PONTIFICIA UNIVERSIDAD CÁTOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

TAV 2014

PAUTA INTERROGACIÓN 3 - MAT1610.

1. Estudiar la monotonía y determinar los valores extremos de

$$f(x) = \frac{4x}{\ln(3)} - \int_2^{3x} \frac{dt}{\ln(t)}$$

para $x \in [2, 81]$.

Solución: Por el TFC, tenemos que

$$f'(x) = \frac{4}{\ln(3)} - \frac{3}{\ln(3x)}.$$

Luego, $f'(x) > 0$ si y solamente si

$$\frac{\ln(3x)}{\ln(3)} > \frac{3}{4}.$$

lo que es equivalente a

$$4\ln(3x) > 3\ln(3)$$

usando propiedades del logaritmo natural.

$$4\ln(3) + 4\ln(x) > 3\ln(3)$$

esto es

$$\ln(3) + 4\ln(x) > 0$$

y como $x \geq 2 > 1$, luego $\ln(x) > 0$, por lo cual $\ln(3) + 4\ln(x) > 0$, esto es, $f'(x) > 0$ para todo $x \in [2, 82]$, es decir, f es monótona creciente.

Ahora como f es monótona creciente esta tendrá su máximo en $x = 82$ y su mínimo en $x = 2$.

2. Calcule las siguientes integrales.

a) $\displaystyle\int \frac{2-x^2}{(x^3-6x+1)^5}dx.$

Solución: Hacemos la sustitución $u = x^3 - 6x + 1$ de forma que $du = 3(x^2-2)dx$. Así, la integral queda

$$\int \frac{2-x^2}{(x^3-6x+1)^5}dx = \int \frac{1}{u^5}\left(-\frac{1}{3}\right)du = \frac{1}{12u^4} + C = \frac{1}{12(x^3-6x+1)^4} + C.$$

b) $\displaystyle\int \frac{x}{x^3+x^2+x+1}dx.$

Solución: Notemos que podemos factorizar el denominador de la forma

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x+1) + (x+1) = (x+1)(x^2+1).$$

Luego, queremos calcular la integral

$$\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx.$$

Por fracciones parciales hacemos la descomposición

$$\begin{aligned}\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}\\ \frac{x}{(x+1)(x^2+1)} &= \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x+1)(x^2+1)},\end{aligned}$$

o sea, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x &= Ax^2 + A + Bx^2 + Bx + Cx + C\\ x &= (A+B)x^2 + (B+C)x + A + C\end{aligned}$$

Evaluándo en $x = -1$ obtenemos que $A = -\frac{1}{2}$; luego, en $x = 0$ obtenemos que $A + C = 0$, o sea, $C = \frac{1}{2}$. Además, $A + B = 0$ y $B + C = 1$, o sea, $B = \frac{1}{2}$. Por lo tanto, concluimos que

$$\frac{x}{(x+1)(x^2+1)} = \frac{-1/2}{x+1} + \frac{x/2+1/2}{x^2+1} = \frac{1}{2}\left[\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right]$$

y la integral queda

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{(x+1)(x^2+1)}\,dx &= \frac{1}{2}\int\left[\frac{x+1}{x^2+1} - \frac{1}{x+1}\right]dx\\ &= \frac{1}{2}\int \frac{x}{x^2+1}\,dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}\,dx\\ &= \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\ln|x+1| + C\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{x^2+1}}{|x+1|} + \frac{1}{2}\arctan x + C.\end{aligned}$$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}(\theta)}{2+\cos(\theta)}d\theta.$

Solución: Hacemos la sustitución $t = \tan(\frac{\theta}{2})$, de forma que

$$\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{2t}{1+t^2} \quad \text{y} \quad d\theta = \frac{2}{1+t^2}dt.$$

Luego, la integral queda

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2+\cos\theta}d\theta = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}dt = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2)(3+t^2)}dt.$$

Ahora, con la sustitución $u = t^2$ (así, $du = 2tdt$) llegamos a

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{sen}\theta}{2+\cos\theta}\,d\theta &= \int_0^1 \frac{2}{(1+u)(3+u)}\,du = \int_0^1 \left[\frac{1}{1+u} - \frac{1}{3+u}\right] du \\ &= \left[\ln|1+u| - \ln|3+u|\right]\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 4 - \ln 1 + \ln 3 \\ &= \ln\left(\frac{3}{2}\right).\end{aligned}$$

d) $\displaystyle\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx.$

Solución: Hacemos la sustitución trigonométrica $x = 3\operatorname{sen}\theta$, de forma que $dx = 3\cos\theta\,d\theta$ y $\sqrt{9-x^2} = \sqrt{9-9\operatorname{sen}^2\theta} = 3\cos\theta$ (pues $0 \le \theta \le \pi/6 < \pi/2$). Para $x = 0$ se tiene que $\theta = 0$ y para $x = 3/2$ se tiene que $\theta = \frac{\pi}{6}$. Así, queda la integral

$$\begin{aligned}\int_0^{3/2} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{9\operatorname{sen}^2\theta}{3\cos\theta}\,3\cos\theta\,d\theta = 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta \\ &= 9\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2}[1-\cos(2\theta)]\,d\theta = \frac{9}{2}\left[\theta - \frac{1}{2}\operatorname{sen}(2\theta)\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{9}{2}\left[\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right] = \frac{3\pi}{4} - \frac{9\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

3. Pruebe que

$$\int x^n e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} dx$$

y úselo para calcular

$$\int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx$$

Solución: Para probar la formula derivamos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2} + \frac{n-1}{2} \int x^{n-2} e^{-x^2} dx\right) &= -\frac{n-1}{2} x^{n-2} e^{-x^2} - \frac{1}{2} x^{n-1} e^{-x^2}(-2x) + \frac{n-1}{2} x^{n-2} e^{-x^2} \\ &= x^n e^{-x^2} \end{aligned}$$

lo que demuestra la formula. Ahora la usamos en

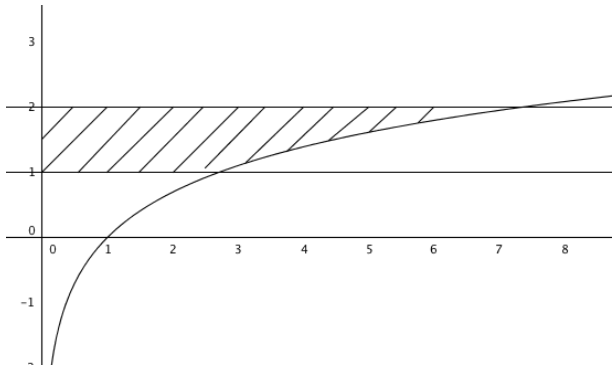
$$\begin{aligned} \int_0^1 x^5 e^{-x^2} dx &= -\frac{1}{2} x^{5-1} e^{-x^2}\Big|_0^1 + \frac{5-1}{2} \int_0^1 x^{5-2} e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2} x^4 e^{-x^2}\Big|_0^1 + 2 \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2e} + 2 \int_0^1 x^3 e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2e} + 2\left(-\frac{1}{2} x^{3-1} e^{-x^2}\Big|_0^1 + \frac{3-1}{2} \int_0^1 x^{3-2} e^{-x^2} dx\right) \\ &= -\frac{1}{2e} + 2\left(-\frac{1}{2e} + \frac{3-1}{2} \int_0^1 x^{3-2} e^{-x^2} dx\right) \\ &= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} + 2 \int_0^1 x e^{-x^2} dx \\ &= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} - e^{-x^2}\Big|_0^1 \\ &= -\frac{1}{2e} - \frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 \\ &= 1 - e^{-1}\left(\frac{5}{2}\right) \end{aligned}$$

4. Considere la región delimitada por las curvas de ecuaciones $y = \ln(x)$, $y = 1$, $y = 2$ y $x = 0$.

   a) Calcule el área de la región.

   b) Calcule el volumen del solido de revolución generado al rotar dicha región en torno a la recta $x = -1$.

Solución:
Observe que el gráfico de la región descrita es:



a) El área de la región puede ser calculada como:

$$\int_1^2 e^y dy = e^2 - e$$

b) Usando secciones transversales tenemos que el volumen es:

$$\pi \int_1^2 (e^y + 1)^2 - 1 dy = \pi \int_1^2 (e^{2y} + 2e^y) dy = \pi \left(e^{2y} \frac{1}{2} + 2e^y \right)_1^2 = \pi \left(\frac{e^4}{2} + \frac{3e^2}{2} - 2e \right)$$