PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer Semestre 2015

MAT1610 – Cálculo 1
Interrogación 3

1. a) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4}$$

Solución

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k^3}{n^4} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^3$$

(**0.5 pts**)

Esto corresponde a una suma de Riemann de la función $f(x) = x^3$ sobre el intervalo $[0, 1]$ con la partición aritmética, es decir:
(**2 pts**)

$$= \int_0^1 x^3 = \frac{x^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

(**0.5 pts**)

b) Sea $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x-1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ y $G(x) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \frac{dt}{1+t^2}$, para $0 < x < 1$.

Demuestre que $F'(x) + 2G'(x) = 0$

Solución

- $F'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-1)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}.$
  (**1.0 pts**)
- $G'(x) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1-x}{x}\right)} \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{x}}} \dfrac{-1}{x^2} = \dfrac{-1}{2\sqrt{x-x^2}}.$
  (**1.5 pts**)

Por lo tanto:

$$F'(x) + 2G'(x) = 0$$

(**0.5 pts**)

2. a) Encuentre una función f y un número real a tales que:

$$6 + \int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt \;=\; 2\sqrt{x}$$

Solución

Buscamos f y $a \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\int_a^x \frac{f(t)}{t^2}\, dt \;=\; 2\sqrt{x} - 6$$

Derivando la ecuación, obtenemos que:

$$\frac{f(x)}{x^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Luego

$$f(x) \;=\; x^{3/2}$$

(**1.5 pts**)

Además si $x = a,$ nos que

$$2\sqrt{a} - 6 \;=\; 0$$

Con lo cual

$$a = 9$$

(**1.5 pts**)

b) Si f es función continua y $a \in \mathbb{R},$ calcule

$$\int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x))\, dx.$$

Solución

$$\int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x))\, dx \;=\; \int_{-a}^{a} f(x)\, dx \;-\; \int_{-a}^{a} f(-x)\, dx$$

(**1.0 pts**)

Haciendo cambio de variable en la segunda integral, nos queda:

Sea $-x = y$ entonces $dx = -dy$, además si $x = -a \Rightarrow y = a$ y si $x = a \Rightarrow y = -a$.

Entonces:

$$\int_{-a}^{a} (f(x) - f(-x))\, dx = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{-a} f(y)\, dy = \int_{-a}^{-a} f(x)\, dx = 0$$

(**2 pts**)

3. Calcule:

a)

$$\int (x^2 \operatorname{sen}(x^3+5)\, \cos^9(x^3+5))\, dx$$

Solución

Sea $x^3+5 = u$ entonces $x^2dx = \dfrac{du}{3}$
(**1.0 pts**)
Entonces

$$\int (x^2 \operatorname{sen}(x^3+5)\, \cos^9(x^3+5))\, dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen}(u)\cos^9(u)\, du = -\frac{1}{30}\cos^{10}(x^3+5)+C$$

(**2 pts**)

b)

$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{\sqrt{x}}\, dx$$

Solución

Sea $\sqrt{x}-1 = u$ entonces $\dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2du.$
Además si $x = 4 \Rightarrow u = 1$, y si $x = 1 \Rightarrow u = 0.$
(**1.5 pts**)
Luego

$$\int_1^4 \frac{(\sqrt{x}-1)^4}{\sqrt{x}}\, dx = 2\int_0^1 u^4\, du = \frac{2u^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{2}{5}$$

(**1.5 pts**)

4. a) Calcule el volumen del sólido de revolución obtenido al girar la región encerrada por las curvas $y = x$ e $y = x^2$ en torno a la recta $y = 2$.

Solución

La sección transversal es como un anillo de radio interior $2-x$ y radio exterior $2-x^2$.
Luego

$$A(x) = \pi(2-x^2)^2 - \pi(2-x)^2.$$

(**1.0 pts**)
Por lo tanto, el volumen es:

$$V = \int_0^1 A(x)\,dx = \pi \int_0^1 (x^4 - 5x^2 + 4x)\,dx = \frac{8\pi}{15}.$$

(**2 pts**)

b) Calcule el área encerrada entre la recta y = 3x+9 y la parábola $y = x^2 - 9$.

Solución

Los puntos de intersección de la parábola y la recta se producen en $(-3, 0)$ y $(6, 27)$. Luego el área solicitada es:

(**1.0 pts**)

$$A(x) = \int_{-3}^{6} |3x + 9 - x^2 + 9|\,dx = (\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3} + 18x)\Big|_{-3}^{6} = 121,5.$$

(**2 pts**)

Duración: 2 horas. Sin uso de calculadoras. CELULARES APAGADOS. Recuerde escribir sólo con tinta indeleble y no usar corrector.