PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2018

Pauta Interrogación 3 - MAT1610

1. a) Demuestre que

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$$

Solución:
Observe que $1 \geq \sqrt{1+x^2} \geq \sqrt{2}$ para todo $x \in [-1,1]$, además el largo del intervalo de integración es 2 por lo tanto tenemos que

$$2 \leq \int_{-1}^{1} \sqrt{1+x^2}\, dx \leq 2\sqrt{2}$$

Distribución puntaje:

- (1 punto) por acotar superiormente.
- (1 punto) por acotar inferiormente.
- (1 punto) por concluir.

b) Calcule $\displaystyle\int_0^3 |x^2-1|\, dx$

Solución:

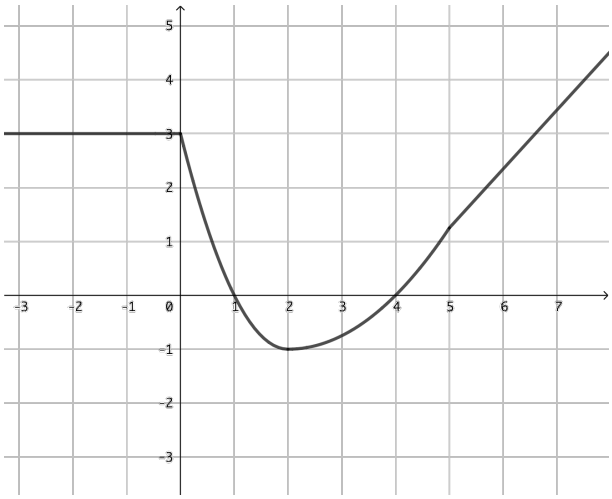
Observe que

$$\int_0^3 |x^2-1|\, dx = \int_0^1 1-x^2\, dx + \int_1^3 x^2-1\, dx = \frac{2}{3} + 6 + \frac{2}{3} = \frac{22}{3}$$

Distribución puntaje:

- (1 punto) por separar correctamente.
- (1 punto) por el calculo de la primera integral.
- (1 punto) por el calculo de la segunda integral.

2. Sea $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ donde f es una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyo gráfico es el siguiente:



a) Determine $g'(x)$ en términos de f. **Solución:**
Por TFC tenemos que $g'(x) = f(x)$

Distribución puntaje:

- (2 punto) por determinar g'
- No hay puntaje parcial.

b) Determine los intervalos de monotonía de g.

Solución:

Observe que para saber los intervalos de monotonía necesitamos determinar el signo de g'. Del punto anterior tenemos que $g'(x) = f(x)$ y por lo tanto g es creciente si f es positiva y decreciente si f es negativa, obteniendo que es creciente en $(-\infty, 1)$ y $(4, \infty)$ y decreciente en $(1, 4)$.

Distribución puntaje:

- (1 punto) por intervalo de crecimiento
- (1 punto) por intervalo de decreciemiento

c) Determine los intervalos de concavidad de g.

Solución:

Por otra parte tenemos que $g''(x) > 0$ si y solo si $f'(x) > 0$ es decir en los intervalos donde f es creciente, análogamente los intervalos donde g es cóncava hacia abajo corresponden a los intervalos donde f es decreciente, es decir g es cóncava hacia arriba en $(2, \infty)$ y cóncava hacia abajo en $(0, 2)$

Distribución puntaje:

- (1 punto) por intervalo de cóncavidad hacia arriba.
- (1 punto) por intervalo de cóncavidad hacia abajo

3. Determine

a) $\displaystyle\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$

Solución

Observe que haciendo el cambio de variable $u = 1/x$ obtenemos que $du = -1/x^2 dx$ y la integral propuesta queda

$$\int_1^2 \frac{e^{1/x}}{x^2}dx = -\int_1^{1/2} e^2 du = e - e^{1/2}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por la sustitución.
- (1 punto) por el cálculo.

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^6}dx$ Observe que haciendo el cambio de variable $u = x^3$ obtenemos que $du = 3x^2 dx$ y la integral propuesta queda

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\arctan(x^3) + C$$

Solución
Distribución de puntaje:

- (1 punto) por la sustitución.
- (1 punto) por el cálculo.

c) $\displaystyle\int_1^2 xf(x^2)\,dx$, si se sabe que f es continua y que $\displaystyle\int_1^4 f(x)\,dx = 7$

Solución
Observe que haciendo el cambio de variable $u = x^2$ obtenemos que $du = 2xdx$ y la integral propuesta queda

$$\int_1^2 xf(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_1^4 f(u)\,du = \frac{7}{2}$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto) por la sustitución.
- (1 punto) por el cálculo.

4. a) Calcule la derivada de la función definida por

$$F(x) = \int_0^{x^2} \left(\int_1^y \frac{\arctan(t^6)}{1+\text{sen}^2(t)}\, dt \right) dy$$

Solución

Observe que $\displaystyle\int_1^y \frac{\arctan(t^6)}{1+\text{sen}^2(t)}\, dt$ es una función de la variable libre y, si llamamos

$$G(y) = \int_1^y \frac{\arctan(t^6)}{1+\text{sen}^2(t)}\, dt$$

tenemos que

$$F(x) = \int_0^{x^2} \left(\int_1^y \frac{\arctan(t^6)}{1+\text{sen}^2(t)}\, dt \right) dy = \int_0^{x^2} G(y)dy$$

del TFC tenemos que

$$F'(x) = G(x^2) \cdot 2x = 2x \int_1^{x^2} \frac{\arctan(t^6)}{1+\text{sen}^2(t)}\, dt$$

Distribución de puntaje:

- (1 punto)por la evidencia de que la integral interior es una funci n que depende de y (puede ser implícito).
- (1 punto)por remplazar por x^2 donde aparece y al usar el TFC.
- (1 punto) por multiplicar por $2x$.

b) Un cono recto de altura h está inscrito en otro cono recto de mayor tamaño cuya altura es de 18cm, de manera que su vértice está en el centro de la base del cono más grande. Determine la altura, h, que maximiza el volumen del cono inscrito.

Solución:

Si llamamos R al radio del cono mayor tendremos la siguiente relación

$$r = \frac{R(18-h)}{18}$$

donde r y h son el radio y la altura del cono inscrito respectivamente.

Con lo anterior tenemos que el volumen del cono inscrito en términos de su altura es:

$$V(h) = \frac{\pi R^2}{3 \cdot 18^2}(18-h)^2 h$$

con $h \in (0, 18)$, para encontrar la altura que maximiza esta función buscamos puntos críticos, para eso observemos que:

$$V'(h) = \frac{\pi R^2}{18^2}(h^2 - 24h + 108) = \frac{\pi R^2}{30^2}(h-6)(h-18)$$

obteniedo que le único punto crítico es $h = 6$.

Además observemos que la derivada cambia de signo positivo a negativo en $h = 6$, por lo tanto la altura que maximiza el volumen es $h = 6$.

Distribución de puntaje:

- (1 punto)por determinar la función volumen en términos de la altura
- (1 punto)por encontrar puntos críticos
- (1 punto) por justificar que el punto crítico encontrado corresponde a un máximo