3} - \frac{56}{2} + 6 \right] = 2\pi \cdot \left[-20 + \frac{130}{3} - 28 + 6 \right] = 2\pi \cdot \left[-42 + \frac{130}{3} \right]$$

$$= 2\pi \cdot \left[-\frac{42 \cdot 3}{3} + \frac{130}{3} \right] = 2\pi \cdot \left[-\frac{126}{3} + \frac{130}{3} \right] = 2\pi \cdot \left[\frac{4}{3} \right] = \frac{8\pi}{3}$$

Así, finalmente tenemos que el volumen pedido es $\dfrac{8\pi}{3}$.

Problema 4.

Notemos que el valor promedio corresponde a:

$$\frac{1}{5}\cdot\int_0^5 t\cdot e^{-t^2}\ dt$$

Sea $u=-t^2\ \Rightarrow\ du=-2tdt\ \Rightarrow\ tdt=-\dfrac{du}{2}$

Si $t=0\ \Rightarrow\ u=-0^2=0$

Si $t=5\ \Rightarrow\ u=-5^2=-25$

De este modo:

$$\frac{1}{5}\cdot\int_0^5 t\cdot e^{-t^2}\ dt=\frac{1}{5}\cdot\int_0^{-25} e^u\left(-\frac{du}{2}\right)=\frac{2}{5}\cdot\int_{-25}^0 e^u\ du=\frac{2}{5}\cdot(e^u)\Big]_{-25}^0$$

$$=\frac{2}{5}\cdot[e^0-e^{-25}]=\frac{2}{5}\cdot[1-e^{-25}]$$

Notemos que el valor promedio corresponde a:

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi cos^4(x)sin(x)\ dx$$

Sea $u=cos(x)\ \Rightarrow\ du=-sin(x)dx\ \Rightarrow\ -du=sin(x)dx$

Si $x=\pi\ \Rightarrow\ u=cos(\pi)=-1$

Si $x=0\ \Rightarrow\ u=cos(0)=1$

De este modo, tenemos que:

$$\frac{1}{\pi}\cdot\int_0^\pi cos^4(x)sin(x)\ dx=\frac{1}{\pi}\cdot\int_1^{-1}u^4\cdot(-du)=\frac{1}{\pi}\cdot\int_{-1}^1 u^4\ du$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{u^5}{5}\right)\Big]_{-1}^1=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\left(\frac{1^5}{5}\right)-\left(\frac{(-1)^5}{5}\right)\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right]=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{2}{5}=\frac{2\pi}{5}$$

Problema 5.

Primero calcularemos el valor promedio de $f(x) = (x-3)^2$ en $[2,5]$

De este modo, el valor promedio es:

$$\frac{1}{(5-2)} \cdot \int_2^5 (x-3)^2 \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_2^5 (x-3)^2 \, dx$$

Sea $u = x - 3 \;\Rightarrow\; du = dx$

Si $x = 5 \;\Rightarrow\; u = 5 - 3 = 2$

Si $x = 2 \;\Rightarrow\; u = 2 - 3 = -1$

De esta forma:

$$\frac{1}{3} \cdot \int_2^5 (x-3)^2 \, dx = \frac{1}{3} \cdot \int_{-1}^2 u^2 \, du = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{u^3}{3} \right) \Big]_{-1}^2$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \left[\left(\frac{2^3}{3} \right) - \left(\frac{(-1)^3}{3} \right) \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right] = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{9}{3} \right] = \frac{9}{9} = 1$$

De esta forma tenemos que $f_{promedio} = 1$

Ahora debemos resolver la ecuación:

$$f_{promedio} = f(c)$$

$$\Rightarrow\; 1 = (c-3)^2$$

$$\Rightarrow\; \pm 1 = c - 3$$

$$\Rightarrow\; c = 3 \pm 1$$

De esta forma, tenemos dos c los cuales ambos pertenecen a $[2,5]$ y estos son $c_1 = 3 - 1 = 2$ y $c_2 = 3 + 1 = 4$

Problema 6.

$$f_{prom}[a,b] = \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^b f(x)\ dx = \frac{1}{(b-a)} \cdot \left[\int_a^c f(x)\ dx + \int_c^b f(x)\ dx \right]$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_a^c f(x)\ dx + \frac{1}{(b-a)} \cdot \int_c^b f(x)\ dx$$

$$= \frac{1}{(b-a)} \cdot \frac{(c-a)}{(c-a)} \cdot \int_a^c f(x)\ dx + \frac{1}{(b-a)} \cdot \frac{(b-c)}{(b-c)} \cdot \int_c^b f(x)\ dx$$

$$= \frac{(c-a)}{(b-a)} \cdot \left[\frac{1}{(c-a)} \cdot \int_a^c f(x)\ dx \right] + \frac{(b-c)}{(b-a)} \cdot \left[\frac{1}{(b-c)} \cdot \int_c^b f(x)\ dx \right]$$

$$= \frac{(c-a)}{(b-a)} \cdot f_{prom}[a,c] + \frac{(b-c)}{(b-a)} \cdot f_{prom}[c,b]$$

Así finalmente se demostró que:

$$\Rightarrow \boxed{f_{prom}[a,b] = \left(\frac{c-a}{b-a} \right) \cdot f_{prom}[a,c] + \left(\frac{b-c}{b-a} \right) \cdot f_{prom}[c,b]}$$

Problema 7.

$$\int e^x sin(x) dx$$

Sea $u = e^x \ \Rightarrow \ du = e^x\ dx$

Sea $dv = sin(x)dx \ \Rightarrow \ v = -cos(x)$

De este modo:

$$\int e^x sin(x) dx = -e^x cos(x) - \int -cos(x) e^x\ dx = e^x cos(x) + \int e^x cos(x) dx$$

$$\Rightarrow \int e^x sin(x) dx = e^x cos(x) + \int e^x cos(x) dx$$

Ahora resolveremos a:

$$\int e^x cos(x) dx$$

Sea $u = e^x \ \Rightarrow \ du = e^x \ dx$

Sea $dv = cos(x)dx \ \Rightarrow \ v = sin(x)$

De este modo:

$$\int e^x cos(x) dx = e^x sin(x) - \int e^x sin(x) dx$$

Así finalmente llegamos a que:

$$\int e^x sin(x) dx = e^x cos(x) + \left[\int e^x cos(x) dx\right] = e^x cos(x) + e^x sin(x) - \int e^x sin(x) dx$$

$$\int e^x sin(x) dx + \int e^x sin(x) dx = e^x cos(x) + e^x sin(x)$$

$$2 \int e^x sin(x) dx = e^x cos(x) + e^x sin(x)$$

$$\Rightarrow \ \boxed{\int e^x sin(x) dx = \frac{e^x [cos(x) + sin(x)]}{2}}$$

$$\int ln(x) dx$$

Sea $u = ln(x) \ \Rightarrow \ du = \frac{1}{x} \ dx$

Sea $dv = dx \ \Rightarrow \ v = x$

De este modo:

$$\int ln(x) dx = ln(x) \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x \ dx = ln(x) \cdot x - \int 1 \ dx = x \cdot ln(x) - x = x \cdot [ln(x) - 1]$$

Finalmente, tenemos que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\int ln(x) dx = x \cdot [ln(x) - 1]}$$

$$\int arctan(4t)dt$$

Sea $u = arctan(4t) \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{1+[4t]^2} \cdot 4 \; dt$

Sea $dv = dt \;\Rightarrow\; v = t$

De esta forma:

$$\int arctan(4t)dt = arctan(4t) \cdot t - \int t \cdot \frac{1}{1+[4t]^2} \cdot 4 \; dt = arctan(4t) \cdot t - \int \frac{4t}{1+[4t]^2} \, dt$$

Ahora resolveremos a:

$$\int \frac{4t}{1+[4t]^2} \, dt$$

Sea $a = 1 + [4t]^2 \;\Rightarrow\; da = 2 \cdot [4t] \cdot 4 \; da = 32t \; dt \;\Rightarrow\; \dfrac{da}{8} = 4t \; dt$

De esta forma:

$$\int \frac{4t}{1+[4t]^2} \, dt = \int \frac{1}{1+[4t]^2} \cdot 4t \; dt = \int \frac{1}{a} \cdot \frac{da}{8} = \frac{1}{8} \int \frac{da}{a} = \frac{1}{8} \cdot ln|a| + C$$

Reemplazando con $a = 1 + [4t]^2$, obtenemos que:

$$\frac{1}{8} \cdot ln|a| + C = \frac{1}{8} \cdot ln|1 + [4t]^2| + C = \frac{1}{8} \cdot ln(1 + [4t]^2) + C = \frac{1}{8} \cdot ln(1 + 16t^2) + C$$

Así tenemos que:

$$\int \frac{4t}{1+[4t]^2} \, dt = \frac{1}{8} \cdot ln(1 + 16t^2) + C$$

Y finalmente:

$$\int arctan(4t)dt = arctan(4t) \cdot t - \int t \cdot \frac{1}{1+[4t]^2} \cdot 4 \; dt = arctan(4t) \cdot t - \int \frac{4t}{1+[4t]^2} \, dt$$

$$= arctan(4t) \cdot t - \frac{1}{8} \cdot ln(1 + 16t^2) - C$$

Llamamos a $C_1 = -C$, de esta forma:

$$\Rightarrow \boxed{\int arctan(4t)dt = arctan(4t) \cdot t - \frac{1}{8} \cdot ln(1 + 16t^2) + C_1}$$

$$\int p^5 ln(p) dp$$

Sea $u = ln(p) \ \Rightarrow \ du = \frac{1}{p} \cdot dp$

Sea $dv = p^5 \ dp \ \Rightarrow \ v = \frac{p^6}{6}$

De esta forma:

$$\int p^5 ln(p) dp = ln(p) \cdot \frac{p^6}{6} - \int \frac{p^6}{6} \cdot \frac{1}{p} \cdot dp = \frac{ln(p) \cdot p^6}{6} - \int \frac{p^5}{6} \, dp = \frac{ln(p) \cdot p^6}{6} - \frac{p^6}{36} + C$$

$$\Rightarrow \boxed{\int p^5 ln(p) dp = \frac{ln(p) \cdot p^6}{6} - \frac{p^6}{36} + C}$$

Problema 8.

$$\int_4^9 \frac{ln(y)}{\sqrt{y}} dy$$

Sea $u = ln(\sqrt{y}) = ln\left(y^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \cdot ln(y) \ \Rightarrow \ du = \frac{1}{2} \cdot \frac{dy}{y} \ \Rightarrow \ \boxed{2y \cdot du = dy}$

Además notemos que como $u = \frac{1}{2} \cdot ln(y) \ \Rightarrow \ 2u = ln(y) \ \Rightarrow \ \boxed{e^{2u} = y}$

De esta forma: $\boxed{dy = 2e^{2u} \ du}$

Como $u = ln(\sqrt{y}) \ \Rightarrow \ \boxed{e^u = \sqrt{y}}$

Y como $u = ln(\sqrt{y}) = \frac{1}{2} \cdot ln(y) \ \Rightarrow \ \boxed{2u = ln(y)}$

Si $y = 9 \ \Rightarrow u = ln(\sqrt{9}) = ln(3)$

Si $y = 4 \ \Rightarrow u = ln(\sqrt{4}) = ln(2)$

Así llegamos a que:

$$\int_4^9 \frac{ln(y)}{\sqrt{y}}dy = \int_{ln(2)}^{ln(3)} \frac{2u}{e^u} 2e^{2u}\ du = 4 \cdot \int_{ln(2)}^{ln(3)} u \cdot e^u\ du$$

Ahora nos centraremos en resolver la siguiente integral:

$$\int_{ln(2)}^{ln(3)} u \cdot e^u\ du$$

Sea $f(u) = u \ \Rightarrow \ f'(u) = 1$

Sea $g'(u) = e^u \ \Rightarrow \ g(u) = e^u$

De esta forma:

$$\int_{ln(2)}^{ln(3)} u \cdot e^u\ du = (u \cdot e^u)\Big]_{ln(2)}^{ln(3)} - \int_{ln(2)}^{ln(3)} e^u\ du = (u \cdot e^u)\Big]_{ln(2)}^{ln(3)} - (e^u)\Big]_{ln(2)}^{ln(3)}$$

$$= [ln(3) \cdot e^{ln(3)} - ln(2) \cdot e^{ln(2)}] - [e^{ln(3)} - e^{ln(2)}] = [ln(3) \cdot 3 - ln(2) \cdot 2] - [3 - 2]$$

$$= 3 \cdot ln(3) - 2 \cdot ln(2) - 1$$

Así finalmente concluimos que:

$$\int_4^9 \frac{ln(y)}{\sqrt{y}}dy = 4 \cdot [3 \cdot ln(3) - 2 \cdot ln(2) - 1] = 12 \cdot ln(3) - 8 \cdot ln(2) - 4$$

$$\Rightarrow \ \boxed{\int_4^9 \frac{ln(y)}{\sqrt{y}}dy = 12 \cdot ln(3) - 8 \cdot ln(2) - 4}$$

$$\int_1^2 \frac{ln(x)}{x^2}dx$$

Sea $\boxed{u = ln(x)}$ $\Rightarrow$ $\boxed{du = \frac{1}{x} \cdot dx}$

Como $u = ln(x)$ $\Rightarrow$ $\boxed{x = e^u}$

Si $x = 2 \ \Rightarrow \ u = ln(2)$

Si $x = 1 \ \Rightarrow \ u = ln(1) = 0$

$$\int_1^2 \frac{ln(x)}{x^2}dx = \int_1^2 ln(x)\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \int_0^{ln(2)} u\cdot\frac{1}{e^u}du = \int_0^{ln(2)} u\cdot e^{-u}du$$

Sea $f(u) = u \;\Rightarrow\; f'(u) = 1$

Sea $g'(u) = e^{-u} \;\Rightarrow\; g(u) = -e^{-u}$

De esta forma:

$$\int_0^{ln(2)} u\cdot e^{-u}du = -(u\cdot e^{-u})\Big]_0^{ln(2)} - \int_0^{ln(2)} -e^{-u}du = -(u\cdot e^{-u})\Big]_0^{ln(2)} + \int_0^{ln(2)} e^{-u}du$$

$$= -(u\cdot e^{-u})\Big]_0^{ln(2)} - (e^{-u})\Big]_0^{ln(2)} = -[ln(2)\cdot e^{-ln(2)} - 0\cdot e^{-0}] - [e^{-ln(2)} - e^{-0}]$$

$$= -ln(2)\cdot e^{ln\left(\frac{1}{2}\right)} - [e^{ln\left(\frac{1}{2}\right)} - 1] = -ln(2)\cdot\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2} - 1\right] = -ln(2)\cdot\frac{1}{2} - \left[-\frac{1}{2}\right] = -ln(2)\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1 - ln(2)}{2}$$

Así llegamos finalmente a que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_1^2 \frac{ln(x)}{x^2}\,dx = \frac{1 - ln(2)}{2}}$$

$$\int_0^{\pi} e^{cos(t)}sin(2t)dt = \int_0^{\pi} e^{cos(t)}2cos(t)sin(t)dt$$

Sea $u = cos(t) \;\Rightarrow\; du = -sin(t)dt \;\Rightarrow\; -du = sin(t)dt$

Si $t = \pi \;\Rightarrow\; u = cos(\pi) = -1$

Si $t = 0 \;\Rightarrow\; u = cos(0) = 1$

De esta forma:

$$\int_0^{\pi} e^{cos(t)}2cos(t)sin(t)dt = \int_1^{-1} e^u 2u(-du) = 2\cdot\int_{-1}^{1} u\cdot e^u\,du$$

Sea $f(u) = u \;\Rightarrow\; f'(u) = 1$

Sea $g'(u) = e^u \;\Rightarrow\; g(u) = e^u$

De esta forma:

$$2 \cdot \int_{-1}^{1} u \cdot e^u \, du = 2 \cdot \left[(u \cdot e^u) \Big]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^u \, du \right] = 2 \cdot \left[(u \cdot e^u) \Big]_0^{\pi} - (e^u) \Big]_0^{\pi} \right]$$

$$= 2 \cdot \left[[(\pi \cdot e^{\pi}) - (0 \cdot e^0)] - [e^{\pi} - e^0] \right] = 2 \cdot [\pi \cdot e^{\pi} - e^{\pi} + 1]$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\pi} e^{cos(t)} sin(2t) dt = 2 \cdot [\pi \cdot e^{\pi} - e^{\pi} + 1]}$$

Problema 9.

Resolveremos la siguiente integral:

$$\int [ln(x)]^n dx$$

Sea $u = [ln(x)]^n \;\Rightarrow\; du = n \cdot [ln(x)]^{n-1} \cdot \dfrac{1}{x} \, dx$

Sea $dv = dx \;\Rightarrow\; v = x$

De esta forma:

$$\int [ln(x)]^n dx = x[ln(x)]^n - \int x \cdot n \cdot [ln(x)]^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot [ln(x)]^n - n \cdot \int [ln(x)]^{n-1} \, dx$$

Así finalmente concluimos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int [ln(x)]^n dx = x \cdot [ln(x)]^n - n \cdot \int [ln(x)]^{n-1} \, dx}$$

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
MAT1610 Cálculo 1
Ayudante: Alberto Valdés (anvaldes@uc.cl)

Ayudantía 13

Integrales trigonométricas, sustitución trigonométrica y fracciones parciales

1. Contenidos

Estrategia para evaluar $\int sin^m(x)cos^n(x)dx$

a) Si la potencia del coseno es impar ($n = 2k+1$), ahorre un factor coseno y use $cos^2(x) = 1-sin^2(x)$ para expresar los demás factores en terminos de seno:

$$\int sin^m(x)cos^n(x)dx = \int sin^m(x)cos^{2k+1}(x)dx = \int sin^m(x)cos^{2k}(x)cos(x)dx$$

$$\int sin^m(x)[cos^2(x)]^k cos(x)dx = \int sin^m(x)[1-sin^2(x)]^k cos(x)dx$$

despues sustituya $u = sin(x)$

b) Si la potencia de seno es impar ($m = 2k+1$), ahorre un factor seno y use $sin^2(x) = 1-cos^2(x)$ para expresar los demás factores en terminos de coseno:

$$\int sin^m(x)cos^n(x)dx = \int sin^{2k+1}(x)cos^n(x)dx = \int sin^{2k}(x)cos^n(x)sin(x)dx$$

$$\int [sin^2(x)]^k cos^n(x)sin(x)dx = \int [1-cos^2(x)]^k cos^n(x)sin(x)dx$$

despues sustituya $u = cos(x)$

c) Si las potencias de seno y coseno son pares, use las identidades de la mitad de un ángulo:

$$sin^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2} \qquad cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}$$

A veces es útil usar la identidad:

$$sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$$

Estrategia para evaluar $\int tan^m(x)sec^n(x)dx$

a) Si la potencia de la secante es par ($n = 2k, k \geq 2$), ahorre un factor de $sec^2(x)$ y use $sec^2(x) = 1 + tan^2(x)$ para expresar los demás factores en términos de $tan(x)$:

$$\int tan^m(x)sec^n(x)dx = \int tan^m(x)sec^{2k}(x)dx = \int tan^m(x)sec^{2k-2}(x)sec^2dx$$

$$\int tan^m(x)[sec^2(x)]^{k-1}sec^2dx = \int tan^m(x)[1 + tan^2(x)]^{k-1}sec^2dx$$

Luego sustituya $u = tan(x)$

b) Si la potencia de la tangente es impar ($m = 2k + 1$), guarde un factor de $sec(x)tan(x)$ y use $tan^2(x) = sec^2(x) - 1$ para expresar los demás factores en términos de $sec(x)$:

$$\int tan^m(x)sec^n(x)dx = \int tan^{2k+1}(x)sec^n(x)dx = \int tan^{2k}(x)sec^{n-1}(x)tan(x)sec(x)dx$$

$$\int [tan^2(x)]^k sec^{n-1}(x)tan(x)sec(x)dx = \int [sec^2(x) - 1]^k sec^{n-1}(x)tan(x)sec(x)dx$$

Luego sustituya $u = sec(x)$

Integrales importantes

$$\int tan(x)dx = ln|sec(x)| + C$$

$$\int sec(x)dx = ln|sec(x) + tan(x)| + C$$

Estrategia para evaluar integrales

Para evaluar integrales del tipo $\int sin(mx)cos(nx)dx$, $\int sin(mx)sin(nx)dx$ o $\int cos(mx)cos(nx)dx$, usar las siguientes formulas:

$sin(s) \cdot cos(t) = \frac{1}{2}[sin(s + t) + sin(s - t)]$

$cos(s) \cdot cos(t) = \frac{1}{2}[cos(s + t) + cos(s - t)]$

$sin(s) \cdot sin(t) = \frac{1}{2}[cos(s - t) - cos(s + t)]$

Tabla de sustituciones trigonométricas

Expresión	Sustitución	Identidad
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$x = a \cdot sin(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$	$1 - sin^2(\theta) = cos^2(\theta)$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$x = a \cdot tan(\theta), \quad -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$1 + tan^2(\theta) = sec^2(\theta)$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$x = a \cdot sec(\theta), \quad 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ o $\pi \leq \theta < \frac{3\pi}{2}$	$sec^2(\theta) - 1 = tan^2(\theta)$

Fracciones parciales

Sea f una función racional, es decir:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Si f es impropia, es decir, $grado(P) \geq grado(Q)$, entonces se debe emprender el paso preliminar de dividir P en Q, hasta obtener un residuo $R(x)$ tal que $grado(R) < grado(Q)$. El enunciado de la división es:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

donde $S(x)$ y $R(x)$ también son polinomios.

Caso I: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales distinto

Esto significa que se puede escribir:

$$Q(x) = (a_1x + b_1)(a_2x + b_2) \cdots (a_kx + b_k)$$

donde ningún factor se repite (y ningún factor es un múltiplo constante de otro). En este caso, el teorema de fracciones parciales establece que existen constantes $A_1, A_2, ..., A_k$ tales que:

$$\frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k}$$

estas constantes se determinan planteando la igualdad:

$$R(x) = Q(x) \cdot \left(\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{a_2x + b_2} + \cdots + \frac{A_k}{a_kx + b_k} \right)$$

Caso II: El denominador $Q(x)$ es un producto de factores lineales, algunos de los cuales se repiten.

Suponga que el primer factor lineal $(a_1x + b_1)$ se repite r veces, es decir, $(a_1x + b_1)^r$ aparece en la factorización de $Q(x)$. Por lo tanto, en lugar del término simple $\dfrac{A_1}{a_1x + b_1}$ se usaría:

$$\frac{A_1}{a_1x + b_1} + \frac{A_2}{(a_1x + b_1)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(a_1x + b_1)^r}$$

A modo de ilustración, se podría escribir:

$$\frac{x^3 - x + 1}{x^2(x-1)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} + \frac{D}{(x-1)^2} + \frac{E}{(x-1)^3}$$

Caso III: $Q(x)$ contiene factores cuadráticos, ninguno de los cuales se repite

Si $Q(x)$ tiene el factor $ax^2 + bx + c$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, además de los términos ya dados, la expresión $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ tendrá un termino de la forma:

$$\frac{Ax + B}{ax^2 + bx + c}$$

A modo de ejemplo:

$$\frac{x}{(x-2)(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx + C}{x^2+1} + \frac{Dx + E}{x^2+4}$$

Caso IV: $Q(x)$ contiene un factor cuadrático irreducible repetido

Si $Q(x)$ tiene el factor $(ax^2 + bx + c)^r$, donde $b^2 - 4ac < 0$, entonces, en lugar del único termino del Caso III, se usan los términos:

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + \cdot + \frac{A_rx + B_r}{(ax^2 + bx + c)^r}$$

Tabla de formulas de integración

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1)$ **2.** $\int \frac{1}{x} dx = ln|x|$

3. $\int e^x dx = e^x$ **4.** $\int a^x dx = \frac{a^x}{ln(a)}$

5. $\int sin(x) dx = -cos(x)$ **6.** $\int cos(x) dx = sin(x)$

7. $\int sec^2(x) dx = tan(x)$ **8.** $\int csc^2(x) dx = -cot(x)$

9. $\int sec(x)tan(x) dx = sec(x)$ **10.** $\int csc(x)cot(x) dx = -csc(x)$

11. $\int sec(x) dx = ln|sec(x) + tan(x)|$ **12.** $\int csc(x) dx = ln|csc(x) - cot(x)|$

13. $\int tan(x) dx = ln|sec(x)|$ **14.** $\int cot(x) dx = ln|sin(x)|$

15. $\int sinh(x) dx = cosh(x)$ **16.** $\int cosh(x) dx = sinh(x)$

17. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \cdot tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ **18.** $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

19. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left(\frac{|x - a|}{|x + a|}\right)$ **20.** $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}|$

2. Problemas

Problema 1. Resuelva la siguientes integrales trigonométricas.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)cos^3(x)dx \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)cos^2(x)dx \qquad \int \left[\frac{cos(x)+sin(2x)}{sin(x)}\right] dx$$

Problema 2. Resuelva la siguientes integrales mediante sustitución trigonométrica.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\, dx \qquad \int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\, dt$$

Problema 3. Resuelva la siguientes integrales mediante fracciones parciales .

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\, dx \qquad \int \frac{1}{x^3-1}\, dx \qquad \int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\, dx$$

Problema 4. Resuelva las siguientes integrales.

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{arctan(y)}}{1+y^2} dy \qquad \int xsin^2(x)dx \qquad \int_0^1 (1+\sqrt{x})^8 dx \qquad \int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx$$

3. Soluciones

Problema 1.

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)cos^3(x)dx$$

Utilizando que $cos^2(x) = 1 - sin^2(x)$ tenemos que:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)cos^3(x)dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)[cos^2(x)][cos(x)dx]$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)[1 - sin^2(x)][cos(x)dx] = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)[cos(x)dx] - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^7(x)[cos(x)dx]$$

Sea $u = sin(x) \;\Rightarrow\; du = cos(x)dx$

Si $x = \frac{3\pi}{4} \;\Rightarrow\; u = sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}}$

Si $x = \frac{\pi}{2} \;\Rightarrow\; u = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

De este modo:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)[cos(x)dx] - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^7(x)[cos(x)dx] = \int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}} u^5\, du - \int_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}} u^7\, du$$

$$= \left(\frac{u^6}{6}\right)\Big]_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{u^8}{8}\right)\Big]_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{1}{6}\cdot[u^2]^3\right)\Big]_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}} - \left(\frac{1}{8}\cdot[u^2]^4\right)\Big]_1^{\sqrt{\frac{1}{2}}}$$

$$= \left(\frac{1}{6}\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right]^3 - \frac{1}{6}\cdot\left[(1)^2\right]^3\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right]^4 - \frac{1}{8}\cdot\left[(1)^2\right]^4\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^3 - \frac{1}{6}\cdot[1]^3\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot\left[\frac{1}{2}\right]^4 - \frac{1}{8}\cdot[1]^4\right)$$

$$= \left(\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} - \frac{1}{6}\right) - \left(\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16} - \frac{1}{8}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{8} - 1\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{16} - 1\right)$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{8}\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{16} - \frac{16}{16}\right) = \frac{1}{6}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) - \frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{15}{16}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{15}{16} - \frac{1}{6}\cdot\frac{7}{8} = \frac{1}{16}\cdot\frac{15}{8} - \frac{1}{16}\cdot\frac{7}{3} = \frac{1}{16}\cdot\left(\frac{15}{8} - \frac{7}{3}\right)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{15}{8} - \frac{7}{3} \right) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{15 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{7 \cdot 8}{3 \cdot 8} \right) = \frac{1}{16} \cdot \left(\frac{45}{24} - \frac{56}{24} \right)$$

$$= \frac{1}{16} \cdot \left(-\frac{11}{24} \right) = -\frac{1}{16} \cdot \frac{11}{24} = -\frac{11}{384}$$

Así finalmente tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} sin^5(x)cos^3(x)dx = -\frac{11}{384}}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)cos^2(x)dx$$

Lo que usaremos será que:

$$sin^2(u) = \frac{1 - cos(2u)}{2}$$

$$cos^2(u) = \frac{1 + cos(2u)}{2}$$

Así tenemos que:

$$sin^2(x)cos^2(x) = \left(\frac{1 - cos(2x)}{2} \right) \cdot \left(\frac{1 + cos(2x)}{2} \right) = \frac{1 - cos^2(2x)}{4}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \left[\frac{1 + cos(4x)}{2} \right] \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{cos(4x)}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{cos(4x)}{2} \right) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1 - cos(4x)}{2} \right) = \frac{1}{8} \cdot [1 - cos(4x)]$$

De esta forma:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x)cos^2(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{8} \cdot [1 - cos(4x)] \right) \, dx$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [1 - cos(4x)] \, dx = \frac{1}{8} \cdot \left(x - \frac{sin(4x)}{4} \right) \Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\left[\frac{\pi}{2} - 0 \right] - \left[\frac{sin\left(4 \cdot \frac{\pi}{2}\right)}{4} - \frac{sin(4 \cdot 0)}{4} \right] \right) = \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{sin\left(2\pi\right)}{4} - \frac{sin(0)}{4} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \left[\frac{0}{4} - \frac{0}{4} \right] \right) = \frac{\pi}{16}$$

De esta forma:

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2(x) cos^2(x) dx = \frac{\pi}{16}}$$

$$\int \left[\frac{cos(x) + sin(2x)}{sin(x)} \right] dx$$

Utilizaremos que $sin(2x) = 2sin(x)cos(x)$

De esta forma:

$$\int \left[\frac{cos(x) + sin(2x)}{sin(x)} \right] dx = \int \left[\frac{cos(x)}{sin(x)} + \frac{2sin(x)cos(x)}{sin(x)} \right] dx$$

$$= \int \left[cot(x) + 2cos(x) \right] dx = \int cot(x)\ dx + 2 \cdot \int cos(x)\ dx = ln|sin(x)| + 2sin(x) + C$$

Así finalmente tenemos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \left[\frac{cos(x) + sin(2x)}{sin(x)} \right] dx = ln|sin(x)| + 2sin(x) + C}$$

Problema 2.

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx$$

Sea $x = \sqrt{7}sec(t) \;\Rightarrow\; dx = \sqrt{7}sec(t)tan(t)dt$

De esta forma:

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx = \int \frac{\sqrt{7}sec(t)}{\sqrt{[\sqrt{7}sec(t)]^2-7}}\sqrt{7}sec(t)tan(t)dt$$

$$= \int \frac{7sec^2(t)tan(t)}{\sqrt{7sec^2(t)-7}}\,dt = \int \frac{7sec^2(t)tan(t)}{\sqrt{7[sec^2(t)-1]}}\,dt = \int \frac{7sec^2(t)tan(t)}{\sqrt{7tan^2(t)}}\,dt$$

$$= \int \frac{7sec^2(t)tan(t)}{\sqrt{7}\sqrt{tan^2(t)}}\,dt = \int \frac{7sec^2(t)tan(t)}{\sqrt{7}tan(t)}\,dt = \sqrt{7}\cdot\int sec^2(t)\;dt$$

$$= \sqrt{7}\cdot tan(t) + C$$

Ahora, como:

$x = \sqrt{7}sec(t) \;\Rightarrow\; x^2 = 7sec^2(t) \;\Rightarrow\; \dfrac{x^2}{7} = sec^2(t)$

Y como $tan^2(t)+1 = sec^2(t) \;\Rightarrow\; tan^2(t) = sec^2(t) - 1 = \dfrac{x^2}{7} - 1 = \dfrac{x^2}{7} - \dfrac{7}{7} = \dfrac{x^2-7}{7}$

De esta forma:

$$tan(t) = \sqrt{tan^2(t)} = \sqrt{\frac{x^2-7}{7}} = \frac{\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{7}} \;\Rightarrow\; \sqrt{7}tan(t) = \sqrt{x^2-7}$$

Así concluimos finalmente que:

$$\Rightarrow\; \boxed{\int \frac{x}{\sqrt{x^2-7}}\,dx = \sqrt{x^2-7} + C}$$

$$\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\,dt$$

Sea $t = \sqrt{2}tan(\theta) \;\Rightarrow\; dt = \sqrt{2}sec^2(\theta)\;d\theta$

De esta forma:

$$\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\,dt = \int \frac{[\sqrt{2}tan(\theta)]^5}{\sqrt{[\sqrt{2}tan(\theta)]^2+2}}\,\sqrt{2}sec^2(\theta)\;d\theta$$

$$= \int \frac{4\sqrt{2}tan^5(\theta)}{\sqrt{2tan^2(\theta)+2}}\sqrt{2}\;sec^2(\theta)\;d\theta = \int \frac{4\sqrt{2}tan^5(\theta)}{\sqrt{2[tan^2(\theta)+1]}}\sqrt{2}\;sec^2(\theta)\;d\theta$$

$$= \int \frac{4\sqrt{2}tan^5(\theta)}{\sqrt{2}\sqrt{tan(\theta)^2+1]}}\sqrt{2}\;sec^2(\theta)\;d\theta = 4\sqrt{2}\cdot\int \frac{tan^5(\theta)sec^2(\theta)}{sec(\theta)}d\theta$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\int tan^5(\theta)sec(\theta)d\theta = 4\sqrt{2}\cdot\int tan^4(\theta)[tan(\theta)sec(\theta)d\theta]$$

$$4\sqrt{2}\cdot\int [tan^2(\theta)]^2[tan(\theta)sec(\theta)d\theta] = 4\sqrt{2}\cdot\int [sec^2(\theta)-1]^2[tan(\theta)sec(\theta)d\theta]$$

Ahora sea $u = sec(\theta) \;\Rightarrow\; du = tan(\theta)sec(\theta)d\theta$

De esta forma:

$$4\sqrt{2}\cdot\int [sec^2(\theta)-1]^2[tan(\theta)sec(\theta)d\theta] = 4\sqrt{2}\cdot\int [u^2-1]^2du$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\int [u^4-2u^2+1]du = 4\sqrt{2}\cdot\left(\int u^4\;du - 2\cdot\int u^2\;du + \int 1\;du\right)$$

$$= 4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{u^5}{5} - 2\cdot\frac{u^3}{3} + u\right) + C$$

Ahora como tenemos que:

$$t = \sqrt{2}tan(\theta) \;\Rightarrow\; t^2 = 2tan^2(\theta) \;\Rightarrow\; \frac{t^2}{2} = tan^2(\theta) \;\Rightarrow\; \frac{t^2}{2}+1 = tan^2(\theta)+1 = sec^2(\theta)$$

Así llegamos a que:

$$sec^2(\theta) = \frac{t^2}{2} + \frac{2}{2} = \frac{t^2+2}{2} \;\Rightarrow\; sec(\theta) = \frac{\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}}$$

Y como por otro lado teníamos que $u = sec(\theta)$, entonces $u = \dfrac{\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}}$

Así tenemos que:

$$\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\,dt = 4\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\cdot\left[\frac{\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}}\right]^5 - \frac{2}{3}\cdot\left[\frac{\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}}\right]^3 + \left[\frac{\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}}\right]\right) + C$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{5}\cdot\frac{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+2}}{4\sqrt{2}} - \frac{2}{3}\cdot\frac{4\sqrt{2}(t^2+2)\sqrt{t^2+2}}{2\sqrt{2}} + \frac{4\sqrt{2}\sqrt{t^2+2}}{\sqrt{2}} + C$$

$$= \frac{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+2}}{5} - \frac{4(t^2+2)\sqrt{t^2+2}}{3} + 4\sqrt{t^2+2} + C$$

Así, se concluye finalmente que:

$$\Rightarrow\; \boxed{\int \frac{t^5}{\sqrt{t^2+2}}\,dt = \frac{(t^2+2)^2\sqrt{t^2+2}}{5} - \frac{4(t^2+2)\sqrt{t^2+2}}{3} + 4\sqrt{t^2+2} + C}$$

Problema 3.

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx$$

Notemos en primer lugar que:

$$x^2+2x+5 = (x^2+2x+1)+4 = (x+1)^2+4$$

De esta forma:

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{x+4}{(x+1)^2+4}\,dx$$

Haremos el cambio de variable $u = x+1 \;\Rightarrow\; du = dx$

Así, tenemos que:

$$\int \frac{x+4}{(x+1)^2+4}\,dx = \int \frac{u+3}{u^2+4}\,du = \int \frac{u}{u^2+4}\,du + 3\cdot\int \frac{1}{u^2+4}\,du$$

Resolveremos ambas integrales por separado:

$$\int \frac{u}{u^2+4}\,du$$

Sea $a = u^2+4 \;\Rightarrow\; da = 2u\;du \;\Rightarrow\; \dfrac{da}{2} = u\;du$

De esta manera:

$$\int \frac{u}{u^2+4}\,du = \int \frac{1}{u^2+4}\cdot u\;du = \int \frac{1}{a}\,da = ln|a| + C_1$$

Como $a = u^2+4$ y $u = x+1$, entonces:

$ln|a|+C_1 = ln|u^2+4|+C_1 = ln(u^2+4)+C_1 = ln([x+1]^2+4)+C_1 = ln(x^2+2x+1+4)+C_1 = ln(x^2+2x+5)+C_1$

De esta forma:

$$\int \frac{u}{u^2+4}\,du = ln(x^2+2x+5)+C_1$$

Ahora, por otro lado debemos calcular a:

$$\int \frac{1}{u^2+4}\,du$$

Sea $a = \dfrac{u}{2} \;\Rightarrow\; da = \dfrac{du}{2} \;\Rightarrow\; du = 2\;da$

Como $u = 2a$, entonces:

$$\int \frac{1}{u^2+4}\,du = \int \frac{1}{(2a)^2+4}\,2\;da = 2\cdot\int \frac{1}{4a^2+4}\,da = 2\cdot\int \frac{1}{4\cdot[a^2+1]}\,da$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\int \frac{1}{a^2+1}\,da = \frac{1}{2}\cdot tan^{-1}(a) + C_2$$

Notemos que como $a = \dfrac{u}{2}$ y $u = x+1$,entonces:

$$\frac{1}{2}\cdot tan^{-1}(a) + C_2 = \frac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{u}{2}\right) + C_2 = \frac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C_2$$

Así tenemos que:

$$\int \frac{1}{u^2+4}\,du = \frac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C_2$$

Recapitulando:

$$\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx = \int \frac{u}{u^2+4}\,du + 3\cdot\int \frac{1}{u^2+4}\,du$$

$$= ln(x^2+2x+5) + C_1 + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C_2\right)$$

$$= ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + 3\cdot C_2 + C_1$$

Definimos $C = 3\cdot C_2 + C_1$, para que finalmente:

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{x+4}{x^2+2x+5}\,dx = ln(x^2+2x+5) + \frac{3}{2}\cdot tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C}$$

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx$$

Recordando que $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$

De esta forma, utilizamos fracciones parciales:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Multiplicamos a ambos lados por $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$ y nos queda que:

$$1=A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-1)=Ax^2+Ax+A+Bx^2-Bx+Cx-C$$

$$=[A+B]x^2+[A-B+C]x+[A-C]$$

De esta forma, nos quedan la siguientes ecuaciones:

$$A+B=0\ (*)\qquad A-C=1\qquad A-B+C=0\ (***)$$

De $(*)$ tenemos que $B=-A$ y de $(**)$ tenemos que $C=A-1$

Reemplazando estos valores en $(***)$ llegamos a que:

$$A-[-A]+[A-1]=0\ \Rightarrow\ A+A+A-1=0\ \Rightarrow\ 3A=1\ \Rightarrow\ \boxed{A=\frac{1}{3}}$$

Reemplazando este valor de A en $(*)$ implica que: $\boxed{B=-\frac{1}{3}}$

Y reemplazando esta valor también en $(**)$ tenemos que $C=\frac{1}{3}-1=\frac{1}{3}-\frac{3}{3}=-\frac{2}{3}\ \Rightarrow\ \boxed{C=-\frac{2}{3}}$

De esta forma:

$$\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}=\frac{\frac{1}{3}}{x-1}+\frac{-\frac{1}{3}\cdot x-\frac{2}{3}}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)}-\frac{1}{3}\cdot\frac{(x+2)}{(x^2+x+1)}$$

Reemplazando este resultado en la integral inicial, tenemos entonces que:

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^3-1}\,dx &= \int \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{3}\cdot\frac{(x+2)}{(x^2+x+1)}\right)\,dx \\ &= \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{(x-1)}\,dx - \frac{1}{3}\cdot\int \frac{(x+2)}{(x^2+x+1)}\,dx\end{aligned}$$

Resolveremos ambas integrales por separado

Primero resolveremos a:

$$\int \frac{1}{(x-1)}\,dx$$

Sea $u = x-1 \;\Rightarrow\; du = dx$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{(x-1)}\,dx = \int \frac{1}{u}\,du = ln|u| + C_1$$

Y como $u = x-1$, entonces:

$$\int \frac{1}{(x-1)}\,dx = ln|u| + C_1 = ln|x-1| + C_1$$

Ahora resolveremos a:

$$\int \frac{(x+2)}{(x^2+x+1)}\,dx$$

Notemos que:

$$x^2+x+1 = x^2+x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4} = x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4} = \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

De esta forma:

$$\int \frac{(x+2)}{(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{(x+2)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx$$

Sea $u = x+\frac{1}{2} \;\Rightarrow\; du = dx$

De este modo, reemplazando nos queda que:

$$\int \frac{(x+2)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx = \int \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du + \frac{3}{2}\cdot\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$$

Ahora, resolveremos en primer lugar a:

$$\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$$

Sea $a = u^2 + \dfrac{3}{4} \;\Rightarrow\; da = 2u\,du \;\Rightarrow\; \dfrac{da}{2} = u\,du$

De esta forma:

$$\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\cdot u\,du = \int \frac{1}{a}\cdot\frac{da}{2} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{da}{a} = \frac{1}{2}\cdot ln|a| + C_2$$

Como $a = u^2 + \dfrac{3}{4}$ y $u = x + \frac{1}{2}$, entonces:

$$\frac{1}{2}\cdot ln|a| + C_2 = \frac{1}{2}\cdot ln|\; u^2+\frac{3}{4}\;| + C_2 = \frac{1}{2}\cdot ln\left(u^2+\frac{3}{4}\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot ln\left(\left[x+\frac{1}{2}\right]^2+\frac{3}{4}\right) + C_2 = \frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) + C_2$$

$$= \frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+x+1\right) + C_2$$

Así tenemos que:

$$\int \frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+x+1\right) + C_2$$

Ahora resolveremos a:

$$\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du$$

Sea $u = \frac{\sqrt{3}}{2}a \;\Rightarrow\; du = \frac{\sqrt{3}}{2}\,da$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \int \frac{1}{\left[\frac{\sqrt{3}}{2}a\right]^2+\frac{3}{4}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\,da = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int \frac{1}{\frac{3}{4}a^2+\frac{3}{4}}\,da$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\int \frac{1}{\frac{3}{4}\cdot(a^2+1)}\,da = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4}{3}\int\frac{da}{a^2+1} = \frac{2}{\sqrt{3}}\int\frac{da}{a^2+1}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}(a)+C_3$$

Notemos que como $u=\frac{\sqrt{3}}{2}a \;\Rightarrow\; a=\frac{2}{\sqrt{3}}u$

Y como $u=x+\dfrac{1}{2}$, entonces:

$$\int \frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}(a)+C_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}u\right)+C_3$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left[x+\frac{1}{2}\right]\right)+C_3 = \frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+1\right]\right)+C_3$$

Recapitulando:

$$\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{1}{3}\cdot\int\frac{1}{(x-1)}\,dx - \frac{1}{3}\cdot\int\frac{(x+2)}{(x^2+x+1)}\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left[ln|x-1|+C_1\right] - \frac{1}{3}\cdot\left(\int\frac{u}{u^2+\frac{3}{4}}\,du + \frac{3}{2}\cdot\int\frac{1}{u^2+\frac{3}{4}}\,du\right)$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\left[ln|x-1|+C_1\right] - \frac{1}{3}\cdot\left(\left[\frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+x+1\right)+C_2\right] + \frac{3}{2}\cdot\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+1\right]\right)+C_3\right]\right)$$

$$= \frac{ln|x-1|}{3}+\frac{C_1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+x+1\right)+C_2+\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+1\right]\right)+\frac{3\cdot C_3}{2}\right)$$

$$= \frac{ln|x-1|}{3}+\frac{C_1}{3} - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot ln\left(x^2+x+1\right)+C_2+\sqrt{3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+1\right]\right)+\frac{3\cdot C_3}{2}\right)$$

$$= \frac{ln|x-1|}{3}+\frac{C_1}{3} - \frac{1}{6}\cdot ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{C_2}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+1\right]\right) - \frac{1}{3}\cdot\frac{3\cdot C_3}{2}$$

$$= \frac{ln|x-1|}{3} - \frac{1}{6} \cdot ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+1\right]\right) + \frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{2}$$

Sea $C = \frac{C_1}{3} - \frac{C_2}{3} - \frac{C_3}{2}$

Así se concluye finalmente que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{x^3-1}\,dx = \frac{ln|x-1|}{3} - \frac{1}{6} \cdot ln\left(x^2+x+1\right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left[2x+1\right]\right) + C}$$

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx$$

Sea $u = e^x \;\Rightarrow\; du = e^x\,dx$

De este modo:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x}+3e^x+2}\,dx = \int \frac{e^x}{[e^x]^2+3[e^x]+2} \cdot e^x\,dx = \int \frac{u}{u^2+3u+2}\,du$$

Ahora notemos que:

$$u^2+3u+2 = (u+2)(u+1)$$

De esta forma, usando fracciones parciales planteamos que:

$$\frac{u}{u^2+3u+2} = \frac{A}{u+2} + \frac{B}{u+1}$$

Multiplicando a ambos lados por $u^2+3u+2 = (u+2)(u+1)$ nos queda:

$$u = A(u+1) + B(u+2) = Au + A + Bu + 2B = [A+B]u + [A+2B]$$

Así nos queda que $A+B = 1$ $(*)$ y que $A+2B = 0$ $(**)$

Como $A + B = 1 \ \Rightarrow \ B = 1 - A$ y reemplazando en $(**)$ nos queda:

$$0 = A + 2B = A + 2 \cdot (1 - A) = A + 2 - 2A = 2 - A \ \Rightarrow \ A = 2$$

Como $A = 2$, entonces $B = 1 - 2 = -1 \ \Rightarrow \ B = -1$

De este modo:

$$\frac{u}{u^2 + 3u + 2} = \frac{2}{u + 2} - \frac{1}{u + 1}$$

Así tenemos que:

$$\int \frac{u}{u^2 + 3u + 2} \, du = \int \left(\frac{2}{u + 2} - \frac{1}{u + 1} \right) \, du = 2 \cdot \int \frac{1}{u + 2} \, du - \int \frac{1}{u + 1} \, du$$

Primero resolveremos a la integral:

$$\int \frac{1}{u + 2} \, du$$

Sea $a = u + 2 \ \Rightarrow \ da = du$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{u + 2} \, du = \int \frac{1}{a} \, da = ln|a| + C_1$$

Como $a = u + 2$ y $u = e^x$, entonces:

$$ln|a| + C_1 = ln|u + 2| + C_1 = ln|e^x + 2| + C_1 = ln(e^x + 2) + C_1$$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{u + 2} \, du = ln(e^x + 2) + C_1$$

Ahora resolveremos a:

$$\int \frac{1}{u+1}\, du$$

Sea $a = u + 1 \;\Rightarrow\; da = du$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{u+1}\, du = \int \frac{1}{a}\, da = ln|a| + C_2$$

Como $a = u + 1$ y $u = e^x$, entonces:

$$ln|a| + C_2 = ln|u + 1| + C_2 = ln|e^x + 1| + C_2 = ln(e^x + 1) + C_2$$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{u+1}\, du = ln(e^x + 1) + C_2$$

Recapitulando:

$$\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx = \int \frac{u}{u^2 + 3u + 2}\, du = 2 \cdot \int \frac{1}{u+2}\, du - \int \frac{1}{u+1}\, du$$

$$= 2 \cdot [ln(e^x + 2) + C_1] - [ln(e^x + 1) + C_2] = 2 \cdot ln(e^x + 2) + 2 \cdot C_1 - ln(e^x + 1) - C_2$$

Sea $C = 2 \cdot C_1 - C_2$, entonces concluimos que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 3e^x + 2}\, dx = 2 \cdot ln(e^x + 2) - ln(e^x + 1)}$$

Problema 4.

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{arctan(y)}}{1+y^2} dy$$

Sea $u = arctan(y) \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{1+y^2}\, dy$

Si $y = 1 \;\Rightarrow\; u = arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Si $y = -1 \;\Rightarrow\; u = arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

De esta forma:

$$\int_{-1}^{1} \frac{e^{arctan(y)}}{1+y^2} dy = \int_{-1}^{1} e^{arctan(y)} \cdot \frac{1}{1+y^2}\, dy = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} e^u \; du = (e^u)\Big]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}$$

Así se concluye que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_{-1}^{1} \frac{e^{arctan(y)}}{1+y^2} dy = e^{\frac{\pi}{4}} - e^{-\frac{\pi}{4}}}$$

$$\int x sin^2(x) dx$$

Utilizaremos que:

$$sin^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2}$$

De esta forma:

$$\int x sin^2(x) dx = \int x \cdot \left[\frac{1 - cos(2x)}{2}\right] dx = \frac{1}{2} \cdot \int [x - x \cdot cos(2x)]\; dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\int x\; dx - \int x \cdot cos(2x)\; dx\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} + C_1\right] - \int x \cdot cos(2x)\; dx\right)$$

Ahora resolveremos usando la regla de la vaca a:

$$\int x \cdot cos(2x)\ dx$$

Sea $u = x \ \Rightarrow \ du = dx$

Sea $dv = cos(2x)\ dx \ \Rightarrow \ v = \dfrac{sin(2x)}{2}$

De esta forma:

$$\int x \cdot cos(2x)\ dx = \frac{sin(2x) \cdot x}{2} \ - \ \int \frac{sin(2x)}{2}\, dx = \frac{sin(2x) \cdot x}{2} \ - \ \frac{1}{2} \cdot \int sin(2x)\ dx$$

$$= \frac{sin(2x) \cdot x}{2} \ - \ \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{-\, cos(2x)}{2} + C_2 \right) = \frac{sin(2x) \cdot x}{2} + \frac{cos(2x)}{4} - \frac{C_2}{2}$$

Recapitulando:

$$\int x sin^2(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} + C_1 \right] - \int x \cdot cos(2x)\ dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} + C_1 \right] - \left[\int x \cdot cos(2x)\ dx \right] \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\left[\frac{x^2}{2} + C_1 \right] - \left[\frac{sin(2x) \cdot x}{2} + \frac{cos(2x)}{4} - \frac{C_2}{2} \right] \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2}{2} + C_1 - \frac{sin(2x) \cdot x}{2} - \frac{cos(2x)}{4} + \frac{C_2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot x^2}{4} + C_1 - \frac{2 \cdot sin(2x) \cdot x}{4} - \frac{cos(2x)}{4} + \frac{C_2}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot sin(2x) \cdot x - cos(2x)}{4} + C_1 + \frac{C_2}{2} \right)$$

$$= \frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot sin(2x) \cdot x - cos(2x)}{8} + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{4}$$

Sea $C = \dfrac{C_1}{2} + \dfrac{C_2}{4}$, entonces concluimos que:

$$\Rightarrow \ \boxed{\int x sin^2(x) dx = \frac{2 \cdot x^2 - 2 \cdot sin(2x) \cdot x - cos(2x)}{8} + C}$$

$$\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8 dx$$

Sea $u = 1+\sqrt{x} \;\Rightarrow\; du = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\, dx$

Como $u = 1+\sqrt{x} \;\Rightarrow\; u-1 = \sqrt{x} \;\Rightarrow\; dx = 2\sqrt{x}\; du = 2(u-1)\; du$

Si $x = 1 \;\Rightarrow\; u = 1+\sqrt{1} = 1+1 = 2$

Si $x = 0 \;\Rightarrow\; u = 1+\sqrt{0} = 1+0 = 1$

De esta forma:

$$\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8 dx = \int_1^2 u^8 \cdot 2 \cdot (u-1)\; du = 2 \cdot \int_1^2 (u^9 - u^8)\; du$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{u^{10}}{10} - \frac{u^9}{9} \right) \Big]_1^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{2^{10}}{10} - \frac{2^9}{9} \right) - \left(\frac{1^{10}}{10} - \frac{1^9}{9} \right) \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\left(\frac{2^9 \cdot 2}{5 \cdot 2} - \frac{2^9}{9} \right) - \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{9} \right) \right] = 2 \cdot \left[\left(\frac{2^9}{5} - \frac{2^9}{9} \right) - \left(\frac{9}{90} - \frac{10}{90} \right) \right]$$

$$= 2 \cdot \left[2^9 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{9} \right) - \left(-\frac{1}{90} \right) \right] = 2 \cdot \left[2^9 \cdot \left(\frac{9}{45} - \frac{5}{45} \right) + \frac{1}{90} \right]$$

$$= 2 \cdot \left[2^9 \cdot \frac{4}{45} + \frac{1}{90} \right] = 2 \cdot \left[\frac{2^9 \cdot 4 \cdot 2}{45 \cdot 2} + \frac{1}{90} \right] = 2 \cdot \left[\frac{2^9 \cdot 4 \cdot 2}{90} + \frac{1}{90} \right]$$

$$= 2 \cdot \left[\frac{2^9 \cdot 4 \cdot 2 + 1}{90} \right] = \frac{2^9 \cdot 4 \cdot 2 + 1}{45} = \frac{2^9 \cdot 4 \cdot 2 + 1}{45} = \frac{4097}{45}$$

Así se concluye finalmente que:

$$\Rightarrow \boxed{\int_0^1 (1+\sqrt{x})^8 dx = \frac{4097}{45}}$$

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$$

Para resolver esta integral haremos lo siguiente:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}\cdot\frac{1+x}{1+x}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{(1-x)(1+x)}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} = \frac{\sqrt{(1+x)^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

De esta forma:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right]\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Resolveremos ambas integrales por separado

Partiremos con:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Sea $u = 1 - x^2 \;\Rightarrow\; du = -2x\; dx \;\Rightarrow\; -\dfrac{du}{2} = x\,\mathrm{d}x$

De esta forma:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x\; dx = \int \frac{1}{\sqrt{u}}\cdot\left(-\frac{du}{2}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\int \frac{1}{\sqrt{u}}\, du$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\int u^{-\frac{1}{2}}\, du = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u^{\left(-\frac{1}{2}+1\right)}}{\left(-\frac{1}{2}+1\right)} + C_1\right) = -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C_1\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(2\cdot u^{\frac{1}{2}} + C_1\right) = -u^{\frac{1}{2}} - \frac{C_1}{2} = -\sqrt{u} - \frac{C_1}{2}$$

Y como $u = 1 - x^2$, entonces:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \sqrt{u} - \frac{C_1}{2} = -\sqrt{1-x^2} - \frac{C_1}{2}$$

Ahora resolveremos a:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

Sea $x = sin(t) \;\Rightarrow\; dx = cos(t)dt$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-[sin(t)]^2}} \cdot cos(t)\; dt = \int \frac{1}{\sqrt{1-sin^2(t)}} \cdot cos(t)\; dt$$
$$= \int \frac{1}{\sqrt{cos^2(t)}} \cdot cos(t)\; dt = \int \frac{1}{cos(t)} \cdot cos(t)\; dt = \int 1\; dt = t + C_2$$

Como $x = sin(t) \;\Rightarrow\; t = sin^{-1}(x)$

De esta forma:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = sin^{-1}(x) + C_2$$

Recapitulando tenemos que:

$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = sin^{-1}(x) + C_2 - \sqrt{1-x^2} - \frac{C_1}{2}$$

Sea $C = C_2 - \dfrac{C_1}{2}$, entonces finalmente se concluye que:

$$\Rightarrow \boxed{\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx = sin^{-1}(x) - \sqrt{1-x^2} + C}$$
