PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2016.

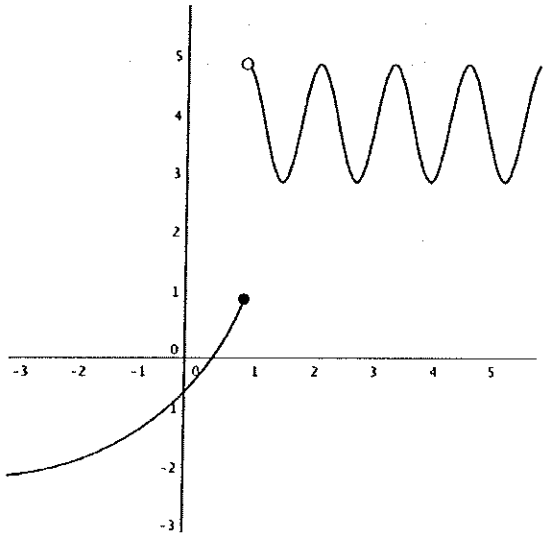
MAT 1610 Cálculo I

Pauta Interrogación I

1. a) Sea

$$f(x) = \begin{cases} ax + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

y g la función con el siguiente gráfico



Determine, en caso que exista(n), el(los) valor(es) de $a \in \mathbb{R}$ de modo que $\lim_{x \to 1}(f+g)(x)$ exista. Justifique su respuesta. **Solución:**

Observemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 1^-}(f+g)(x) &= \lim_{x \to 1^-} f(x) + \lim_{x \to 1^-} g(x) \\ &= (a+2) + 1 \\ &= a + 3 \end{aligned}$$

1pto

Por otra parte tenemos que:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^+}(f+g)(x) &= \lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^+} g(x)\\ &= 2+5\\ &= 7\end{aligned}$$

1 pto

Por lo tanto $\lim_{x\to 1}(f+g)(x)$ existe si y sólo si los límites laterales coinciden, es decir, si y sólo si $a = 4$.

1 pto

b) Demuestre, por definición, que

$$\lim_{x\to 1}\frac{2+4x}{3} = 2$$

Solución:

Dado $\epsilon > 0$ basta tomar $\delta < \frac{3\epsilon}{4}$, ya que si $0 < |x-1| < \frac{3\epsilon}{4}$, tenemos que

$$\left|\frac{2+4x}{3} - 2\right| = 4\frac{|x-1|}{3} < \epsilon$$

1.5 x encontrar δ

1.5 x demostración

Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.
Interrogación 1

t: 120 min.

2. Estudie los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{|x-1|}{x-1}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2}$

d) $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$

Solución.

a) $\lim_{x\to\infty} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^2}\right)}{\frac{1}{x^2}} = 1$, pues $\frac{1}{x^2} \to 0$ cuando $x \to \infty$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1.$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+4}-2}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2+4}+2}{\sqrt{x^2+4}+2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+4}+2)}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+4}+2} = \frac{1}{4}$$

d) Primera forma

$$\lim_{x\to 0} x^2 = 0 \text{ y } \left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leq 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

Segunda forma

$$-1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -x^2 \leq x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \text{ y cómo } \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

entonces por el teorema del sandwich $\lim_{x\to 0} x^2 \text{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Distribución de puntaje.

Por cada límite bien calculado 1.5 puntos, total 6.0 puntos.

3. a) Demuestre que $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe.

Solución:

Sea $x_k = \frac{1}{2\pi k}$, observe que $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ y que $\cos\left(\frac{1}{x_k}\right) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. 1 pto

Por otra parte si $z_k = \frac{1}{(2k+1)\pi}$, observe que $\lim_{k\to\infty} z_k = 0$ y que $\cos\left(\frac{1}{z_k}\right) = -1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ 1 pto

Por lo tanto $\lim_{x\to 0} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ no existe. 1.5 pto

b) Demuestre que la ecuación $\operatorname{sen}(x) + x = x^2$ tiene al menos una solución real.

Solución:

Sea $h(x) = \operatorname{sen}(x) + x - x^2$, observamos que h es continua en todo los reales ya que es suma de funciones continuas. Además $h(\pi/4) > 0$ y $h(\pi/2) < 0$ por lo tanto existe $c \in (\pi/4, \pi/2)$ con $h(c) = 0$, lo que equivale a que c es solución de la ecuación pedida. 1 pto

1 pto

1 pto.

4. Encuentre todos los valores del parámetro a para los cuales la función

$$f(x) = \begin{cases} a^2 x & \text{si} \quad x \leq 2 \\ x^2 - 3x + 2 - 2a|a| & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

es derivable en $\mathbb{R}$.

Solución.

Primero estudiaremos la continuidad de f,

Para todo $x \neq 2$, $f(x)$ es una función continua pues para $x \leq 2$ es un polinomio de primer grado y para $x > 2$ un polinomio de segundo grado, ambas continuas.

También puede argumentar que para todo $x \neq 2$, $f(x)$ es una función continua, por propiedades de las funciones continuas en un conjunto.

Para $x = 2$, se tiene

$f(2) = 2a^2$

La continuidad de f en $x = 2$ exige que $\lim_{x \to 2} f(x) = 2a^2$ lo que implica que los limites laterales en torno a 2 deben ser iguales y también iguales a $f(2)$,

Así:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} a^2 x = 2a^2$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (x^2 - 3x + 2 - 2a|a|) = 2^2 - 3 \cdot 2 + 2 - 2a|a|$$

Por tanto se debe tener: $2a^2 = -2a|a| \Rightarrow \underline{a \leq 0}$.

Segundo, estudiaremos la existencia de la derivada de f para todo x real.

La derivada para todo $x \neq 2$ existe por ser ambas funciones derivables (son polinomios), o bien simplemente puede calcular la derivada de $f(x)$, para todo $x \neq 2$.

Ahora, se debe estudiar la existencia de $f'(2)$, para lo cual es necesario aplicar la definición de derivada en dicho punto, es decir

$f'(2) = \lim_{x \to 2} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2}$, la existencia de éste límite se reduce a calcular los límites laterales en torno a $x = 2$.

$\lim_{x \to 2^+} \dfrac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2^+} \dfrac{x^2 - 3x + 2 - 2a|a| - 2a^2}{x - 2}$, pero $a \leq 0$ por la continuidad de f en $x = 2$ entonces,

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2-3x+2+2a^2-2a^2}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{(x-2)(x-1)}{x-2}=1.$$

Ahora, también

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{a^2x-2a^2}{x-2}=a^2$$

Estos límites laterales deben ser iguales, es decir:

$$a^2=1 \text{ pero como } a\leq 0 \text{ entonces } a=-1$$

Por tanto $a=-1$, para que f sea continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Distribución de puntaje.

Por argumentar bien la continuidad de f para $x\neq 2$	0.5 ptos.
Por mostrar que $f(2)$ existe	0.5 ptos.
Por los 2 límites laterales bien calculados.	1.5 ptos.
Por la conclusión $a\leq 0$	0.5 ptos.
Por argumentar bien la derivabilidad de f para $x\neq 2$	0.5 ptos.
Por cada límite lateral bien calculado 1.0 punto, total	2.0 ptos.
Por la conclusión final $a=-1$.	0.5 ptos.