Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Matemática

MAT 1610 - Cálculo I.

Interrogación 3

Solución

t: 120 min.

1. a)**[3 puntos]**Demuestre que

$$\frac{1}{14} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^3}dx \leq \frac{11}{18}$$

b)**[3 puntos]**Calcule

$$\int_0^1 (x^2+1)e^{-x}dx$$

Solución.

a) Como $f(x) = \dfrac{1}{1+x^3}$ es decreciente para la parte derecha de la desigualdad tomamos la suma superior para una partición de $[1,3]$ en dos sub-intervalos iguales y para la izquierda el mínimo de f en $[1,3]$ que es $f(3)$, así:

1 pto

$$f(3)(3-1) \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^3}dx \leq \frac{1}{1+1^3} + \frac{1}{1+2^3} \qquad 1 \text{ pto}$$

1 pto

$$\Updownarrow$$

$$\frac{1}{14} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^3}dx \leq \frac{11}{18}$$

b)

Integrando por partes

$$u = x^2+1 \Rightarrow du = 2x\,dx$$
$$dv = e^{-x}dx \Rightarrow v = -e^{-x}$$

$$= -(x^2+1)e^{-x}\Big|_0^1 + 2\int_0^1 xe^{-x}dx \qquad 1 \text{ pto}$$

De nuevo por partes y queda

$$= -(x^2+1)e^{-x}\Big|_0^1 + 2(-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx)$$

$$= -(x^2+1)e^{-x}\Big|_0^1 + 2(-xe^{-x}\Big|_0^1 - e^{-x}\Big|_0^1) \qquad 1\text{pt}$$

$$= 3\left(1-\frac{2}{e}\right) \qquad 1\text{pt}$$

2. Determine :

a)**[3 puntos]**

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx$$

b)**[3 puntos]**

$$\int \frac{x^2-x}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

Solución.

a) $$\frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

$$x+1 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

de donde se obtienen: $A = 1,\ B = -1$ y $C = 0,$ así 1 pto

$$\int \frac{x+1}{(x-1)(x^2+1)}dx = \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$= \ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + K$$

1 pto 1 pto

b)

$$\int \frac{x^2-x}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx - \int \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}dx$$

Haciendo $x = 3\text{sen}\, t \Rightarrow dx = 3\cos t\, dt$ en la primera integral y en la segunda 1 pto

$u^2 = 9 - x^2 \Rightarrow 2udu = -2xdx$, se tiene

$$= \int \frac{\text{sen}^2 t}{3\cos t} 3\cos t\, dt - \int \frac{-u}{u}\, du$$

$$= \int \frac{1-\cos 2t}{2}dt + u + C$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{1}{4}\text{sen}(2t) + \sqrt{9-x^2} + C$$

1 pto

$$= \frac{1}{2}\arcsen\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{1}{2}\frac{x\sqrt{9-x^2}}{9} + \sqrt{9-x^2} + C$$

1 pto

3. Considere la región plana comprendida entre las curvas

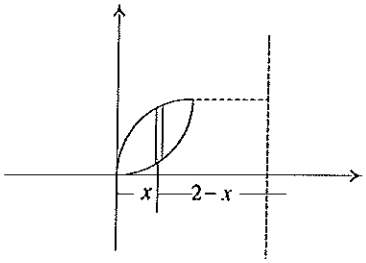
$$y = x^2;\ y = \sqrt{x},\ x \geq 0$$

Calcule:

a)**[3 puntos]** El área de la región.

b)**[3 puntos]**El volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región en torno al eje $x = 2$.

Solución.



a)

$$A = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

1pto 1pto + 1pto límites de int.

b)

$$V_y = 2\,\pi \int_0^1 (2 - x)(\sqrt{x} - x^2)\,dx$$

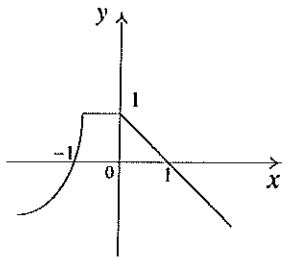
$$= 2\pi \int_0^1 (2\sqrt{x} - 2x^2 - x^{3/2} + x^3)dx$$

$$= 2\pi(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^{5/2} + \frac{1}{4}x^4)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi(\frac{4}{3} - \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4}) = \frac{31}{60}$$

1pto 1pto + 1pto límites

4. Sea f una función continua en $\mathbb{R}$ y cuyo gráfico está dado por



y sea $F(x) = \int_0^{x^2} f(t)dt.$

a)**[3 puntos]**Calcule: $F(1)$, $F'(1)$ y $F''(1)$.

b)**[3 puntos]** Indique los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $F(x)$.

Solución.

a) Los valores de: $F(1)$, $F'(1)$ y $F''(1)$ se obtienen directamente del gráfico de f.

$$F(1) = \int_0^1 f(t)dt = \frac{1}{2} \qquad 1\text{pto}$$

$$F'(x) = 2xf(x^2) \Rightarrow F'(1) = 2f(1) = 2 \cdot 0 = 0. \qquad 1\text{pto}$$

$$F''(x) = 2f(x^2) + 2xf'(x^2)2x \Rightarrow F''(1) = 2f(1) + 4f'(1) = 4(-1) \qquad 1\text{pto}$$

b)

Los puntos críticos de F' se obtienen de hacer

$2xf(x^2) = 0 \Rightarrow x = 0$ y del gráfico de f se obtienen $x = \pm 1$. $\quad 1\text{pto}$

Por tanto:

$$\underset{}{\quad} \pm \underset{-1}{\bullet} \underset{}{\quad} = \underset{0}{\bullet} \underset{}{\quad} \pm \underset{1}{\bullet} \underset{}{\quad} = \underset{}{\quad} F'$$

1pto

$F \rightarrow$ crece decrece crece decrece

La función es creciente para x tal que $x < -1 \ \vee \ 0 < x < 1.$

La función es decreciente para x tal que $-1 < x < 0 \ \vee \ x > 1$ $\quad 1\text{pto}$