PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2021

Ayudantía 14 - MAT1610

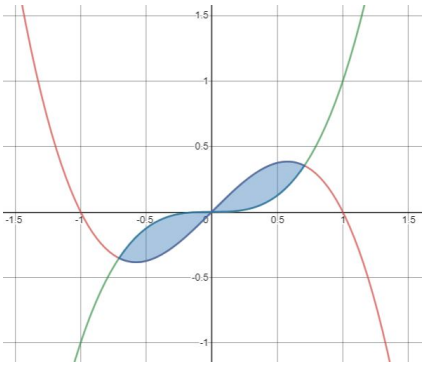
1. (a) Determine el área de la región comprendida entre las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = -x^3+x$.
   (b) Determine el área de la región R con $r = \{(x, y)|y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq x^2 - 9 \wedge y \leq 3 - x\}$

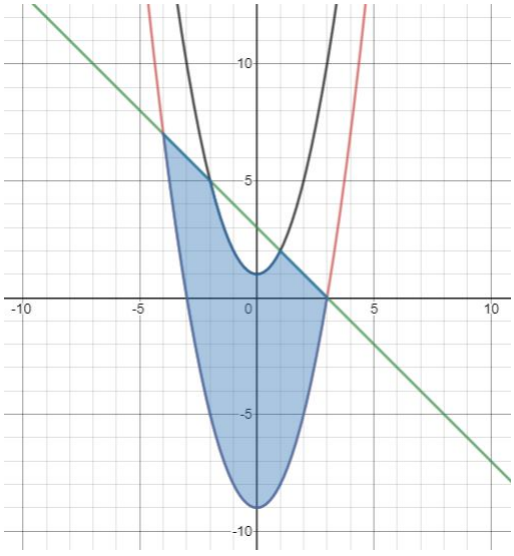
   Solución:

   (a) Note que cada función involucrada es una función impar, y $x^3 = -x^3 + x$ si $2x^3 - x = x(2x^2 - 1) = 0$, es decir, si $x = 0 \vee 2x^2 - 1 = 0$, esto es, si $x = 0 \vee x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$. Entonces, las funciones son impares y se intersectan en el origen y en los extremos de un intervalo simétrico respecto al origen, entonces el área A es:

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}(-x^3 + x - x^3)dx \\ &= 2\int_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}(-2x^3 + x)dx \\ &= 2\left(-\frac{x^4}{2} + \frac{x^2}{2}\Big|_0^{\sqrt{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= 2\left(-\frac{1}{8} + \frac{1}{4} - 0\right) \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

   Así, el valor del área es $\frac{1}{4}$ unidades de área.
   Idea gráfica:





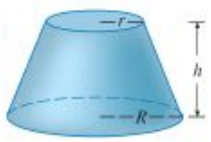
(b) La región R se muestra en la figura

Note que $3 - x = x^2 - 9 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x+4)(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -4 \vee x = 3$ y $3 - x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$
Entonces, una forma de calcular el área

$$\begin{aligned} A &= \int_{-4}^{3}(3 - x - (x^2 - 9))dx - \int_{-2}^{1}(3 - x - (x^2 + 1))dx \\ &= \int_{-4}^{3}(12 - x - x^2)dx - \int_{-2}^{1}(2 - x - x^2)dx \\ &= \left(12x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-4}^{3}\right) - \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{-2}^{1}\right) \\ &= \frac{343}{6} - \frac{9}{2} \\ &= \frac{158}{3} \end{aligned}$$

El valor del área es $\frac{158}{3}$ unidades de área.

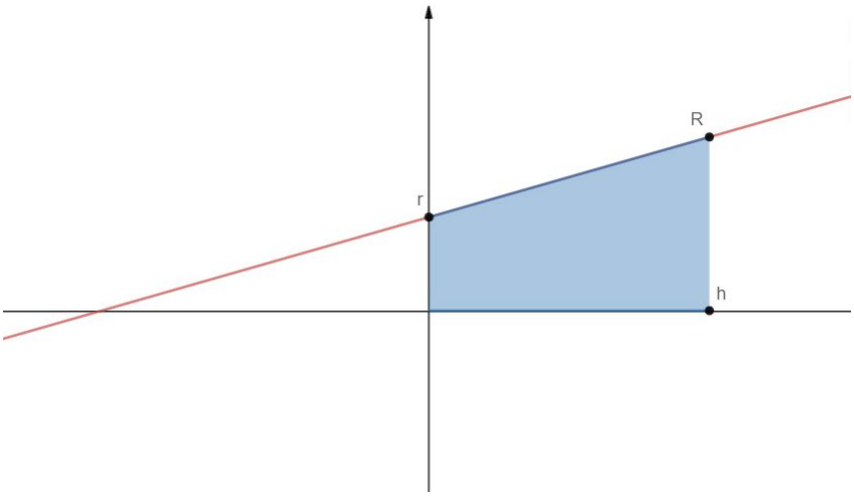
2. Calcular el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r, como se muestra en la figura.



Solución:

Note que el cono circular truncado puede obtenerse al rotar alrededor del eje x el área del trapecio de altura h, base menor r y base mayor R, como en la figura

Note el área del trapecio se asocia al área bajo la recta que pasa por los puntos $(0, r)$ y (h, R),



entre 0 y h. Dicha recta tiene ecuación $y = mx + r$ con $m = \frac{R-r}{h-0} = \frac{R-r}{h}$, entonces,

$$V = \int_0^h \pi(mx+r)^2 dx = \pi \int_0^h (mx+r)^2 = \pi \left.\frac{(mx+r)^3}{3m}\right|_0^h = \frac{(mh+r)^3}{3m} - \frac{(r)^3}{3m}$$

Por lo tanto,

$V = \frac{\pi}{3m}\left((mh+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi}{3\frac{R-r}{h}}\left((R-r+r)^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3(R-r)}\left(R^3 - r^3\right) = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$

Así, el volumen de un cono circular truncado, cuya altura es h , base inferior R y radio superior r es $V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + rR + r^2\right)$ unidades de volumen.

3. Determinar el volumen del sólido generado por la rotación del área limitada por las curvas asociadas a $-y^2-1=x$ y la recta $x=-2$ alrededor de la recta $x=-2$

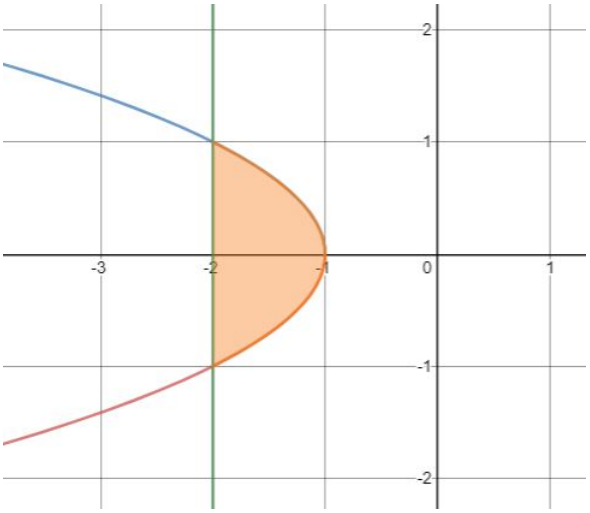
Solución:

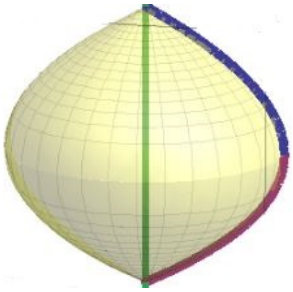
Puntos de Intersección: $-y^2-1=-2 \Leftrightarrow y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1$, es decir, los puntos son $(-2,-1)$, $(-2,1)$.

$$\begin{aligned} V &= \int_{-1}^{1} \pi(-y^2-1-(-2))^2 dy \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} (-y^2+1)^2 dy \\ &= 2\pi \int_{-1}^{1} (y^4-2y^2+1) dy \\ &= \pi \left(\frac{y^5}{5} - 2\frac{y^3}{3} + y \Big|_{-1}^{1} \right) \\ &= \left(\frac{16\pi}{15} \right) \end{aligned}$$

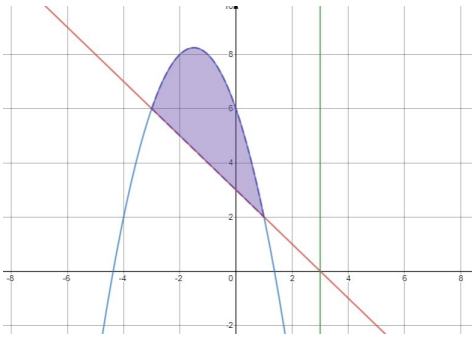
Así el volumen es $\frac{16\pi}{15}$ unidades de volumen.

Idea gráfica





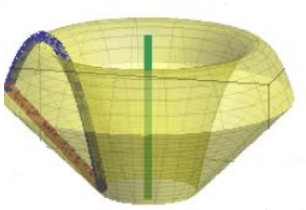
4. Hallar el volumen del sólido generado en la rotación del área limitada por la parábola $y = -x^2 - 3x + 6$ y la recta $y = 3 - x$ alrededor de la recta $x = 3$ y del eje x.
Solución:
El área a rotar se muestra en la figura



Intersección entre las curvas:

$$\begin{aligned} -x^2 - 3x + 6 = 3 - x &\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x+3)(x-1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 1 \end{aligned}$$

Idea gráfica del sólido generado:



$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-3x+6-(3-x)\right)dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} (3-x)\left(-x^2-2x+3)\right)dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(-3x^2-6x+9+x^3+2x^2-3x)\right)dx \\
&= 2\pi \int_{-3}^{1} \left(x^3-x^2-9x+9)\right)dx \\
&= 2\pi \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{9x^2}{2}+9x\right]\Bigg|_{-3}^{1} \\
&= 2\pi \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{9}{2}+9-\left(\frac{81}{4}+9-\frac{81}{2}-27\right)\right] \\
&= 2\pi \left[-\frac{80}{4}+\frac{72}{2}+27-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[43-\frac{1}{3}\right] \\
&= 2\pi \left[\frac{128}{3}\right] \\
&= \frac{256\pi}{3}
\end{aligned}
$$

Así, el volumen del sólido es $\frac{256\pi}{3}$ unidades de volumen.

5. Determine:

   (a) $\displaystyle\int e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)dx$

   (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xe^{\operatorname{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Solución:

(a) Entonces, considerando $u=\ln\left(1+e^{x}\right)$ y $dv=e^{-x}dx$ se tiene que $du=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx$ y $v=\displaystyle\int dv=\int e^{-x}dx=-e^{-x}$. Así, aplicando integración por partes

$$\begin{aligned}
\int e^{-x}\ln\left(1+e^{x}\right)dx &= -\ln\left(1+e^{x}\right)e^{-x}+\int e^{-x}\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx\\
&= -\ln\left(1+e^{x}\right)e^{-x}+\int\frac{1}{1+e^{x}}dx\\
&= -\ln\left(1+e^{x}\right)e^{-x}+\int\frac{1+e^{x}-e^{x}}{1+e^{x}}dx\\
&= -\ln\left(1+e^{x}\right)e^{-x}+\int\frac{1+e^{x}}{1+e^{x}}dx-\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx\\
&= -\ln\left(1+e^{x}\right)e^{-x}+\int 1dx-\int\frac{e^{x}}{1+e^{x}}dx\\
&= -\ln\left(1+e^{x}\right)e^{-x}+x-\ln\left(|1+e^{x}|\right)+C\\
&= -\ln\left(1+e^{x}\right)e^{-x}+x-\ln\left(1+e^{x}\right)+C\\
&= -\ln\left(1+e^{x}\right)\left(e^{-x}+1\right)+x+C
\end{aligned}$$

(b) Notar que $\frac{d}{dx}\operatorname{arcsen}(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, entonces haciendo la sustitución $t=\operatorname{arcsen}(x)$, se tiene que $dt=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$, $x=\operatorname{sen}(t)$, si $x=0$ entonces $t=\operatorname{arcsen}(0)=0$ y si $x=\frac{1}{2}$ entonces $t=\operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{6}$ y $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{xe^{\operatorname{arcsen}(x)}}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\operatorname{sen}(t)e^{t}dt$ cuyo valor puede obtenerse integrando por partes.
Considerando la integral indefinida, aplicando integración pr partes dos veces:
$u=\operatorname{sen}(t)$, $dv=e^{t}$, $du=\cos(t)dt$, $v=e^{t}$
$u=\cos(t)$, $dv=e^{t}$, $du=-\operatorname{sen}(t)dt$, $v=e^{t}$

$$\begin{aligned}
\int\operatorname{sen}(t)e^{t}dt &= e^{t}\operatorname{sen}(t)-\int\cos(t)e^{t}dt\\
&= e^{t}\operatorname{sen}(t)-\left(\cos(t)e^{t}+\int\operatorname{sen}(t)e^{t}dt\right)\\
&= e^{t}\operatorname{sen}(t)-\cos(t)e^{t}-\int\operatorname{sen}(t)e^{t}dt\\
&= e^{t}\left(\operatorname{sen}(t)-\cos(t)\right)-\int\operatorname{sen}(t)e^{t}dt
\end{aligned}$$

Entonces, $\int \text{sen}(t)e^t dt = \dfrac{e^t}{2}\left(\text{sen}(t) - \cos(t)\right) + C$ y

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \text{sen}(t)e^t dt &= \frac{e^t}{2}\left(\text{sen}(t) - \cos(t)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{6}}}{4}\left(1 - \sqrt{3}\right) + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

Ejercicios extras para los alumnos

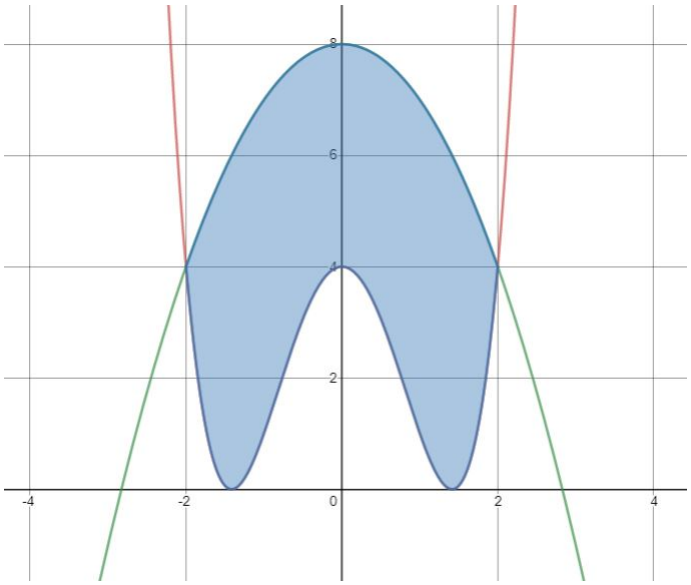
Extra 1 Determine el área de la región comprendida entre las funciones $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$ y $g(x) = 8 - x^2$.

Solución:

Note que cada función involucrada es una función par, y $x^4 - 4x^2 + 4 = 8 - x^2 \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (x^2+1)(x^2-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$. Entonces, las funciones son pares y se intersectan en los extremos de un intervalo simétrico respecto al origen, entonces el área A es:

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 (8 - x^2 - x^4 + 4x^2 - 4)dx \\ &= 2\int_0^2 (-x^4 + 3x^2 + 4)dx \\ &= 2\left(-\frac{x^5}{5} + x^3 + 4x\Big|_0^2\right) \\ &= 2\left(-\frac{32}{5} + 8 + 8 - 0\right) \\ &= \frac{96}{5} \end{aligned}$$

Así, el valor del área es $\frac{96}{5}$ unidades de área.



Extra 2 Determine el área de la región comprendida entre las curvas asociadas a $-|y| + 3 - x = 0$, $y^2 = 4x$.

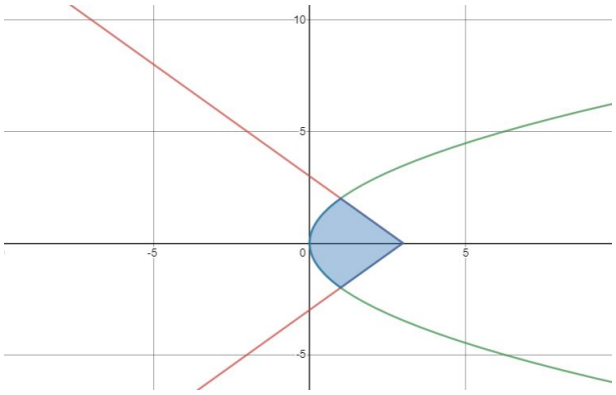
Solución:

El valor del área puede expresarse como

$$\begin{aligned} A &= 2\int_0^2 \left(-y + 3 - \frac{y^2}{4}\right) dy \\ &= 2\left(-\frac{y^2}{2} + 3y - \frac{y^3}{12}\Big|_0^2\right) \\ &= 2\left(-2 + 6 - \frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{20}{3} \end{aligned}$$

El valor del área es $\frac{20}{3}$ unidades de área.

Idea gráfica



Extra 3 Determinar el volumen del sólido generado por la rotación alrededor del eje y del área limitada por las curvas asociadas a $y = e^{-x^2}$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = 1$.

Solución:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 (2\pi x e^{-x^2})dx \\ &= \pi \int_0^1 (2x e^{-x^2})dx \\ &= -\pi \int_0^{-1} e^u du \\ &= \pi \int_{-1}^0 e^u du \\ &= \pi \left(e^u|_{-1}^0\right) \\ &= \pi(1 - e^{-1}) \end{aligned}$$

Así el volumen es $\pi(1 - e^{-1})$ unidades de volumen. Idea gráfica:

