Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

A

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2+7x+11}}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x-2}-\sqrt{x^2+7x+11}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+7x+11})}{-6x-13}\\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(\sqrt{x^2+x-2}+\sqrt{x^2+7x+11})}{x(-6-13/x)}\\ &= -\infty\end{aligned}$$

   por lo tanto el límte no existe.

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por desarrollo algebraíco correcto.
   - 1 punto por resultado.

   b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi}$

   Solución:

   Si hacemos el cambio de variable $u = x - \pi$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x-\pi} &= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u+\pi)}{u}\\ &= \lim_{u\to 0} \frac{-\operatorname{sen}(u)}{u}\\ &= -1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por cambio de variable adecuado.
   - 1 punto por resultado.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x}{|x|}(1-\cos(3x))$

Solución:

Observe que la función $\dfrac{2x}{|x|}$ es acotada en una vecindad de cero y que $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(3x)) = 0$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x}{|x|}(1-\cos(3x)) = 0$$

Distribución de puntaje

- 1 punto por decir que es acotada o calcular límites laterales.
- 1 punto por resultado.

2. Determine, todos los números reales de a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} a[|x-2|] + b & \text{si } x < 3 \\ -3x - 2b & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

sea continua en $x = 3$.
NOTA: $[|x|]$:= parte entera de x

Solución:

Para que f sea continua en $x = 3$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = -9 - 2b$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = b$ y que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -9-2b$ por lo tanto $b = -9-2b$, obteniendo que $b = -3$ y la continuidad no depende del valor de a, por lo que a puede tomar cualquier valor real.

Distribución de puntaje:

- 2 puntos por la condición de continuidad
- 2 puntos por el cálculo del límte lateral izquierdo
- 2 puntos por conclusión

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

B

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x}{\sqrt{x^2+6x-1}-\sqrt{x^2+5x+11}}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2+6x-1}-\sqrt{x^2+5x+11}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{3x(\sqrt{x^2+6x-1}+\sqrt{x^2+5x+11})}{x-12} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{3(\sqrt{x^2+6x-1}+\sqrt{x^2+5x+11})}{1-12/x} \\ &= \infty\end{aligned}$$

   por lo tanto el límte no existe.

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por desarrollo algebraíco correcto.
   - 1 punto por resultado.

   b) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos(x)+1}{x-\pi}$

   Solución:

   Si hacemos el cambio de variable $u = x - \pi$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{\cos(x)+1}{x-\pi} &= \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u+\pi)+1}{u} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{-\cos(u)+1}{u} \\ &= 0\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por cambio de variable adecuado.
   - 1 punto por resultado.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|x|}(1-\cos(3x))$

Solución:

Observe que la función $\dfrac{x}{|x|}$ es acotada en una vecindad de cero y que $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(3x)) = 0$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|x|}(1-\cos(3x)) = 0$$

Distribución de puntaje

- 1 punto por decir que es acotada o calcular límites laterales.
- 1 punto por resultado.

2. Determine, todos los números reales de a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} a[|x|] - b & \text{si } x < 1 \\ -2x^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

sea continua en $x = 1$

NOTA: $[|x|]$:= parte entera de x

Solución:

Para que f sea continua en $x = 1$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = -2 + b$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = -b$ y que $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -2 + b$ por lo tanto $-2 + b = -b$, obteniendo que $b = 1$ y la continuidad no depende del valor de a, por lo que a puede tomar cualquier valor real.

Distribución de puntaje:

- 2 puntos por la condición de continuidad
- 2 puntos por el cálculo del límte lateral izquierdo
- 2 puntos por conclusión

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

C

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+6x-1} - \sqrt{x^2-3x+11}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+6x-1} - \sqrt{x^2-3x+11} &= \lim_{x\to\infty} \frac{9x-12}{\sqrt{x^2+6x-1}+\sqrt{x^2-3x+11}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(9-12/x)}{x(\sqrt{1+6/x-1/x^2}+\sqrt{1-3/x+11/x^2})} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por desarrollo algebraíco correcto.
   - 1 punto por resultado.

   b) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{x-\pi}{\tan(x)}$

   Solución:

   Si hacemos el cambio de variable $u = x - \pi$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{x-\pi}{\tan(x)} &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\tan(u+\pi)} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{u\cos(u)}{\operatorname{sen}(u)} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por cambio de variable adecuado.
   - 1 punto por resultado.

c) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{2x-6}{|x-3|}(\text{sen}(\pi x))$

Solución:

Observe que la función $\dfrac{2x-6}{|x-3|}$ es acotada en una vecindad de $x=3$ y que $\lim\limits_{x\to 3}(\text{sen}(\pi x))=0$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 3} \frac{2x-6}{|x-3|}(\text{sen}(\pi x))=0$$

Distribución de puntaje

- 1 punto por decir que es acotada o calcular límites laterales.
- 1 punto por resultado.

2. Determine, todos los números reales de a y b para los que la función

$$f(x)=\begin{cases} a[|x-3|]-b & \text{si } x<4 \\ -11x^2+b & \text{si } x\geq 4 \end{cases}$$

sea continua en $x=4$

NOTA: $[|x|]$:= parte entera de x

Solución:

Para que f sea continua en $x=4$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=\lim_{x\to 4^+} f(x)=f(4)=176+b$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=-b$ y que $\lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=-176+b$ por lo tanto $176+b=-b$, obteniendo que $b=-88$ y la continuidad no depende del valor de a, por lo que a puede tomar cualquier valor real.

Distribución de puntaje:

- 2 puntos por la condición de continuidad
- 2 puntos por el cálculo del límte lateral izquierdo
- 2 puntos por conclusión

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

D

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+8x-1} - \sqrt{5x+1}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+8x-1} - \sqrt{5x+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-2}{\sqrt{x^2+8x-1}+\sqrt{5x+1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x+3-2/x)}{x(\sqrt{1+8/x-1/x^2}+\sqrt{5/x+1/x^2})} \\ &= \infty\end{aligned}$$

   por lo tanto el límte no existe.

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por desarrollo algebraíco correcto.
   - 1 punto por resultado.

   b) $\lim_{x\to\pi} (\pi - x)\csc(x)$

   Solución:

   Si hacemos el cambio de variable $u = \pi - x$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} (\pi-x)\csc(x) &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{sen}(\pi-u)} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{u}{\operatorname{sen}(u)} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por cambio de variable adecuado.
   - 1 punto por resultado.

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|x-1|}{x-1}(\text{sen}(\pi x))$

Solución:

Observe que la función $\dfrac{|x-1|}{x-1}$ es acotada en una vecindad de $x=1$ y que $\lim\limits_{x\to 1}(\text{sen}(\pi x))=0$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{x-1}(\text{sen}(\pi x)) = 0$$

Distribución de puntaje

- 1 punto por decir que es acotada o calcular límites laterales.
- 1 punto por resultado.

2. Determine, todos los números reales de a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} a[|x-1|]+b & \text{si } x<2 \\ -4|x|-b & \text{si } x\geq 2 \end{cases}$$

sea continua en $x=2$.
NOTA: $[|x|]$:= parte entera de x

Solución:

Para que f sea continua en $x=2$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = -8-b$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = b$ y que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = -8-b$ por lo tanto $-8-b=b$, obteniendo que $b=-4$ y la continuidad no depende del valor de a, por lo que a puede tomar cualquier valor real.

Distribución de puntaje:

- 2 puntos por la condición de continuidad
- 2 puntos por el cálculo del límte lateral izquierdo
- 2 puntos por conclusión

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

E

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{2x-3}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{2x^2+3x-1}-\sqrt{2x-3} &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+x+2}{\sqrt{2x^2+3x-1}+\sqrt{2x-3}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(2x+1+2/x)}{x(\sqrt{2+3/x-1/x^2}+\sqrt{2/x-3/x^2})} \\ &= \infty\end{aligned}$$

   por lo tanto el límte no existe.

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por desarrollo algebraíco correcto.
   - 1 punto por resultado.

   b) $\lim_{x\to\pi} \dfrac{\tan(x)}{x-\pi}$

   Solución:

   Si hacemos el cambio de variable $u = x - \pi$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \frac{\tan(x)}{x-\pi} &= \lim_{u\to 0} \frac{\tan(u+\pi)}{u} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\operatorname{sen}(u)}{u\cos(u)} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por cambio de variable adecuado.
   - 1 punto por resultado.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{|5x|}(\text{sen}(3x))$

Solución:
Observe que la función $\dfrac{x}{|5x|}$ es acotada en una vecindad de $x = 0$ y que $\lim\limits_{x\to 0}(\text{sen}(3x)) = 0$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{|5x|}(\text{sen}(3x)) = 0$$

Distribución de puntaje

- 1 punto por decir que es acotada o calcular límites laterales.
- 1 punto por resultado.

2. Determine, todos los números reales de a y b para los que la función

$$f(x) = \begin{cases} a[|x-1|] - b & \text{si } x < 2 \\ x^2 + 2b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

sea continua en $x = 2$.

NOTA: $[|x|]$:= parte entera de x

Solución:
Para que f sea continua en $x = 2$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = 4 + 2b$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = -b$ y que $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4 + 2b$ por lo tanto $-4 + 2b = -b$, obteniendo que $b = -4/3$ y la continuidad no depende del valor de a, por lo que a puede tomar cualquier valor real.

Distribución de puntaje:

- 2 puntos por la condición de continuidad
- 2 puntos por el cálculo del límte lateral izquierdo
- 2 puntos por conclusión

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemáticas
Primer Semestre 2019

F

Cálculo I- MAT1610

Pauta Control 1

1. Determine si los siguientes límites existen. En caso que exista calcule el valor de dicho límite.

   a) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{2x+1}$

   Solución:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+x-1} - \sqrt{2x+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-2}{\sqrt{x^2+x-1}+\sqrt{2x+1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x(x-1-2/x)}{x(\sqrt{1+1/x-1/x^2}+\sqrt{2/x+1/x^2})} \\ &= \infty\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por desarrollo algebraíco correcto.
   - 1 punto por resultado.

   b) $\lim_{x\to\pi} \cot(x)(x-\pi)$

   Solución:

   Si hacemos el cambio de variable $u = x - \pi$ tenemos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pi} \cot(x)(x-\pi) &= \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u+\pi)u}{\operatorname{sen}(u+\pi)} \\ &= \lim_{u\to 0} \frac{\cos(u)u}{\operatorname{sen}(u)} \\ &= 1\end{aligned}$$

   Distribución de puntaje

   - 1 punto por cambio de variable adecuado.
   - 1 punto por resultado.

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5x}{|x|}(1-\cos(3x))$

Solución:

Observe que la función $\dfrac{x}{|5x|}$ es acotada en una vecindad de $x=0$ y que $\lim\limits_{x\to 0}(1-\cos(3x))=0$, por lo tanto

$$\lim_{x\to 0} \frac{5x}{|x|}(1-\cos(3x))=0$$

Distribución de puntaje

- 1 punto por decir que es acotada o calcular límites laterales.
- 1 punto por resultado.

2. Determine, todos los números reales de a y b para los que la función

$$f(x)=\begin{cases} a[|x-2|]-b & \text{si } x<3 \\ 2x^2+b & \text{si } x\geq 3 \end{cases}$$

sea continua en $x=3$.
NOTA: $[|x|]$:= parte entera de x

Solución:

Para que f sea continua en $x=3$ se debe cumplir que

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^+} f(x)=f(3)=18+b$$

Observe que $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-b$ y que $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=18+b$ por lo tanto $18+b=-b$, obteniendo que $b=-9$ y la continuidad no depende del valor de a, por lo que a puede tomar cualquier valor real.

Distribución de puntaje:

- 2 puntos por la condición de continuidad
- 2 puntos por el cálculo del límte lateral izquierdo
- 2 puntos por conclusión